

**De effecten van alternatieve verdelingen en
individuele serviceniveaus bij
standaardisatie van componenten voor
specifieke gevallen**

**Willem-Jan van der Zanden
ANR: 974102**

**Begeleiders:
Dr. R.M.J. Heuts
Dr. Ir. L.W.G. Strijbosch**

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1 Inleidende opmerkingen over de effecten van de standaardisatie van componenten

1.1	Algemene inleidende opmerkingen.....	4
1.2	Hoofdstukkenoverzicht.....	6

Hoofdstuk 2 Modellen m.b.t. standaardisatie van componenten met een geaggregeerd serviceniveau

2.1	Het Basis Model BO.....	10
2.2	Het Commonality Model CO.....	14
2.3	Het Flexible Product Model FO.....	19
2.4	Het Double Commonality Model DO.....	24
2.5	BO, CO en DO met meer componenten.....	28

Hoofdstuk 3 Kostenanalyses m.b.t. de modellen uit hoofdstuk 2

3.1	Kostenvergelijking tussen de vier modellen.....	32
3.2	Kostenvoorbeeld met de vier modellen.....	36

Hoofdstuk 4 Modellen m.b.t. standaardisatie van componenten met alternatieve verdelingen en een geaggregeerd serviceniveau

4.1	Het Basis Model BO.....	39
4.2	Het Commonality Model CO.....	43
4.3	Het Flexible Product Model FO.....	46
4.4	Het Double Commonality Model DO.....	49

Hoofdstuk 5 Modellen m.b.t. standaardisatie van componenten met individuele serviceniveaus

5.1	Het Basis Model BOI.....	52
5.2	Het Commonality Model COI.....	54

Hoofdstuk 6 Kostenanalyses m.b.t. de modellen uit hoofdstuk 5

6.1	Kostenvergelijking.....	63
-----	-------------------------	----

Hoofdstuk 7 Mogelijkheden tot nader onderzoek

7.1	Het meer-perioden model.....	66
7.2	Een uitbreiding van het 2 componenten model.....	67
7.3	Een nadere analyse van de voorraadniveaus.....	70
7.4	Veiligheidsvoorraad en component commonality.....	71
7.5	Een overzicht van andere mogelijke uitbreidingen.....	74

Literatuuropgave

Appendix A Modelberekeningen bij hoofdstuk 2

A.1	Het Basis Model BO.....	79
A.2	Het Commonality Model CO.....	80
A.3	Het Flexible Product Model FO.....	82
A.4	Het Double Commonality Model DO.....	87

Appendix B Kostenberekeningen bij hoofdstuk 3	
B.1	Kostenvergelijking tussen de vier modellen (§ 3.1)..... 88
B.2	Kostenvoorbeeld met de vier modellen (§ 3.2)..... 102
Appendix C Alternatieve verdelingen bij hoofdstuk 4	
C.1	Het Commonality Model CO..... 104
C.2	Het Flexible Product Model FO..... 106
Appendix D MATLAB-programma's bij hoofdstuk 3 en 4	
D.1	Het Basis Model BO..... 108
D.2	Het Commonality Model CO..... 111
D.3	Het Flexible Product Model FO..... 117
D.4	Het Double Commonality Model DO..... 122
Appendix E Modelberekeningen bij hoofdstuk 5	
E.1	Het Commonality Model COI..... 124
E.2	Berekeningen van het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$)..... 126
E.3	Berekeningen van het Commonality Model COI ($F_1 = F_2$)..... 133
Appendix F Kostenberekeningen bij hoofdstuk 6 136	

1 Inleidende opmerkingen over de effecten van de standaardisatie van componenten

1.1 Algemene inleidende opmerkingen

Door de toename van het aantal varianten van producten vanaf de jaren tachtig is het onderwerp “standaardisatie van componenten” ofwel “component commonality” steeds meer in de belangstelling komen te staan. Meer varianten van producten leiden over het algemeen ook tot meer verschillende componenten. Hierdoor wordt het productieproces complexer en kunnen de voorraden gaan stijgen. Een manier om het aantal verschillende componenten te verminderen is door gebruik te maken van standaardisatie van componenten. De functionaliteiten van een aantal verschillende componenten worden nu door die van één gezamenlijke component vervangen. Deze gezamenlijke component is over het algemeen duurder dan de afzonderlijke componenten, die hij vervangt. Perera, Nagarur en Tabucanon (1999) geven een drietal manieren waarop componenten vervangen kunnen worden:

- A. Het vervangen van een aantal verschillende componenten in één product door één gezamenlijke component;
- B. Het vervangen van een aantal verschillende componenten in verschillende producten door één gezamenlijke component;
- C. Het gebruik van gezamenlijke componenten in één product in de loop van de tijd. Bij het ontwikkelen van componenten wordt nu rekening gehouden met toekomstige ontwikkelingen. Hierdoor raakt een component minder snel verouderd en kan dus gedurende een langere tijdsperiode gebruikt worden.

Het gebruik van gezamenlijke componenten kan volgens Perera, Nagarur en Tabucanon (1999) leiden tot kostenbesparingen op de volgende terreinen:

- 1. Productontwikkeling:
Door standaardisatie neemt het aantal verschillende componenten, dat ontwikkeld moet worden af. Wel zullen de gezamenlijke componenten hogere ontwikkelingskosten hebben dan de afzonderlijke componenten, die ze vervangen. Bij verbetering van het product moeten verder zoveel mogelijk bestaande componenten worden hergebruikt in plaats van het ontwikkelen van volledig nieuwe componenten.
- 2. Productieproces:
 - a. Materiaal:
Door de afname van het aantal verschillende componenten kan ook bespaard worden op het ruwe materiaal waaruit deze componenten bestaan. Dit is het geval als het bedrijf de componenten zelf maakt. Indien het aantal verschillende componenten afneemt, zal de vraag per component toenemen. Hierdoor kan het aantal toeleveranciers beperkt worden en kan het bedrijf in staat zijn om korting te bedingen.
 - b. Productiefaciliteiten:
Standaardisatie van componenten leidt ook tot standaardisatie van productiefaciliteiten zoals machines en magazijnen. Er zijn immers minder verschillende machines nodig.

- c. Productiekosten:
 - Werknemers hoeven minder verschillende handelingen uit te voeren. Volgens Perera, Nagarur en Tabucanon (1999) leidt dit tot een efficiëntere leercurve. Meer herhalingen leiden tot efficiënter leren. Doordat er minder handelingen zijn, wordt het aantal onderbrekingen (de werknemer begint met een andere handeling) minder. Ook dit leidt tot efficiënter werken.
 - Minder verschillende componenten leiden tot minder set-ups. De “down-time” van een machine zal hierdoor afnemen.
3. Distributie:
 - a. Voorraadniveaus:

In hoofdstuk 2 van dit afstudeerwerkstuk zullen een aantal modellen besproken worden, die betrekking hebben op standaardisatie van componenten. Uit de voorbeelden bij deze modellen kunnen de volgende voorlopige conclusies getrokken worden:

 - Het totaal aantal componenten in voorraad neemt af wanneer er gebruik gemaakt gaat worden van gezamenlijke componenten.
 - De voorraad van de gezamenlijke component is kleiner dan de totale voorraad van de componenten, die hij vervangt.
 - Het voorraadniveau van de specifieke component neemt toe.
 - b. Beschadigde componenten:

Door de afname van het aantal verschillende componenten en de toename van de voorraad per component, neemt de kans dat een beschadigde component direct uit voorraad vervangen kan worden toe.
4. Productgebruik:

Naarmate het aantal verschillende componenten in een product afneemt, kunnen ook de kosten van reparaties afnemen. Reparateurs kunnen sneller werken door het kleinere aantal verschillende componenten, het product is daardoor minder complex en reparateurs hebben dus minder scholing nodig. Daarnaast hoeft het bedrijf minder verschillende componenten als reserve op voorraad te houden.
5. Recycling:

Bedrijven worden tegenwoordig steeds meer wettelijk verplicht om producten te recyclen en/of terug te nemen na gebruik. Standaardisatie van componenten zal hoogstwaarschijnlijk ook op dit gebied leiden tot minder kosten.

Het bovenstaande overzicht geeft kort weer op welke terreinen er besparingen mogelijk zijn als er van standaardisatie van componenten gebruik wordt gemaakt. In dit afstudeerwerkstuk zal vooral gekeken gaan worden naar punt 3a. Wat is het effect van het gebruik van gezamenlijke componenten op het voorraadniveau van de verschillende componenten. Het zwaartepunt zal hierbij overigens liggen op kosten van de componenten en niet op hoeveelheden van deze componenten. In paragraaf 1.2 zal een kort overzicht gegeven worden van de opbouw van dit afstudeerwerkstuk.

1.2 Hoofdstukkenoverzicht

Hoofdstuk 2:

In hoofdstuk 2 zullen de volgende vier modellen uitgebreid besproken worden:

1. Het Basis Model BO met een geaggregeerd serviceniveau: (§ 2.1)
Twee eindproducten bestaan uit een tweetal specifieke componenten. Eindproduct 1 wordt samengesteld uit één specifieke component 3 en één specifieke component 4. Eindproduct 2 wordt samengesteld uit één specifieke component 5 en één specifieke component 6.
2. Het Commonality Model CO met een geaggregeerd serviceniveau: (§ 2.2)
Twee eindproducten bestaan elk uit één gezamenlijke en één specifieke component. Eindproduct 1 wordt samengesteld uit één specifieke component 3 en één gezamenlijke component 7. Eindproduct 2 wordt samengesteld uit één specifieke component 6 en één gezamenlijke component 7.
3. Het Flexible Product Model FO met een geaggregeerd serviceniveau: (§ 2.3)
Dit model is een mix van het Basis Model BO en het Commonality Model CO. De eindproducten kunnen nu op een drietal manieren samengesteld worden:
 - Alle producten worden gemaakt met de Basis Model BO variant;
 - Alle producten worden gemaakt met de Commonality Model CO variant;
 - Een deel van de producten wordt gemaakt met de Basis Model BO variant en een ander deel met de Commonality Model CO variant.
4. Het Double Commonality Model CO met een geaggregeerd serviceniveau: (§ 2.4)
Twee eindproducten worden samengesteld uit een tweetal gezamenlijke componenten. Eindproduct 1 wordt samengesteld m.b.v. één gezamenlijke component 7 en één gezamenlijke component 8. Eindproduct 2 wordt samengesteld m.b.v. één gezamenlijke component 7 en één gezamenlijke component 8.

Naast een afleiding van de oplossing van bovenstaande modellen zullen van elk model een tweetal rekenvoorbeelden gepresenteerd worden. Met deze rekenvoorbeelden zal een eerste aanzet gemaakt worden om de kosten van de verschillende modellen met elkaar te vergelijken. Het Basis Model BO, Commonality Model CO en Double Commonality Model DO worden in het artikel van Eynan en Rosenblatt (1996) beschreven. In dit artikel wordt echter nauwelijks ingegaan op het berekenen van de oplossing van deze modellen. In Van der Zanden (2001) en dit afstudeerwerkstuk wordt hierop in de appendices ingegaan. Hetzelfde geldt voor het Flexible Product Model FO dat in het artikel van Eynan en Rosenblatt (1997) beschreven wordt. In paragraaf 2.5 zal vervolgens voor het Basis Model BO, het Commonality Model CO en het Double Commonality Model DO kort ingegaan worden op een situatie met een willekeurig aantal componenten. In Eynan en Rosenblatt (1996) komt dit heel kort even aan bod.

Hoofdstuk 3:

In hoofdstuk 3 zal uitgebreid ingegaan worden op een kostenvergelijking van de vier modellen die in hoofdstuk 2 zijn uitgewerkt.

1. Kostenvergelijking van de vier modellen: (§ 3.1)
De eigenschappen 3.1.1 t/m 3.1.7 geven aan onder welke voorwaarden een bepaald model een goedkopere oplossing geeft dan een ander model. Deze kostenvergelijkingen zijn voor een deel ook terug te vinden in de artikelen van Eynan en Rosenblatt (1996) en Eynan en Rosenblatt (1997). In dit afstudeerwerkstuk worden deze kostenvergelijkingen verder aangevuld. Verder wordt in appendix B ook meer aandacht besteed aan de formele bewijsvoering dan in de twee eerder genoemde artikelen. Bij de eigenschappen 3.1.8 en 3.1.9 wordt kort ingegaan op de maximale absolute en de maximale relatieve besparingen die te behalen zijn wanneer een bepaald model door een ander model vervangen wordt.
2. Kostenvoorbeeld met de vier modellen: (§ 3.2)
In het tweede deel van hoofdstuk 3 worden een viertal eigenschappen afgeleid voor het geval, dat de kosten van alle specifieke componenten aan elkaar gelijk zijn, de kosten van alle gezamenlijke componenten aan elkaar gelijk zijn en beide eindproducten dezelfde vraagverdeling hebben. Concreet betekent dit dat een aantal eigenschappen uit paragraaf 3.1 hier voor een specifiek geval nog eens nader belicht worden. Uitgangspunt voor dit hoofdstuk zijn de artikelen van Eynan en Rosenblatt (1996) en Hillier (1999) waarbij deze hier aangevuld worden met extra eigenschappen voor het Flexible Product Model FO.

Hoofdstuk 4:

In hoofdstuk 4 staan de vier modellen uit hoofdstuk 2 centraal. In hoofdstuk 2 werd uitgegaan van een uniforme verdeling van de vraag naar eindproducten. Deze uniforme verdeling zal in hoofdstuk 4 worden losgelaten en vervangen worden door een exponentiële, Erlang of normale vraagverdeling. Door het veranderen van de vraagverdeling is een expliciete oplossing van de vier modellen zoals in hoofdstuk 2 niet meer mogelijk. Hierdoor zal met een MATLAB programma gewerkt gaan worden om de oplossing te kunnen simuleren. Om het effect van een andere vraagverdeling duidelijk te maken zullen een tweetal rekenvoorbeelden gebruikt gaan worden. Dit hoofdstuk is voor een groot gedeelte zonder literatuur opgezet. In verschillende artikelen zoals van Bagchi en Gutierrez (1992), Eynan (1996) en Hillier (1999) komen simulaties met andere verdelingen dan de uniforme voor. Deze artikelen zijn enkel als een startpunt gebruikt omdat deze simulaties hier vrij globaal beschreven worden. In het artikel van Bagchi en Gutierrez (1992) is vooral gebruik gemaakt van paragraaf 3 waarin weergegeven wordt hoe het geaggregeerde serviceniveau voor een andere dan de uniforme verdeling berekend kan worden.

Hoofdstuk 5:

In hoofdstuk 2 wordt een viertal modellen met ongecorreleerde vraag besproken, waarbij steeds uitgegaan is van een geaggregeerd serviceniveau. In hoofdstuk 5 zal dit geaggregeerde serviceniveau voor beide eindproducten gezamenlijk verlaten worden en gekeken gaan worden naar een individueel serviceniveau. Elk van de eindproducten moet nu aan dit individuele serviceniveau voldoen. De volgende twee modellen komen in hoofdstuk 5 aan bod:

1. Het Basis Model BOI met een individueel serviceniveau: (§ 5.1)
Twee eindproducten worden samengesteld uit een tweetal specifieke componenten. Eindproduct 1 wordt samengesteld m.b.v. één specifieke

component 3 en één specifieke component 4. Eindproduct 2 wordt samengesteld m.b.v. één specifieke component 5 en één specifieke component 6. Zoals in paragraaf 5.1 zal blijken is de oplossing van dit model triviaal.

2. Het Commonality Model COI met een individueel serviceniveau: (§ 5.2)

Twee eindproducten worden samengesteld uit één gezamenlijke en één specifieke component. Eindproduct 1 wordt samengesteld m.b.v. één specifieke component 3 en één gezamenlijke component 7. Eindproduct 2 wordt samengesteld m.b.v. één specifieke component 6 en één gezamenlijke component 7. Het berekenen van de oplossing van het Commonality Model COI met een individueel serviceniveau is een stuk gecompliceerder dan het berekenen van de oplossing van het Commonality Model CO met een geaggregeerd serviceniveau uit paragraaf 2.2.

Als uitgangspunt voor paragraaf 5.1 zijn de artikelen van Baker, Magazine en Nuttle (1986) en Mirchandani en Mishra (2000) gebruikt. Baker, Magazine en Nuttle (1986) geven in hun artikel een eerste aanzet voor het berekenen van de oplossing van modellen met een individueel serviceniveau. Een van de voorwaarden, die hier echter wordt opgelegd, is dat beide eindproducten een gelijke vraagverdeling hebben. Verder wordt in dit artikel ook nauwelijks ingegaan op de manier waarop de afleiding van deze modellen plaatsvindt en komt de oplossing als het ware “uit de lucht vallen.” Meer informatie is daarentegen te vinden in het artikel van Mirchandani en Mishra (2000) dat gebruikt is voor de opbouw van paragraaf 5.2. In dit artikel wordt uitgebreid het Commonality Model COI met een individueel serviceniveau besproken. Mirchandani en Mishra (2000) presenteren echter niet de volledige oplossing van dit Commonality Model COI. In paragraaf 5.2 zal dit wel gebeuren. Een uitgebreide beschrijving van de manier waarop het Commonality Model COI met een individueel serviceniveau opgelost kan worden is terug te vinden in appendix E.

Hoofdstuk 6:

In hoofdstuk 6 zal voor de twee besproken modellen uit hoofdstuk 5 een viertal eigenschappen afgeleid gaan worden:

1. Kostenvergelijking tussen het Basis Model BOI en het Commonality Model COI met een individueel serviceniveau.
2. Kostenvergelijking tussen het Basis Model BOI met een individueel serviceniveau en het Basis Model BO met een geaggregeerd serviceniveau uit paragraaf 2.1.
3. Kostenvergelijking tussen het Commonality Model COI met een individueel serviceniveau en het Commonality Model CO met een geaggregeerd serviceniveau uit paragraaf 2.2.
4. Kostenvergelijking tussen het Commonality Model COI met prioriteiten (paragraaf 4 Mirchandani en Mishra (2000)) en het Commonality Model COI zonder prioriteiten (paragraaf 5 Mirchandani en Mishra (2000) en paragraaf 5.2 van dit afstudeerwerkstuk)

Mirchandani en Mishra (2000) gaan in paragraaf 5 van hun artikel in op de kostenverschillen tussen het Basis Model BOI en het Commonality Model COI. Mirchandani en Mishra leggen in hun kostenvergelijking bepaalde voorwaarden aan

de parameters op. In hoofdstuk 6 van dit afstudeerwerkstuk waar de modellen uit hoofdstuk 5 op kosten vergeleken worden, gebeurt dit niet.

Hoofdstuk 7:

In het laatste hoofdstuk zal kort ingegaan worden op mogelijkheden tot nader onderzoek. In dit afstudeerwerkstuk is slechts een klein gedeelte besproken van de mogelijkheden die er zijn met betrekking tot het onderwerp “Standaardisatie van componenten”. In hoofdstuk 7 zullen ter afsluiting de volgende onderwerpen aan bod komen:

1. Uitbreiding van het in dit afstudeerwerkstuk gebruikte één-periode model naar een meer-perioden model. (§ 7.1)
2. Een eerste aanzet naar een Basis Model BO waarbij een willekeurig aantal producten elk door een willekeurig aantal specifieke componenten wordt geproduceerd. (§ 7.2)
3. Een eerste aanzet tot het vergelijken van de voorraadniveaus van de componenten van de verschillende modellen. (§ 7.3)
4. De effecten op de oplossing van de gebruikte modellen bij het invoeren van een veiligheidsvoorraad. (§ 7.4)
5. Een overzicht van andere mogelijke uitbreidingen. (§ 7.5)

2 Modellen m.b.t. standaardisatie van componenten met een geaggregeerd serviceniveau

In dit hoofdstuk zal een uitgebreide beschrijving gegeven worden van de vier modellen met ongecorreleerde vraag zoals deze in de inleiding kort aan bod gekomen zijn. In paragraaf 2.1 wordt het Basis Model BO besproken. Dit Basis Model BO kan beschouwd worden als de huidige situatie. Twee eindproducten worden uit elk twee specifieke componenten samengesteld. In het Commonality Model CO van paragraaf 2.2 worden de twee eindproducten elk uit één gezamenlijke en één specifieke component samengesteld. Het Flexible Product Model FO van paragraaf 2.3 is een combinatie van het Basis Model BO uit paragraaf 2.1 en het Commonality Model CO uit paragraaf 2.2. In paragraaf 2.4 komt tenslotte het Double Commonality Model DO aan bod. In dit model worden er enkel gezamenlijke componenten gebruikt. Met uitzondering van het Flexible Product Model FO zijn de modellen al uitgebreid besproken in Van der Zanden (2001). De afleidingen van deze modellen zullen hier dan ook niet opnieuw worden opgeschreven, maar zijn in de appendices van Van der Zanden (2001) terug te vinden.

2.1 Het Basis Model BO¹

Eynan en Rosenblatt (1996) nemen in hun artikel het Basis Model BO met 2 eindproducten en 2 x 2 componenten als uitgangspunt. Eindproduct 1 bestaat uit één component 3 en één component 4. Eindproduct 2 wordt uit één component 5 en één component 6 samengesteld. In het Basis Model BO is D_1 (D_2) de verdeling van de vraag naar eindproduct 1 (2). Op basis van de vraagverdeling van de beide eindproducten, geeft het model vervolgens aan hoeveel voorraad (S_i) er voor component i ($i=3, \dots, 6$) moet worden aangehouden. Figuur 1 geeft het Basis Model BO schematisch weer:

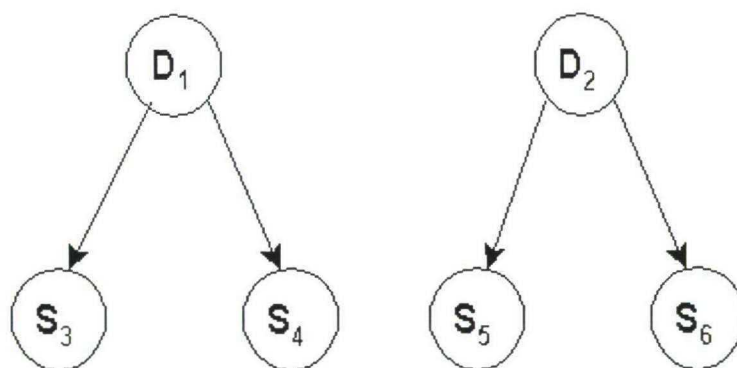


Fig. 1: Schematische weergave van het Basis Model BO

Bij dit model horen de volgende aannamen:

1. De vraag van beide eindproducten is uniform verdeeld;
 - De vraag van eindproduct 1 voor één periode (D_1) is $U(0, b_1)$ verdeeld.
 - De vraag van eindproduct 2 voor één periode (D_2) is $U(0, b_2)$ verdeeld.²

¹ In Eynan (1996) en de paragrafen 2.3 t/m 2.5 van Van der Zanden (2001) wordt een Basis Model besproken, met dezelfde aannamen, waarbij de vraag van de eindproducten gecorreleerd is.

2. Er worden geen restricties opgelegd aan de kosten van de componenten;
3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld geaggregeerd serviceniveau β met een waarde tussen 0 en 1. Dit serviceniveau wordt gedefinieerd als de kans dat aan de gezamenlijke vraag van beide eindproducten kan worden voldaan. Aan dit serviceniveau wordt voldaan als geldt dat: $ASL \geq \beta$. ASL is hierbij het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau.^{3,4}

Dit geeft het volgende model:

$$\text{Min } T_{BO} = c_3 S_3 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 S_6$$

$$\begin{aligned} \text{o.d.v. } ASL &\geq \beta \\ S_3, S_4, S_5, S_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Met: c_i = kosten van component i , $i = 3, \dots, 6$
 S_i = voorraad van component i , $i = 3, \dots, 6$
 ASL = het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau
 β = vooraf vastgesteld geaggregeerd serviceniveau
 T_{BO} = totale kosten van model BO voor één periode.

Aan bovenstaand model kunnen verder nog de volgende vereenvoudigingen worden opgelegd:

1. Voor eindproduct 1 is steeds één component 3 en één component 4 nodig. In de optimale oplossing zal daarom moeten gelden dat S_3 gelijk is aan S_4 . Het in voorraad houden van ongelijke hoeveelheden van beide componenten zal niet leiden tot een verhoging van het serviceniveau. Op gelijke wijze geldt nu dat S_5 gelijk is aan S_6 .
2. De maximaal mogelijke vraag voor eindproduct 1 is b_1 . Het aanhouden van een grotere voorraad van component 3 dan b_1 zal niet leiden tot een hoger serviceniveau. Eveneens geldt dat S_6 niet groter mag zijn dan b_2 .

² Naast de uniforme verdeling zijn ook andere verdelingen voor de vraag van het eindproduct mogelijk. Bagchi en Gutierrez (1992) gebruiken in hun artikel een exponentiële, respectievelijk geometrische verdeling voor de vraag van het eindproduct. Eynan (1996) gebruikt een normale verdeling in een numeriek voorbeeld, doordat er bij een normale verdeling geen expliciete oplossing te geven valt. Andere verdelingen worden in hoofdstuk 4 van dit afstudeerwerkstuk besproken.

³ Met behulp van de verklaarde variabelen en aanname 1 op bladzijde 10 wordt ASL als volgt gedefinieerd: $ASL = P(D_1 \leq S_3) * P(D_2 \leq S_6)$. ASL is dus de kans dat de vraag naar eindproduct 1 kleiner is dan de vraag naar de componenten nodig voor eindproduct 1 EN dat de vraag naar eindproduct 2 kleiner is dan de vraag naar de componenten nodig voor eindproduct 2.

⁴ Een ander servicecriterium is om gebruik te maken van individuele serviceniveaus voor elk eindproduct. Dit gebeurt in hoofdstuk 5. Verder wordt in de in dit afstudeerwerkstuk gebruikte modellen uitgegaan van een oneindige opslagcapaciteit. Gerchak en Henig (1989) breiden hun model uit door het toevoegen van een voorwaarde voor de opslagcapaciteit van de componenten. In paragraaf 7.5 van dit afstudeerwerkstuk zal hier kort op ingegaan worden.

3. ASL is vanwege het uniform verdeeld zijn van de vraag van de beide eindproducten bij range 1 gedefinieerd als: $ASL = S_3 S_6 / b_1 b_2 = (\beta)^5$. Doordat het bedrijf de kosten wil minimaliseren zal nooit meer voorraad aangehouden worden dan noodzakelijk is om aan het vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau β te voldoen. ASL is nu dus gelijk aan het vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau β .

Hierna ontstaat het volgende model:

$$\text{Min } T_{BO} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{o.v.d. } \beta = S_3 S_6 / b_1 b_2$$

$$S_3, S_6 \geq 0$$

Bij het berekenen van de oplossing van het Basis Model BO kunnen een viertal situaties onderscheiden worden. Deze worden weergegeven op de volgende vier tekeningen:

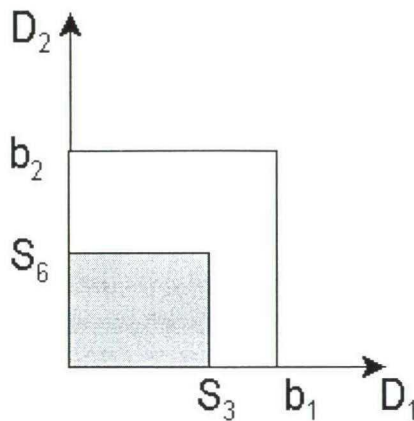


Fig. 2: Basis Model BO (Range 1)

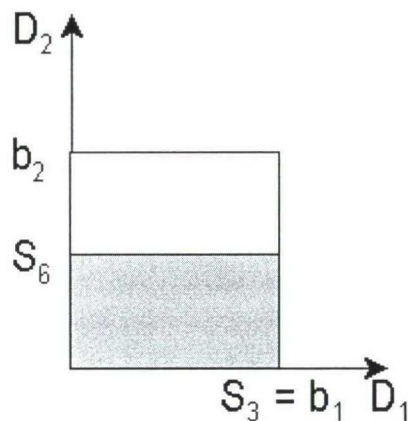


Fig. 3: Basis Model BO (Range 2A)

⁵ $ASL(\text{Range 1}) = P(D_1 \leq S_3) * P(D_2 \leq S_6) = \int_0^{S_3} (1/b_1) dx * \int_0^{S_6} (1/b_2) dy = S_3/b_1 * S_6/b_2$.

Uit figuur 2 valt op te maken dat ASL als volgt te definiëren is:

ASL = Oppervlakte donker gebied / Oppervlakte totaal toegestaan gebied.

Bij range 2A geldt $ASL = S_6/b_2$, bij range 2B geldt $ASL = S_3/b_1$ en bij range 3 geldt $ASL = 1$.

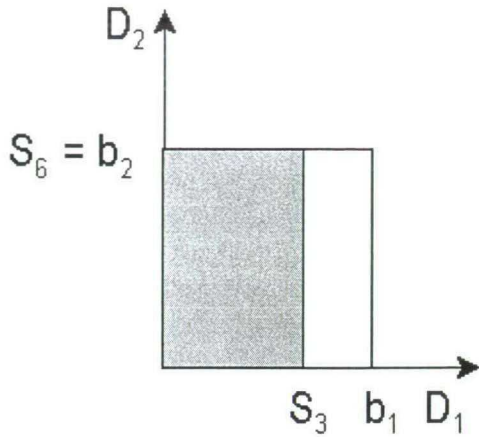


Fig. 4: Basis Model BO (Range 2B)

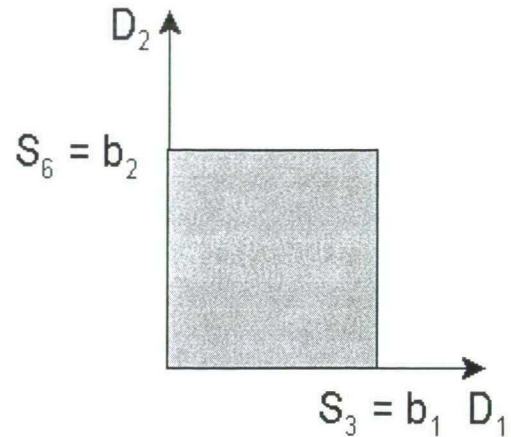


Fig. 5: Basis Model BO (Range 3)

Op basis van de figuren 2 tot en met 5 kunnen voor de vier ranges de volgende voorwaarden worden afgeleid:

Range 1: $S_3 < b_1$ en $S_6 < b_2$ (Fig. 2)

Range 2A: $S_3 = b_1$ en $S_6 < b_2$ (Fig. 3)

Range 2B: $S_3 < b_1$ en $S_6 = b_2$ (Fig. 4)

Range 3: $S_3 = b_1$ en $S_6 = b_2$ (Fig. 5)

Om het Basis Model BO op te lossen zijn er een tweetal methodes, die allebei tot dezelfde oplossing leiden, deze zullen in appendix A.1 besproken worden.

Tabel 1: Resultaten van het Basis Model BO

$$\text{Range 1: } S_3 = \sqrt{\beta b_1 b_2 \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)}}, S_6 = \sqrt{\beta b_1 b_2 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}}$$

$$T_{BO} = 2\sqrt{\beta b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}$$

$$\beta \geq 0 \text{ en } \beta < \min\left(\frac{b_1(c_3 + c_4)}{b_2(c_5 + c_6)}, \frac{b_2(c_5 + c_6)}{b_1(c_3 + c_4)}\right)$$

$$\text{Range 2A: } S_3 = b_1, S_6 = \beta b_2, T_{BO} = b_1(c_3 + c_4) + \beta b_2(c_5 + c_6)$$

$$\beta \geq \frac{b_1(c_3 + c_4)}{b_2(c_5 + c_6)} \text{ en } \beta < 1$$

$$\text{Range 2B: } S_3 = \beta b_1, S_6 = b_2, T_{BO} = \beta b_1(c_3 + c_4) + b_2(c_5 + c_6)$$

$$\beta \geq \frac{b_2(c_5 + c_6)}{b_1(c_3 + c_4)} \text{ en } \beta < 1$$

$$\text{Range 3: } S_3 = b_1, S_6 = b_2, T_{BO} = b_1(c_3 + c_4) + b_2(c_5 + c_6) \text{ en } \beta = 1$$

Berekeningen met het Basis Model BO vinden als volgt plaats:⁶

⁶ In paragraaf 3.1 zal een kostenvergelijking gemaakt gaan worden tussen de vier modellen die in hoofdstuk 2 besproken zijn. Hieruit zal dan volgen onder welke voorwaarden een bepaald model goedkoper is dan een ander model. Een vergelijking van de voorraadniveaus van de verschillende componenten tussen de vier modellen uit hoofdstuk 2 zal hier niet besproken worden. In de praktijk zal de aandacht namelijk vooral uitgaan naar de totale kosten en niet naar de voorraadniveaus (en dus kosten) van de verschillende componenten. In paragraaf 7.3 zal dit wel even kort aan bod komen.

1. De waarden van b_1 , b_2 , c_3 , c_4 , c_5 en c_6 zijn bekend.
2. Het serviceniveau β (getal tussen 0 en 1) wordt gekozen.
3. Met behulp van de onder 1 en 2 gegeven waarden wordt de geldige range bepaald.
4. De waarden van 1 en 2 worden in de geldige range in de formules van S_3 en S_6 ingevuld.
5. De totale kosten van het Basis Model BO worden berekend.

Met behulp van het bovenstaande model kan een bedrijf bij een gegeven uniforme verdeling van de vraag en bij gegeven kostencomponenten bepalen hoeveel het van elk van de componenten in voorraad moet hebben om aan een bepaald serviceniveau te voldoen.

Voorbeeld 1: $b_1 = 500$, $b_2 = 800$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$, $c_5 = 3$ en $c_6 = 2$

1. De waarden van b_1 , b_2 , c_3 , c_4 , c_5 en c_6 zijn gegeven.
2. Voor β wordt de waarde 0.8 gekozen.
3. Bij range 1 moet gelden: $\beta \geq 0$ en $\beta < \min(0.875, 1.143)$. Hieraan is voldaan dus range 1 is de geldige range.
4. $S_3 = \sqrt{\beta b_1 b_2 \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)}} = 478$ en $S_6 = \sqrt{\beta b_1 b_2 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}} = 669$
5. $T_{BO} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 = 6691$

Basis Model BO ($\beta = 0.8$)		Basis Model BO ($\beta = 0.98$)	
$S_3 = S_4$	478	$S_3 = S_4$	500
$S_5 = S_6$	669	$S_5 = S_6$	784
Kosten	6691	Kosten	7420

Voorbeeld 2: $b_1 = 500$, $b_2 = 800$, $c_3 = 6$, $c_4 = 5$, $c_5 = 6$ en $c_6 = 3$

Basis Model BO ($\beta = 0.8$)		Basis Model BO ($\beta = 0.98$)	
$S_3 = S_4$	500	$S_3 = S_4$	500
$S_5 = S_6$	640	$S_5 = S_6$	784
Kosten	11260	Kosten	12556

2.2 Het Commonality Model CO⁷

Het Commonality Model CO is de eerste van drie varianten (Het Flexible Product Model FO volgt in paragraaf 2.3 en het Double Commonality Model DO in paragraaf 2.4) waarin ten opzichte van het Basis Model BO uit paragraaf 2.1 specifieke componenten door gezamenlijke componenten vervangen worden. Zoals in hoofdstuk 3 bewezen zal worden geldt onder bepaalde voorwaarden, dat deze vervanging van componenten tot kostenbesparingen leidt.

⁷ In Eynan (1996) en de paragrafen 3.3 t/m 3.5 van Van der Zanden (2001) wordt een Commonality Model besproken, met dezelfde aannamen, waarbij de vraag van de eindproducten gecorreleerd is.

In het Commonality Model CO worden een tweetal eindproducten samengesteld. Eindproduct 1 bestaat uit één component 3 en één component 7. Eindproduct 2 wordt samengesteld uit één component 6 en één component 7. Component 7 is nu de gezamenlijke component. Deze vervangt voor eindproduct 1 (2) component 4 (5). Figuur 6 geeft dit schematisch weer:

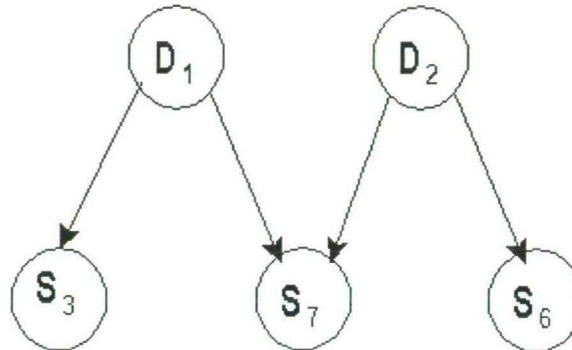


Fig. 6: Schematische weergave van het Commonality Model CO

Voor dit model gelden de volgende aannamen:

1. De vraag van beide eindproducten is uniform verdeeld;
 - De vraag van eindproduct 1 voor één periode (D_1) is $U(0, b_1)$ verdeeld.
 - De vraag van eindproduct 2 voor één periode (D_2) is $U(0, b_2)$ verdeeld.
2. Voor de kosten van de componenten geldt: $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$. De gezamenlijke component is dus duurder dan ieder van de twee afzonderlijke componenten, die hij vervangt. Dit is een realistische aanname, aangezien de gezamenlijke component, de eigenschappen van beide componenten die hij vervangt moet hebben. In het geval dat de gezamenlijke component goedkoper is dan elk van de afzonderlijke componenten geldt dat de gezamenlijke component altijd moet worden gebruikt.
3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld geaggregeerd serviceniveau β met een waarde tussen 0 en 1. Dit serviceniveau wordt gedefinieerd als de kans dat aan de gezamenlijke vraag van beide eindproducten kan worden voldaan. Aan het serviceniveau wordt voldaan als geldt dat: $ASL \geq \beta$. ASL is hierbij het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau.

In het Commonality Model CO zullen nu de kosten geminimaliseerd gaan worden onder de voorwaarde dat het vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau β gehaald zal worden:

$$\text{Min } T_{CO} = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7$$

$$\begin{aligned} \text{o.v.d.}^8 \text{ ASL} &= \beta \\ S_3, S_6, S_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

⁸ Bij alle ranges is het toegestane gebied het vierkant $b_1 b_2$. Bij range 1 geldt $ASL = [S_3 S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_7)^2] / b_1 b_2$. Bij range 2A geldt $ASL = [b_1 S_6 - 0.5(b_1 + S_6 - S_7)^2] / b_1 b_2$. Bij range 2B geldt $ASL = [S_3 b_2 - 0.5(S_3 + b_2 - S_7)^2] / b_1 b_2$ en bij range 3 geldt $ASL = [b_1 b_2 - 0.5(b_1 + b_2 - S_7)^2] / b_1 b_2$.

Bij het Commonality Model met ongecorreleerde vraag zijn er een viertal situaties, die door de volgende tekeningen geïllustreerd worden:

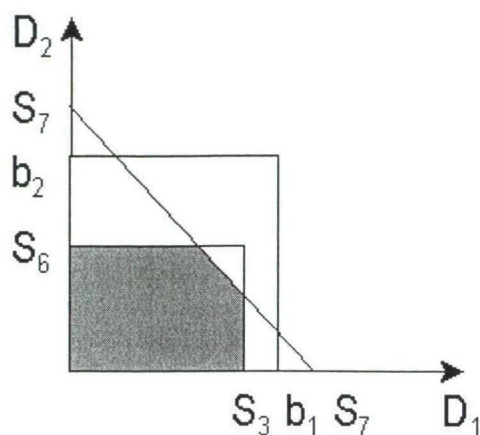


Fig. 7: CO model (Range 1)

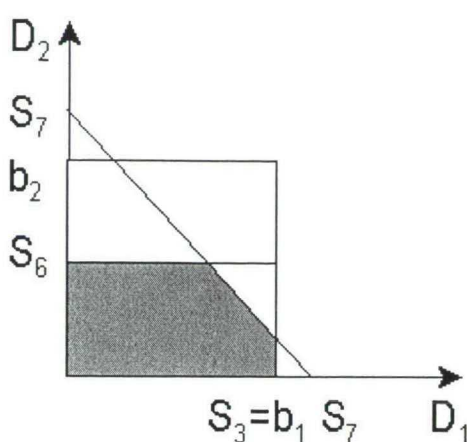


Fig. 8: CO model (Range 2A)

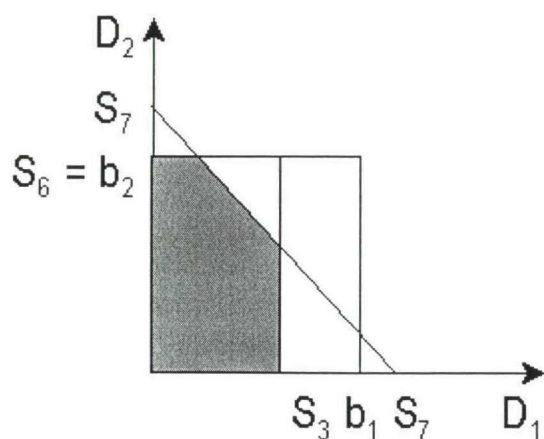


Fig. 9: CO model (Range 2B)

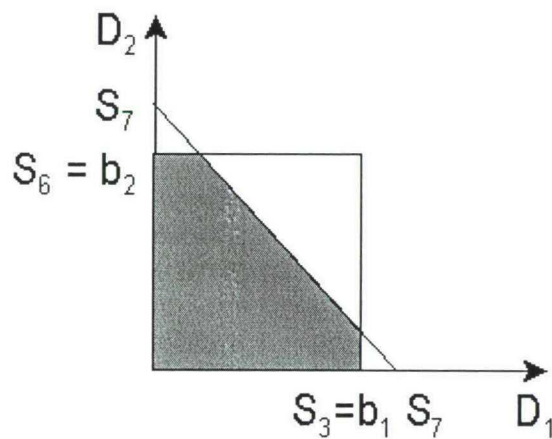


Fig. 10: CO model (Range 3)

Hieruit volgen de volgende voorwaarden voor de vier ranges:

- | | |
|--------------------------------------|-----------|
| Range 1: $S_3 < b_1$ en $S_6 < b_2$ | (Fig. 7) |
| Range 2A: $S_3 = b_1$ en $S_6 < b_2$ | (Fig. 8) |
| Range 2B: $S_3 < b_1$ en $S_6 = b_2$ | (Fig. 9) |
| Range 3: $S_3 = b_1$ en $S_6 = b_2$ | (Fig. 10) |

Aanvullende voorwaarde:

Voor het Commonality Model CO geldt nog een aanvullende voorwaarde. Uit bovenstaande figuren valt namelijk af te leiden, dat als S_3 en S_6 relatief klein zijn, de waarde van S_7 niet gedefinieerd is. De extra voorwaarde is nu dat het vierkant S_3S_6 de lijn S_7 moet snijden. Dit is het geval als $S_3 + S_6 - S_7 > 0$ is. De analyse van het model vindt in eerste instantie zonder deze extra voorwaarde plaats. De oplossing van het Commonality Model CO wordt uitgebreid afgeleid in appendix A van Van der Zanden (2001). Hierbij wordt ook deze voorwaarde gecontroleerd. Na controle van deze voorwaarde blijkt dat hieraan in alle ranges wordt voldaan.

Tabel 2: Resultaten van het Commonality Model CO

Range 1: $S_3 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_6 + c_7)/a$, $S_6 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_3 + c_7)/a$
 $S_7 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_3 + c_6 + c_7)/a$, $a = \sqrt{(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - 0.5c_7^2}$
 $T_{CO} = 2a\sqrt{\beta b_1 b_2}$
 $\beta < \min \left[\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2, \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2 \right]$ en $\beta \geq 0$

Range 2A:⁹ $S_3 = b_1$, $S_6 = \frac{c_7^2 b_1}{2(c_6 + c_7)^2} + \beta b_2$, $S_7 = \left[\frac{c_6^2}{2(c_6 + c_7)^2} + 0.5 \right] b_1 + \beta b_2$
 $T_{CO} = a^2 b_1 / (c_6 + c_7) + \beta b_2 (c_6 + c_7)$
 $\beta < 1 - \frac{b_1}{b_2} * \frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2}$ en $\beta \geq \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2$

Range 2B: $S_3 = \beta b_1 + \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)^2}$, $S_6 = b_2$, $S_7 = \beta b_1 + \left[\frac{c_3^2}{2(c_3 + c_7)^2} + 0.5 \right] b_2$
 $T_{CO} = \beta b_1 (c_3 + c_7) + a^2 b_2 / (c_3 + c_7)$
 $\beta < 1 - \frac{b_2}{b_1} * \frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)^2}$ en $\beta \geq \frac{b_2}{b_1} * \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2$

Range 3: $S_3 = b_1$, $S_6 = b_2$, $S_7 = b_1 + b_2 - \sqrt{2(1-\beta)b_1 b_2}$
 $T_{CO} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7 \sqrt{2(1-\beta)b_1 b_2}$
 $\beta \leq 1$ en $\beta \geq \max \left(1 - \frac{b_2}{b_1} * \frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)^2}, 1 - \frac{b_1}{b_2} * \frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2} \right)$

Voorbeeld 1: $b_1 = 500$, $b_2 = 800$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$, $c_5 = 3$, $c_6 = 2$ en $c_7 = 5$

1. De waarden van b_1 , b_2 , c_3 , c_6 en c_7 zijn gegeven.
2. Voor β wordt de waarde 0.8 gekozen.
3. Bij range 1 moet gelden: $\beta \geq 0$ en $\beta < \min(0.28, 0.5625)$. Hieraan is niet voldaan dus range 1 is geen geldige range.
 Bij range 2A moet gelden: $\beta \geq 0.28$ en $\beta < 0.84$. Range 2A is dus de geldige range.
4. $S_3 = b_1 = 500$, $S_6 = \frac{c_7^2 b_1}{2(c_6 + c_7)^2} + \beta b_2 = 767$ en
 $S_7 = \left[\frac{c_6^2}{2(c_6 + c_7)^2} + 0.5 \right] b_1 + \beta b_2 = 910$
5. $T_{CO} = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7 = 7584$

⁹ Hillier (1999) geeft dezelfde uitkomst voor S_7 als Eynan en Rosenblatt (1996), maar schrijft de term anders op. In appendix A.2 is hier een afleiding van terug te vinden.

Basis Model BO ($\beta = 0.8$)		Commonality Model CO ($\beta = 0.8$)	
$S_3 = S_4$	478	S_3	500
$S_5 = S_6$	669	S_6	767
		S_7	910
Kosten	6691	Kosten	7584

Basis Model BO ($\beta = 0.98$)		Commonality Model CO ($\beta = 0.98$)	
$S_3 = S_4$	500	S_3	500
$S_5 = S_6$	784	S_6	800
		S_7	1140
Kosten	7420	Kosten	8800

Voorbeeld 2: $b_1 = 500$, $b_2 = 800$, $c_3 = 6$, $c_4 = 5$, $c_5 = 6$, $c_6 = 3$ en $c_7 = 6$

Basis Model BO ($\beta = 0.8$)		Commonality Model CO ($\beta = 0.8$)	
$S_3 = S_4$	500	S_3	500
$S_5 = S_6$	640	S_6	751
		S_7	918
Kosten	11260	Kosten	10761

Basis Model BO ($\beta = 0.98$)		Commonality Model CO ($\beta = 0.98$)	
$S_3 = S_4$	500	S_3	500
$S_5 = S_6$	784	S_6	800
		S_7	1140
Kosten	12556	Kosten	12240

Uit de bovenstaande voorbeelden kunnen de volgende conclusies worden getrokken:
10

1. Of het Commonality Model CO al of niet voordeliger is dan het Basis Model BO hangt af van de kosten van de verschillende componenten. (In paragraaf 3.1 wordt hier nader op ingegaan)
2. De voorraad van elk van de specifieke componenten (S_3 en S_6) in het Commonality Model CO is in beide voorbeelden groter of gelijk aan de voorraad van elk van deze componenten in het Basis Model BO.
3. De voorraad van de gezamenlijke component (S_7) in het Commonality Model CO is in beide voorbeelden kleiner dan de som van de voorraden van de componenten uit het Basis Model BO (S_4 en S_5), die deze component vervangt.

¹⁰ In paragraaf 3.1 zal een kostenvergelijking gemaakt gaan worden tussen de vier modellen die in hoofdstuk 2 besproken zijn. Hieruit zal dan volgen onder welke voorwaarden een bepaald model goedkoper is dan een ander model. Een vergelijking van de voorraadniveaus van de verschillende componenten tussen de vier modellen uit hoofdstuk 2 zal hier niet besproken worden. In de praktijk zal de aandacht namelijk vooral uitgaan naar de totale kosten en niet naar de voorraadniveaus (en dus kosten) van de verschillende componenten.

2.3 Het Flexible Product Model FO

Eynan en Rosenblatt (1997) bespreken in het artikel “An Analysis of Purchasing Costs as the Number of Products’ Components is Reduced” het Flexible Product Model FO. Dit model is een mix van het Basis Model BO en het Commonality Model CO. In dit model met ongecorreleerde vraag zijn er een tweetal eindproducten. Elk van deze eindproducten kan echter op een tweetal manieren gemaakt worden. Op welke manier een eindproduct gemaakt wordt heeft geen invloed op dit eindproduct zelf. Eindproduct 1 kan samengesteld worden uit één specifieke component 3 en één specifieke component 4 of uit één specifieke component 3 en één gezamenlijke component 7. Eindproduct 2 kan samengesteld worden uit één specifieke component 5 en één specifieke component 6 of uit één specifieke component 6 en één gezamenlijke component 7. Afhankelijk van de waarde van de kostencomponenten volgt nu op welke manier de eindproducten gemaakt worden:

- Alle eindproducten worden gemaakt met de Basis Model BO variant;
- Alle eindproducten worden gemaakt met de Commonality Model CO variant;
- Een deel van de eindproducten wordt gemaakt met de Basis Model BO variant en een ander deel met de Commonality Model CO variant.

Figuur 11 geeft het Flexible Product Model FO schematisch weer:

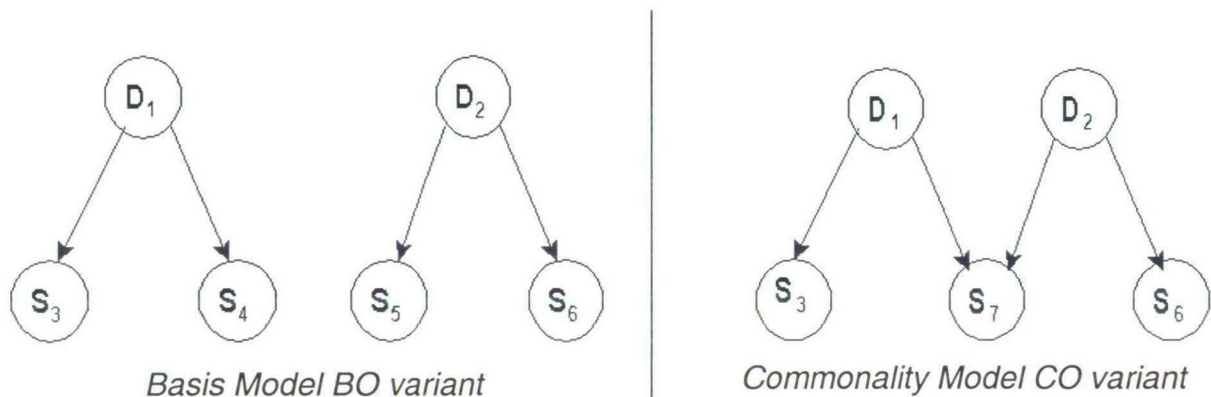


Fig.11: Productstructuren van het Flexible Product Model FO

Bij dit model horen de volgende aannames:

1. De vraag naar beide eindproducten voor één periode heeft een bivariate uniforme verdeling in het gebied $[0, b_1] \times [0, b_2]$.
2. Voor de kosten van de componenten geldt de volgende voorwaarde:
 $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$.
3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld geaggregeerd serviceniveau β met een waarde tussen 0 en 1. Dit serviceniveau wordt gedefinieerd als de kans dat aan de gezamenlijke vraag van beide eindproducten kan worden voldaan. Aan het serviceniveau wordt voldaan als geldt dat: $ASL \geq \beta$. ASL is hierbij het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau.

De optimale oplossing van het Flexible Product Model FO kan nu gevonden worden door de totale kosten van het aankopen van de componenten te minimaliseren onder

de voorwaarde dat aan het vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau β voldaan wordt:

$$\text{Min } T_{FO} = c_3S_3 + c_4S_4 + c_5S_5 + c_6S_6 + c_7S_7$$

$$\text{o.d.v. } ASL \geq \beta$$

$$S_3, S_4, S_5, S_6, S_7 \geq 0$$

Aan dit model kunnen vervolgens nog de volgende vereenvoudigingen worden opgelegd:

1. Om aan de vraag van eindproduct 1 (D_1) te voldoen wordt eerst de voorraad van component 4 (S_4) opgebruikt. Hierna zal de voorraad van de gezamenlijke component 7 (S_7) gebruikt gaan worden. Voor de vraag van eindproduct 2 (D_2) geldt dat eerst de voorraad van component 5 (S_5) opgebruikt wordt en daarna die van de gezamenlijke component 7 (S_7) wordt ingezet. In het Basis Model BO geldt dat de voorraad van de componenten 3 en 4 (5 en 6) steeds aan elkaar gelijk is. In het Flexible Product Model FO geldt dit niet meer. Component 7 kan de componenten 4 en 5 nu vervangen. Hierdoor zal de voorraad van component 4 (5) nu kleiner of gelijk zijn aan de voorraad van component 3 (6). Er geldt dus: $S_4 \leq S_3$ en $S_5 \leq S_6$.
2. De voorraad van component 3 (6) is kleiner of gelijk aan de totale voorraad van de componenten 4 (5) en 7 samen: $S_7 + S_4 \geq S_3$ en $S_7 + S_5 \geq S_6$. De maximale hoeveelheid voorraad van component 3 (6) is dus $S_4 + S_7$ ($S_5 + S_7$). Het aanhouden van een grotere hoeveelheid voorraad van component 3 (6) zal niet bijdragen aan een hoger serviceniveau.
3. De maximaal mogelijke vraag voor eindproduct 1 (2) is b_1 (b_2). Het aanhouden van een grotere voorraad van component 3 (6) dan b_1 (b_2) zal dan ook niet leiden tot een verhoging van het serviceniveau.
4. Met behulp van figuur 12 kan ASL voor range 1 gedefinieerd worden als:

$$ASL = S_3S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7)^2 = \beta b_1 b_2.$$

Uit de punten 1 tot en met 4 volgt nu het volgende aangepaste model:

$$\text{Min } T_{FO} = c_3S_3 + c_4S_4 + c_5S_5 + c_6S_6 + c_7S_7$$

$$\text{o.d.v. } ^{11}ASL = \beta$$

$$S_3 \leq b_1, S_6 \leq b_2$$

$$S_7 + S_4 \geq S_3, S_7 + S_5 \geq S_6.$$

$$S_3, S_4, S_5, S_6, S_7 \geq 0$$

De oplossing van het Flexible Product Model FO kan onderverdeeld worden in een viertal ranges:¹²

¹¹ In range 1 geldt: $ASL = [S_3S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7)^2]/\beta b_1 b_2$. Bij range 2A geldt: $ASL = [b_1S_6 - 0.5(b_1 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7)^2]/\beta b_1 b_2$. Bij range 2B geldt: $[S_3b_2 - 0.5(S_3 + b_2 - S_4 - S_5 - S_7)^2]/\beta b_1 b_2$. Bij range 3 geldt: $[b_1b_2 - 0.5(b_1 + b_2 - S_4 - S_5 - S_7)^2]/\beta b_1 b_2$.

¹² Ter verduidelijking van de tekening worden bij de figuren 12 t/m 15 de volgende extra "variabelen" gedefinieerd: $a = S_4 + S_5 + S_7$, $b = S_5 + S_7$ en $c = S_4 + S_7$.

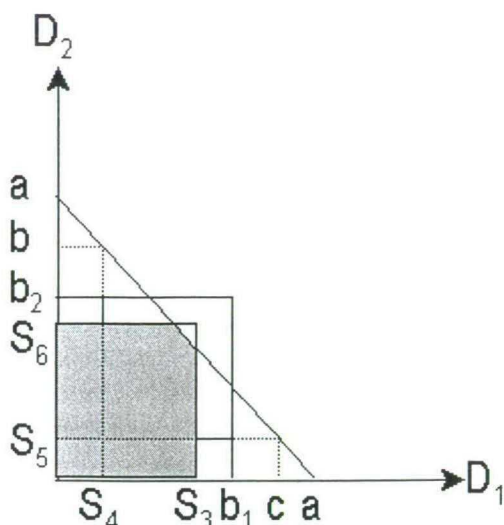


Fig. 12: FO model (Range 1)

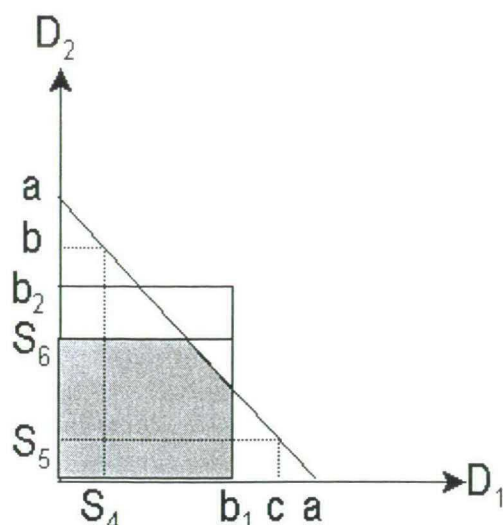


Fig. 13: FO model (Range 2A)

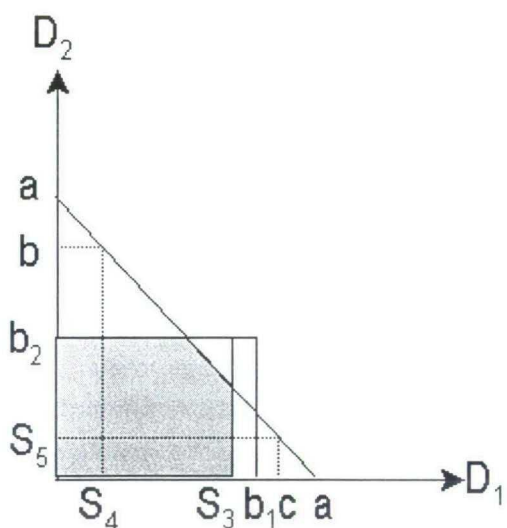


Fig. 14: FO model (Range 2B)

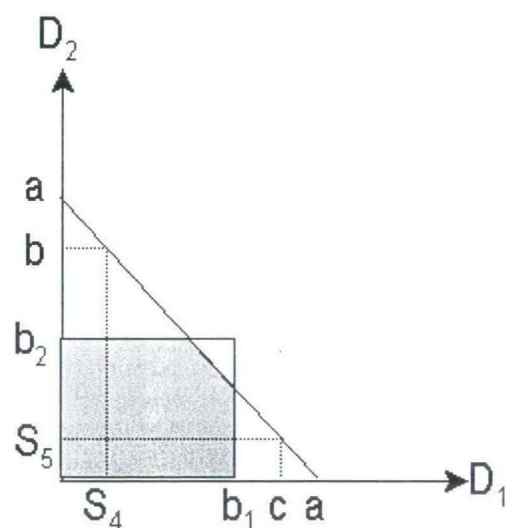


Fig. 15: FO model (Range 3)

Uit deze vier plaatjes zijn de volgende voorwaarden af te leiden:

Range 1: $S_3 < b_1$ en $S_6 < b_2$ (Fig. 12)

Range 2A: $S_3 = b_1$ en $S_6 < b_2$ (Fig. 13)

Range 2B: $S_3 < b_1$ en $S_6 = b_2$ (Fig. 14)

Range 3: $S_3 = b_1$ en $S_6 = b_2$ (Fig. 15)

Aanvullende voorwaarden:

Net als bij het Commonality Model CO geldt bij het Flexible Product Model FO dat als S_3 en S_6 relatief klein zijn, de waarde van $S_4 + S_5 + S_7$ niet gedefinieerd is. De extra voorwaarde is dat het vierkant S_3S_6 de lijn $S_4 + S_5 + S_7$ moet snijden. Deze voorwaarde wordt gecontroleerd in appendix A.3. Hieraan blijkt dan in alle ranges voldaan te zijn.

De twee ongelijkheidsvoorwaarden: $S_4 \leq S_3$ en $S_5 \leq S_6$, die onder vereenvoudiging 1 aan bod gekomen zijn, hoeven niet in de berekening van het model meegenomen te

worden. Achteraf zullen deze voorwaarden wel gecontroleerd worden. Hier blijkt dan in alle ranges aan voldaan te zijn. Deze controle vindt plaats in appendix A.3.

De twee ongelijkheidsvoorwaarden: $S_7 + S_4 \geq S_3$ en $S_7 + S_5 \geq S_6$ uit vereenvoudiging 2 moeten bij de berekening van het model worden meegenomen. Indien dit niet gebeurt, is het niet mogelijk om het model op te lossen. Nadere uitleg over dit probleem is in appendix A.3 te vinden.

Tabel 3: Resultaten van het Flexible Product Model FO

Range 1: $S_3 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_5 + c_6}{d}$, $S_4 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_6 + c_7 - c_4}{d}$,
 $S_5 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_3 + c_7 - c_5}{d}$, $S_6 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_3 + c_4}{d}$,
 $S_7 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_4 + c_5 - c_7}{d}$, $d = \sqrt{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - 0.5(c_4 + c_5 - c_7)^2}$,
 $T_{FO} = 2d\sqrt{\beta b_1 b_2}$
 met $\beta \geq 0$ en $\beta \leq \min \left[\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{d}{c_5 + c_6} \right)^2, \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{d}{c_3 + c_4} \right)^2 \right]$

Range 2A: $S_3 = b_1$, $S_4 = \frac{c_6 + c_7 - c_4}{c_5 + c_6} b_1$,
 $S_5 = \beta b_2 + \frac{c_4 + c_5 - c_7}{c_5 + c_6} \left(\frac{c_4 + c_5 - c_7}{2(c_5 + c_6)} - 1 \right) b_1$,
 $S_6 = \beta b_2 + \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_5 + c_6)^2} b_1$, $S_7 = \frac{c_4 + c_5 - c_7}{c_5 + c_6} b_1$,
 $T_{FO} = \frac{d^2}{c_5 + c_6} b_1 + (c_5 + c_6) \beta b_2$
 met $\beta > \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{d}{c_5 + c_6} \right)^2$ en $\beta \leq 1 - \frac{b_1}{b_2} \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_5 + c_6)^2}$

Range 2B: $S_3 = \beta b_1 + \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_3 + c_4)^2} b_2$, $S_4 = \beta b_1 + \frac{c_4 + c_5 - c_7}{c_3 + c_4} \left(\frac{c_4 + c_5 - c_7}{2(c_3 + c_4)} - 1 \right) b_2$,
 $S_5 = \frac{c_3 + c_7 - c_5}{c_3 + c_4} b_2$, $S_6 = b_2$, $S_7 = \frac{c_4 + c_5 - c_7}{c_3 + c_4} b_2$,
 $T_{FO} = (c_3 + c_4) \beta b_1 + \frac{d^2}{c_3 + c_4} b_2$
 met $\beta > \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{d}{c_3 + c_4} \right)^2$ en $\beta \leq 1 - \frac{b_2}{b_1} \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_3 + c_4)^2}$

Range 3: $S_3 = b_1$, $S_4 = b_1 - \sqrt{2b_1 b_2(1 - \beta)}$, $S_5 = b_2 - \sqrt{2b_1 b_2(1 - \beta)}$, $S_6 = b_2$,
 $S_7 = \sqrt{2b_1 b_2(1 - \beta)}$
 $T_{FO} = (c_3 + c_4) b_1 + (c_5 + c_6) b_2 - (c_4 + c_5 - c_7) \sqrt{2b_1 b_2(1 - \beta)}$

$$\text{met } \beta \leq 1 \text{ en } \beta > \max \left(1 - \frac{b_1 (c_4 + c_5 - c_7)^2}{b_2 \cdot 2(c_5 + c_6)^2}, 1 - \frac{b_2 (c_4 + c_5 - c_7)^2}{b_1 \cdot 2(c_3 + c_4)^2} \right)$$

Voorbeeld 1: $b_1 = 500$, $b_2 = 800$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$, $c_5 = 3$, $c_6 = 2$ en $c_7 = 5$

1. De waarden van b_1 , b_2 , c_3 , c_4 , c_5 , c_6 en c_7 zijn gegeven.
2. Voor β wordt de waarde 0.8 gekozen.
3. Bij range 1 moet gelden: $\beta \geq 0$ en $\beta < \min(0.825, 1.078)$. Hieraan is voldaan dus range 1 is de geldige range.
4. $S_3 = \sqrt{\beta b_1 b_2} \cdot \frac{c_5 + c_6}{d} = 492$, $S_4 = \sqrt{\beta b_1 b_2} \cdot \frac{c_6 + c_7 - c_4}{d} = 295$
 $S_5 = \sqrt{\beta b_1 b_2} \cdot \frac{c_3 + c_7 - c_5}{d} = 492$, $S_6 = \sqrt{\beta b_1 b_2} \cdot \frac{c_3 + c_4}{d} = 689$
 $S_7 = \sqrt{\beta b_1 b_2} \cdot \frac{c_4 + c_5 - c_7}{d} = 197$
5. $T_{FO} = c_3 S_3 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 S_6 + c_7 S_7 = 6495$

Basis Model ($\beta = 0.8$)		Commonality Model ($\beta = 0.8$)		Flexible Model ($\beta = 0.8$)	
$S_3 = S_4$	478	S_3	500	S_3 en S_4	492 en 295
$S_5 = S_6$	669	S_6	767	S_5 en S_6	492 en 689
		S_7	910	S_7	197
Kosten	6691	Kosten	7584	Kosten	6495

Basis Model ($\beta = 0.98$)		Commonality Model ($\beta = 0.98$)		Flexible Model ($\beta = 0.98$)	
$S_3 = S_4$	500	S_3	500	S_3 en S_4	500 en 373
$S_5 = S_6$	784	S_6	800	S_5 en S_6	673 en 800
		S_7	1140	S_7	126
Kosten	7420	Kosten	8800	Kosten	7241

Voorbeeld 2: $b_1 = 500$, $b_2 = 800$, $c_3 = 6$, $c_4 = 5$, $c_5 = 6$, $c_6 = 3$ en $c_7 = 6$

Basis Model ($\beta = 0.8$)		Commonality Model ($\beta = 0.8$)		Flexible Model ($\beta = 0.8$)	
$S_3 = S_4$	500	S_3	500	S_3 en S_4	500 en 182
$S_5 = S_6$	640	S_6	751	S_5 en S_6	439 en 717
		S_7	918	S_7	278
Kosten	11260	Kosten	10761	Kosten	10363

Basis Model ($\beta = 0.98$)		Commonality Model ($\beta = 0.98$)		Flexible Model ($\beta = 0.98$)	
$S_3 = S_4$	500	S_3	500	S_3 en S_4	500 en 373
$S_5 = S_6$	784	S_6	800	S_5 en S_6	673 en 800
		S_7	1140	S_7	126
Kosten	12556	Kosten	12240	Kosten	12070

Uit deze voorbeelden kunnen de volgende conclusies getrokken worden:¹³

1. De totale kosten van het Flexible Product Model FO zijn lager dan die van het Basis Model BO en het Commonality Model CO. (In paragraaf 3.1 zal blijken dat BO en CO een speciaal geval van FO zijn, de kosten van FO zullen dus altijd lager zijn dan die van BO en CO.)
2. De voorraad van elk van de specifieke componenten (S_3 en S_6) is in het Flexible Product Model FO groter of gelijk aan de voorraad van elk van deze componenten in het Basis Model BO. T.o.v. het Commonality Model CO is de voorraad van elk van deze specifieke componenten kleiner.
3. De voorraad van elk van de specifieke componenten (S_3 en S_6) in het Flexible Product Model FO is groter dan de voorraad van elk van de corresponderende specifieke componenten (S_4 en S_5) in hetzelfde model.

2.4 Het Double Commonality Model DO¹⁴

In het Double Commonality Model (Eynan en Rosenblatt, 1996) met ongecorreleerde vraag zijn er een tweetal eindproducten. Zowel eindproduct 1 als eindproduct 2 worden samengesteld uit één component 7 en één component 8. De gezamenlijke component 7 vervangt voor eindproduct 1 component 4 en voor eindproduct 2 component 5, net zoals in het CO model. De gezamenlijke component 8 vervangt voor eindproduct 1 component 3 en voor eindproduct 2 component 6. Het model wordt in figuur 16 schematisch weergegeven:

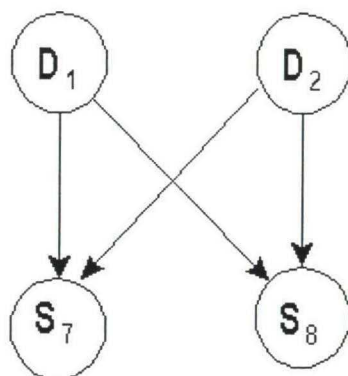


Fig. 16: Schematische weergave van het Double Commonality Model DO

Bij dit model horen de volgende aannames:

1. De vraag naar beide eindproducten voor één periode heeft een bivariate uniforme verdeling in het gebied $[0, b_1] \times [0, b_2]$.

¹³ In paragraaf 3.1 zal een kostenvergelijking gemaakt gaan worden tussen de vier modellen die in hoofdstuk 2 besproken zijn. Hieruit zal dan volgen onder welke voorwaarden een bepaald model goedkoper is dan een ander model. Een vergelijking van de voorraadniveaus van de verschillende componenten tussen de vier modellen uit hoofdstuk 2 zal hier niet besproken worden. In de praktijk zal de aandacht namelijk vooral uitgaan naar de totale kosten en niet naar de voorraadniveaus (en dus kosten) van de verschillende componenten.

¹⁴ In de paragrafen 4.3 t/m 4.5 van Van der Zanden (2001) wordt een Double Commonality Model besproken, met dezelfde aannamen, waarbij de vraag van de eindproducten gecorreleerd is.

2. Aan de kostenstructuur van de componenten worden de volgende voorwaarden opgelegd:
 $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$ en $c_8 \geq \max(c_3, c_6)$. Deze twee voorwaarden geven aan dat de gezamenlijke component steeds duurder is dan elk van de afzonderlijke componenten, die hij vervangt.
3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld geaggregeerd serviceniveau β met een waarde tussen 0 en 1. Dit serviceniveau wordt gedefinieerd als de kans dat aan de gezamenlijke vraag van beide eindproducten kan worden voldaan. Aan het serviceniveau wordt voldaan als geldt dat: $ASL \geq \beta$. ASL is hierbij het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau.

Het volgende model, waarbij de kosten geminimaliseerd worden onder de voorwaarde, dat aan het vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau β is voldaan, kan nu gedefinieerd worden:

$$\text{Min } T_{DO} = c_7 S_7 + c_8 S_8$$

$$\begin{aligned} \text{o.v.d. } &ASL \geq \beta \\ &S_7, S_8 \geq 0 \end{aligned}$$

Aan het bovenstaande model kan vervolgens de volgende vereenvoudiging worden opgelegd:

1. Voor beide eindproducten is steeds één component 7 en één component 8 nodig. In één periode geldt steeds dat de totale hoeveelheid die van component 7 nodig is, gelijk is aan de totale hoeveelheid die van component 8 nodig is. Het in voorraad hebben van ongelijke hoeveelheden van de componenten 7 en 8 leidt dus niet tot een verhoging van het serviceniveau.

$$\text{Min } T_{DO} = (c_7 + c_8) S_7$$

$$\begin{aligned} \text{o.v.d.}^{15} &ASL = \beta \\ &S_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Het Double Commonality Model DO kan onderverdeeld worden in een viertal situaties:

¹⁵ Het toegestane gebied is bij alle vier de ranges het vierkant $b_1 b_2$. Bij range 1 geldt: $ASL = S_7^2 / 2b_1 b_2$. Bij range 2A geldt: $ASL = (2S_7 - b_1) / 2b_2$. Bij range 2B geldt: $ASL = (2S_7 - b_2) / 2b_1$ en bij range 3 geldt: $ASL = 1 - (b_1 + b_2 - S_7)^2 / 2b_1 b_2$.

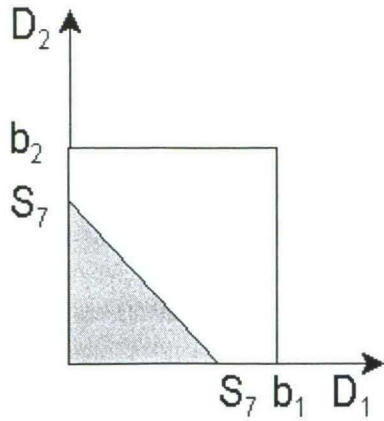


Fig. 17: DO model (Range 1)

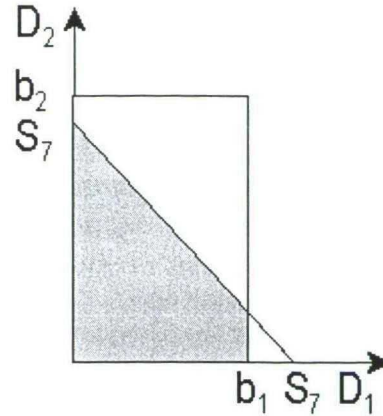


Fig. 18: DO model (Range 2A)

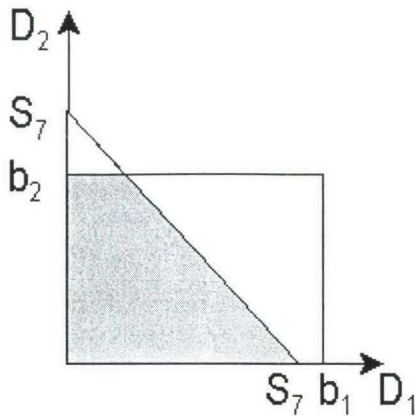


Fig. 19: DO model (Range 2B)

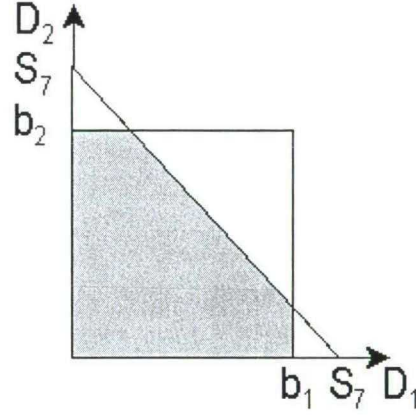


Fig. 20: DO model (Range 3)

Uit de bovenstaande vier plaatjes zijn de volgende voorwaarden af te leiden:

Range 1: $S_7 < \min(b_1, b_2)$ (Fig. 17)

Range 2A: $S_7 \geq b_1$ en $S_7 < b_2$ (Fig. 18)

Range 2B: $S_7 < b_1$ en $S_7 \geq b_2$ (Fig. 19)

Range 3: $S_7 \geq \max(b_1, b_2)$ (Fig. 20)

Tabel 4: Resultaten van het Double Commonality Model DO

Range 1: $S_7 = \sqrt{2\beta b_1 b_2}$, $T_{DO} = (c_7 + c_8) \sqrt{2\beta b_1 b_2}$
met $\beta \geq 0$ en $\beta < \min(b_1/2b_2, b_2/2b_1)$

Range 2A: $S_7 = 0.5b_1 + \beta b_2$, $T_{DO} = (c_7 + c_8)(0.5b_1 + \beta b_2)$
met $\beta \geq b_1/2b_2$ en $\beta < 1 - b_1/2b_2$

Range 2B: $S_7 = \beta b_1 + 0.5b_2$, $T_{DO} = (c_7 + c_8)(\beta b_1 + 0.5b_2)$
met $\beta \geq b_2/2b_1$ en $\beta < 1 - b_2/2b_1$

Range 3: $S_7 = b_1 + b_2 - \sqrt{2(1-\beta)b_1 b_2}$, $T_{DO} = (c_7 + c_8)(b_1 + b_2 - \sqrt{2(1-\beta)b_1 b_2})$
met $\beta \geq \max(1 - b_1/2b_2, 1 - b_2/2b_1)$ en $\beta \leq 1$

Voorbeeld 1: $b_1 = 500$, $b_2 = 800$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$, $c_5 = 3$, $c_6 = 2$, $c_7 = 5$ en $c_8 = 4$

1. De waarden van b_1 , b_2 , c_7 en c_8 zijn gegeven.
2. Voor β wordt de waarde 0.8 gekozen.
3. Bij range 1 moet gelden: $\beta \geq 0$ en $\beta < \min(0.31, 0.80)$. Hieraan is niet voldaan dus range 1 is geen geldige range.
Bij range 2A moet gelden: $\beta \geq 0.31$ en $\beta < 0.69$. Range 2A is dus geen geldige range.
Bij range 3 moet gelden: $\beta \geq \max(0.2, 0.69)$ en $\beta < 1$. Hieraan is voldaan dus range 3 is geldig.
4. $S_7 = b_1 + b_2 - \sqrt{2(1-\beta)b_1b_2} = 1140$
5. $T_{DO} = (c_7 + c_8)S_7 = 10260$

Basis Model BO ($\beta = 0.8$)		Double Comm. Model DO ($\beta = 0.8$)	
$S_3 = S_4$	478		
$S_5 = S_6$	669		
		$S_7 = S_8$	1140
Kosten	6691	Kosten	10260

Basis Model BO ($\beta = 0.98$)		Double Comm. Model DO ($\beta = 0.98$)	
$S_3 = S_4$	500		
$S_5 = S_6$	784		
		$S_7 = S_8$	1174
Kosten	7420	Kosten	10562

Voorbeeld 2: $b_1 = 500$, $b_2 = 800$, $c_3 = 6$, $c_4 = 5$, $c_5 = 6$, $c_6 = 3$, $c_7 = 6$ en $c_8 = 6$

Basis Model BO ($\beta = 0.8$)		Double Comm. Model CO ($\beta = 0.8$)	
$S_3 = S_4$	500		
$S_5 = S_6$	640		
		$S_7 = S_8$	918
Kosten	11260	Kosten	11016

Basis Model BO ($\beta = 0.98$)		Double Comm. Model CO ($\beta = 0.98$)	
$S_3 = S_4$	500		
$S_5 = S_6$	784		
		$S_7 = S_8$	1140
Kosten	12556	Kosten	12240

Uit de bovenstaande tabellen kunnen de volgende conclusies worden getrokken:¹⁶

¹⁶ In paragraaf 3.1 zal een kostenvergelijking gemaakt gaan worden tussen de vier modellen die in hoofdstuk 2 besproken zijn. Hieruit zal dan volgen onder welke voorwaarden een bepaald model goedkoper is dan een ander model. Een vergelijking van de voorraadniveaus van de verschillende componenten tussen de vier modellen uit hoofdstuk 2 zal hier niet besproken worden. In de praktijk zal de aandacht namelijk vooral uitgaan naar de totale kosten en niet naar de voorraadniveaus (en dus kosten) van de verschillende componenten.

1. Ook bij de vergelijking van het Basis Model BO en het Double Commonality Model DO hangt het van de kosten van de componenten af of een bepaald model al of niet goedkoper is. (In paragraaf 3.1 wordt hierop nader ingegaan)
2. De voorraad van de componenten 7 en 8 in het Double Commonality Model DO is kleiner dan de som van de hoeveelheid voorraad van de componenten uit het Basis Model BO ($[S_4 \text{ en } S_5]$ en $[S_3 \text{ en } S_6]$), die deze componenten vervangen.

2.5 BO, CO en DO met meer componenten

Basis Model BOM:

In het Basis Model BOM zijn er 2 eindproducten: Eindproduct 1 wordt samengesteld uit M componenten (die alle een gelijk voorraadniveau hebben: $S_1 = \dots = S_M = S$). Eindproduct 2 wordt samengesteld uit N componenten (die alle een gelijk voorraadniveau hebben: $T_1 = \dots = T_N = T$). Voor het Basis Model BOM gelden dezelfde drie aannamen en vereenvoudigingen als bij het Basis Model BO. Hierdoor ontstaat het volgende model:

$$\text{Min } T_{\text{BOM}} = S \sum_{i=1}^M c_i + T \sum_{i=1}^N d_i$$

$$\text{o.d.v. } \begin{aligned} \text{ASL} &\geq \beta \\ S, T &\geq 0 \end{aligned}$$

Met: c_i = kosten van de componenten behorende bij eindproduct 1 ($i = 1, \dots, M$)
 d_i = kosten van de componenten behorende bij eindproduct 2 ($i = 1, \dots, N$)

Dit model kan vervolgens op dezelfde wijze als het Basis Model BO worden opgelost. Hieruit volgen dan de volgende resultaten:

Tabel 5: Resultaten van het Basis Model BOM

$$\text{Range 1: } S = \sqrt{\beta b_1 b_2 \frac{\sum_{i=1}^N d_i}{\sum_{i=1}^M c_i}}, T = \sqrt{\beta b_1 b_2 \frac{\sum_{i=1}^M c_i}{\sum_{i=1}^N d_i}}$$

$$\beta \geq 0 \text{ en } \beta < \min \left(\frac{b_1 \sum_{i=1}^M c_i}{b_2 \sum_{i=1}^N d_i}, \frac{b_2 \sum_{i=1}^N d_i}{b_1 \sum_{i=1}^M c_i} \right)$$

$$\text{Range 2A: } S = b_1, T = \beta b_2 \text{ met } \beta \geq \frac{b_1 \sum_{i=1}^M c_i}{b_2 \sum_{i=1}^N d_i} \text{ en } \beta < 1$$

$$\text{Range 2B: } S = \beta b_1, T = b_2 \text{ met } \beta \geq \frac{b_2 \sum_{i=1}^N d_i}{b_1 \sum_{i=1}^M c_i} \text{ en } \beta < 1$$

$$\text{Range 3: } S = b_1, T = b_2 \text{ en } \beta = 1$$

Uit een vergelijking met de uitkomsten van het Basis Model BO (tabel 1 uit § 2.1) volgt dat de oplossing van het Basis Model BOM eenvoudig gevonden kan worden uit die van het Basis Model BO. In de oplossing van het Basis Model BO moet dan

voor $c_3 + c_4$ het volgende worden ingevuld: $\sum_{i=1}^M c_i$; $c_5 + c_6$ moet vervangen worden door $\sum_{i=1}^N d_i$.

Voorbeeld: $b_1 = 500$, $b_2 = 800$, $\sum c_i = 7$, $\sum d_i = 5$

Aangezien nu geldt dat $\sum_{i=1}^M c_i (\sum_{i=1}^N d_i)$ gelijk is aan $c_3 + c_4 (c_5 + c_6)$ van voorbeeld 1 uit paragraaf 2.1 geldt nu dat de oplossing van het Basis Model BO en het Basis Model BOM aan elkaar gelijk zijn.

Commonality Model COM :

In het Commonality Model COM zijn er 2 eindproducten: Eindproduct 1 wordt samengesteld uit M afzonderlijke componenten. Eindproduct 2 wordt samengesteld uit N afzonderlijke componenten. Verder zijn voor allebei de eindproducten ook nog eens R gezamenlijke componenten (die alle een gelijk voorraadniveau hebben $C_1 = \dots = C_R = C$) nodig. Voor het Commonality Model COM gelden dezelfde drie aannamen als bij het Commonality Model CO. Hierdoor ontstaat het volgende model:

$$\text{Min } T_{\text{COM}} = S \sum_{i=1}^M c_i + T \sum_{i=1}^N d_i + C \sum_{i=1}^R e_i$$

$$\begin{aligned} \text{o.d.v. } \beta &= (ST - 0.5(S + T - C)^2) / b_1 b_2 \\ C, S, T &\geq 0 \end{aligned}$$

Met e_i = kosten van de gezamenlijke component i ($i = 1, \dots, R$)

Oplossen van dit model gaat op dezelfde wijze als bij het Commonality Model CO.

Tabel 6: Resultaten van het Commonality Model COM

$$\textbf{Range 1: } S = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (\sum_{i=1}^N d_i + \sum_{i=1}^R e_i) / a, T = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (\sum_{i=1}^M c_i + \sum_{i=1}^R e_i) / a$$

$$C = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (\sum_{i=1}^M c_i + \sum_{i=1}^N d_i + \sum_{i=1}^R e_i) / a,$$

$$a = \sqrt{(\sum_{i=1}^M c_i + \sum_{i=1}^R e_i)(\sum_{i=1}^N d_i + \sum_{i=1}^R e_i) - 0.5(\sum_{i=1}^R e_i)^2}$$

$$\beta < \min \left[\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{a}{\sum_{i=1}^N d_i + \sum_{i=1}^R e_i} \right)^2, \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{a}{\sum_{i=1}^M c_i + \sum_{i=1}^R e_i} \right)^2 \right] \text{ en } \beta \geq 0$$

$$\textbf{Range 2A: } S = b_1, T = \frac{(\sum_{i=1}^R e_i)^2 b_1}{2(\sum_{i=1}^N d_i + \sum_{i=1}^R e_i)^2} + \beta b_2$$

$$C = \left[\frac{(\sum_{i=1}^N d_i)^2}{2(\sum_{i=1}^N d_i + \sum_{i=1}^R e_i)^2} + 0.5 \right] b_1 + \beta b_2$$

$$\beta < 1 - \frac{b_1}{b_2} * \frac{(\sum_{i=1}^R e_i)^2}{2(\sum_{i=1}^N d_i + \sum_{i=1}^R e_i)^2} \text{ en } \beta \geq \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{a}{\sum_{i=1}^N d_i + \sum_{i=1}^R e_i} \right)^2$$

Range 2B: $S = \beta b_1 + \frac{(\sum_{i=1}^R e_i)^2 b_2}{2(\sum_{i=1}^M c_i + \sum_{i=1}^R e_i)^2}, T = b_2,$

$$C = \beta b_1 + \left[\frac{(\sum_{i=1}^M c_i)^2}{2(\sum_{i=1}^M c_i + \sum_{i=1}^R e_i)^2} + 0.5 \right] b_2$$

$$\beta < 1 - \frac{b_2}{b_1} * \frac{(\sum_{i=1}^R e_i)^2}{2(\sum_{i=1}^M c_i + \sum_{i=1}^R e_i)^2} \text{ en } \beta \geq \frac{b_2}{b_1} * \left(\frac{a}{\sum_{i=1}^M c_i + \sum_{i=1}^R e_i} \right)^2$$

Range 3: $S = b_1, T = b_2, C = b_1 + b_2 - \sqrt{2(1-\beta)b_1 b_2}$

$$\beta \leq 1 \text{ en}$$

$$\beta \geq \max \left(1 - \frac{b_2}{b_1} * \frac{(\sum_{i=1}^R e_i)^2}{2(\sum_{i=1}^M c_i + \sum_{i=1}^R e_i)^2}, 1 - \frac{b_1}{b_2} * \frac{(\sum_{i=1}^R e_i)^2}{2(\sum_{i=1}^N d_i + \sum_{i=1}^R e_i)^2} \right)$$

Uit een vergelijking met de uitkomsten van het Commonality Model CO (tabel 2 uit § 2.2) volgt dat de oplossing van het Commonality Model COM eenvoudig gevonden kan worden uit die van het Commonality Model CO. In de oplossing van het Commonality Model CO moet dan voor c_3 het volgende worden ingevuld: $\sum_{i=1}^M c_i$; c_6

moet vervangen worden door $\sum_{i=1}^N d_i$ en c_7 moet vervangen worden door $\sum_{i=1}^R e_i$.

Voorbeeld: $b_1 = 500, b_2 = 800, \sum_{i=1}^M c_i = 3, \sum_{i=1}^N d_i = 2 \text{ en } \sum_{i=1}^R e_i = 5$

Aangezien nu geldt dat $\sum_{i=1}^M c_i (\sum_{i=1}^N d_i) (\sum_{i=1}^R e_i)$ gelijk is aan c_3 (c_6) (c_7) van voorbeeld 2 uit paragraaf 2.2 geldt nu dat de oplossing van het Commonality Model CO en het Commonality Model COM aan elkaar gelijk zijn.

Double Commonality Model DOM:

In het Double Commonality Model DOM zijn er 2 eindproducten: Beide eindproducten worden samengesteld uit een R-tal gezamenlijke componenten. Na dezelfde voorwaarde en vereenvoudiging als bij het Double Commonality Model DO ontstaat het volgende model:

$$\text{Min } T_{\text{DOM}} = C \sum_{i=1}^R e_i$$

$$\text{o.d.v. } \text{ASL} \geq \beta \text{ en } C \geq 0$$

De uitkomsten van het Double Commonality Model DOM zijn gelijk aan die van het Double Commonality Model DO, welke terug te vinden zijn in tabel 4 uit § 2.4.

3 Kostenanalyses m.b.t. de modellen uit hoofdstuk 2

3.1 Kostenvergelijking tussen de vier modellen

In hoofdstuk 3 zullen de vier modellen, die in hoofdstuk 2 besproken zijn met elkaar vergeleken worden op kosten. Er zullen voorwaarden afgeleid worden waaronder een bepaald model goedkoper is ten opzichte van een andere model. De kostenvergelijking tussen de modellen BO, CO en DO is ook terug te vinden in Eynan en Rosenblatt (1996) hoewel het bewijs daar onvolledig is. Bij de kostenvergelijkingen in deze paragraaf zal enkel gekeken worden naar de kosten van de componenten. Dit is natuurlijk een erg beperkte vergelijking. In paragraaf 1.1 worden ook een aantal andere kosten en factoren genoemd, die bij het wisselen van model van belang zijn. Zo zal in deze paragraaf blijken dat het Flexible Product Model FO wat betreft de kosten van de componenten altijd beter zal zijn dan het Basis Model BO en het Commonality Model CO. Doordat FO echter 5 componenten heeft en BO 4 en CO 3 zal dit op andere terreinen voor het FO model tot hogere kosten leiden. Er zijn meer componenten en hierdoor worden bv. reparaties ingewikkelder. Bij het FO model zijn er ook meer verschillende componenten op voorraad nodig. Verder wordt het productieproces ingewikkelder omdat dezelfde producten in het FO model op twee manieren gemaakt kunnen worden.

Tabel 7: Kosten Basis Model BO (zie ook tabel 1 in § 2.1)

Range 1: $T_{BO} = 2\sqrt{\beta b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}$

Range 2A: $T_{BO} = b_1(c_3 + c_4) + \beta b_2(c_5 + c_6)$

Range 2B: $T_{BO} = \beta b_1(c_3 + c_4) + b_2(c_5 + c_6)$

Range 3: $T_{BO} = b_1(c_3 + c_4) + b_2(c_5 + c_6)$

Tabel 8: Kosten Commonality Model CO (zie ook tabel 2 in § 2.2)

Range 1: $T_{CO} = 2a\sqrt{\beta b_1 b_2}$ met $a = \sqrt{(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - 0.5c_7^2}$

Range 2A: $T_{CO} = a^2 b_1 / (c_6 + c_7) + (c_6 + c_7) \beta b_2$

Range 2B: $T_{CO} = (c_3 + c_7) \beta b_1 + a^2 b_2 / (c_6 + c_7)$

Range 3: $T_{CO} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7\sqrt{2(1-\beta)b_1 b_2}$

Tabel 9: Kosten Flexible Product Model FO (zie ook tabel 3 in § 2.3)

Range 1: $T_{FO} = 2d\sqrt{\beta b_1 b_2}$ met $d = \sqrt{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - 0.5(c_4 + c_5 - c_7)^2}$

Range 2A: $T_{FO} = \frac{d^2}{c_5 + c_6} b_1 + (c_5 + c_6) \beta b_2$

Range 2B: $T_{FO} = (c_3 + c_4)\beta b_1 + \frac{d^2}{c_3 + c_4}b_2$

Range 3: $T_{FO} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - (c_4 + c_5 - c_7)\sqrt{2b_1b_2(1-\beta)}$

Tabel 10: Kosten Double Commonality Model DO (zie ook tabel 4 in § 2.4)

Range 1: $T_{DO} = (c_7 + c_8)\sqrt{2\beta b_1b_2}$

Range 2A: $T_{DO} = (c_7 + c_8)(0.5b_1 + \beta b_2)$

Range 2B: $T_{DO} = (c_7 + c_8)(\beta b_1 + 0.5b_2)$

Range 3: $T_{DO} = (c_7 + c_8)(b_1 + b_2 - \sqrt{2(1-\beta)b_1b_2})$

Eigenschap 3.1.1: De kosten van het Basis Model BO (T_{BO}) zijn lager dan die van het Commonality Model CO (T_{CO}) als:

$$a^2 > (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)^{17,18}$$

De meest voor de hand liggende manier om eigenschap 3.1.1 te bewijzen, is het vergelijken van T_{BO} en T_{CO} bij de rangecombinaties die mogelijk zijn. In de praktijk is dit echter niet de snelste methode:

1. Voor het vergelijken van de twee modellen zal geen gebruik gemaakt worden van T_{BO} en T_{CO} maar van $dT_{BO}/d\beta$ en $dT_{CO}/d\beta$. Door het differentiëren naar β vallen een aantal termen zonder β uit de kostenfuncties weg en hierdoor wordt het vergelijken eenvoudiger.
2. In plaats van alle ranges te vergelijken kan eerst gekeken worden naar de rangecombinaties die zich niet voor kunnen doen. Hierdoor kan dan een kleiner aantal rangecombinaties met elkaar vergeleken worden. Door gebruik te maken van de afgeleide van de kostenfunctie naar β worden de vergelijkingen echter vrij eenvoudig. Het uitrekenen van een aantal onnodige rangecombinaties zal hierdoor minder tijd kosten dan het nagaan van de onmogelijke rangecombinaties.

Om eigenschap 3.1.1 te bewijzen, zal voor alle combinaties (4x4) van ranges van de beide modellen aangetoond moeten worden dat T_{BO} kleiner is dan T_{CO} . Het vergelijken van alle combinaties is nodig omdat in de beide modellen de ranges verschillen. Range 1 uit het Basis Model BO is dus een ander gebied dan range 1 uit het Commonality Model CO. De verschillende ranges zijn eerder al uitgedrukt als een

¹⁷ Eynan en Rosenblatt (1996) gebruiken in hun artikel een andere uitdrukking. Dit is enkel een andere schrijfwijze van de hierboven gebruikte uitdrukking.

¹⁸ Een alternatief voor eigenschap 3.1.1 is bewijzen onder welke voorwaarde de kosten van het Commonality Model CO lager zijn dan de kosten van het Basis Model BO. Hiervoor zal echter een andere manier van bewijzen moeten worden gebruikt. Zo geldt bv. bij range 2A bij CO en range 2A bij BO dat $dT_{CO}/d\beta$ altijd groter dan $dT_{BO}/d\beta$ is terwijl $dT_{CO}/d\beta < dT_{BO}/d\beta$ moet gelden om te kunnen bewijzen dat de kosten van het Commonality Model CO lager zijn dan de kosten van het Basis Model BO.

functie van β . Het bewijzen van bovenstaande eigenschap is nu mogelijk door gebruik te maken van de afgeleide van T_{BO} (en T_{CO}) naar β . Eerst moet bewezen worden dat $dT_{CO}/d\beta > dT_{BO}/d\beta$ is voor alle 16 combinaties van ranges. Dit bewijs is terug te vinden in appendix C van Van der Zanden (2001). Dit impliceert vervolgens dat de marginale kosten van model CO als functie van β altijd sneller zullen stijgen dan de marginale kosten van model BO als functie van β voor alle mogelijke combinaties van ranges. β kan enkel waarden tussen 0 en 1 aannemen. Als β de waarde 0 heeft zijn de kosten zowel in het BO als in het CO (DO en FO) model 0. De kosten van het CO model zullen echter altijd sneller stijgen, dan die van het BO model. Verder zijn de kosten als functie van β een continue variabele. Bij een overgang naar een andere range “springen” de kosten dus niet ineens een heel stuk omhoog of omlaag. Met bovenstaande gegevens is vervolgens eigenschap 3.1.1 af te leiden. Op dezelfde wijze kunnen ook de eigenschappen 3.1.2 t/m 3.1.4 worden afgeleid. Een bewijs van de eigenschappen 3.1.2 en 3.1.3 is in appendix C van Van der Zanden (2001) terug te vinden. De eigenschappen 3.1.4, 3.1.8 en 3.1.9 worden bewezen in appendix B.1 van dit afstudeerwerkstuk.

Eigenschap 3.1.2: De kosten van het Basis Model BO (T_{BO}) zijn lager dan die van het Double Commonality Model DO (T_{DO}) als:

$$c_7 + c_8 > \sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}$$

Eigenschap 3.1.3: De kosten van het Commonality Model CO (T_{CO}) zijn lager dan die van het Double Commonality Model DO (T_{DO}) als:

$$c_7 + c_8 > \sqrt{2(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - c_7^2}$$

Eigenschap 3.1.4: De kosten van het Flexible Product Model FO (T_{FO}) zijn lager dan die van het Double Commonality Model DO (T_{DO}) als:

$$c_7 + c_8 > \sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - (c_4 + c_5 - c_7)^2} = d\sqrt{2}$$

Eigenschap 3.1.5: Als $c_7 \geq c_4 + c_5$ dan is het Flexible Product Model FO gelijk aan het Basis Model BO.

In het Flexible Product Model FO moet steeds de keuze gemaakt worden tussen de componenten 4 en 5 enerzijds en 7 anderzijds. Als de kosten van component 7 groter zijn dan de gezamenlijke kosten van de componenten 4 en 5 zal component 7 niet gebruikt worden ($S_7 = 0$). Hierdoor zal de oplossing van het Flexible Product Model FO nu gelijk zijn aan die van het Basis Model BO.

Eigenschap 3.1.6: Als $c_7 = c_4 = c_5$ dan is het Flexible Product Model FO gelijk aan het Commonality Model CO.

Doordat de kosten van de gezamenlijke component gelijk zijn aan de kosten van elk van de afzonderlijke componenten, die hij vervangt, is het in alle gevallen voordelig om enkel de gezamenlijke component te gebruiken ($S_4 = 0$ en $S_5 = 0$). De oplossing van het Flexible Product Model FO zal nu gelijk zijn aan de oplossing van het Commonality Model CO.

Eigenschap 3.1.7: De kosten van het Flexible Product Model FO (T_{FO}) zijn lager dan of gelijk aan die van het Basis Model BO (T_{BO}) en het Commonality Model CO (T_{CO})

Doordat één van de oplossingen van het Flexible Product Model FO het Basis Model BO is en één andere het Commonality Model CO kunnen de voorraadkosten van het Flexible Product Model FO nooit hoger zijn, dan die van het Basis Model BO of het Commonality Model CO.

De eigenschappen 3.1.1 t/m 3.1.7 hebben laten zien dat er kostenbesparingen mogelijk zijn. Bij de eigenschappen 3.1.8 en 3.1.9 zal afgeleid worden hoe groot deze kostenbesparingen kunnen zijn. Deze eigenschappen kijken naar de volgende twee soorten besparingen:

1. De *maximale absolute besparingen* van model 1 t.o.v. model 2 zijn:
 $T_{MODEL2} - T_{MODEL1}$
2. De *maximale relatieve besparingen* van model 1 t.o.v. model 2 zijn:
 $(T_{MODEL2} - T_{MODEL1})/T_{MODEL2}$

Eigenschap 3.1.8: De nu volgende tabel geeft de maximale absolute besparingen van de besproken modellen:

Modellen	Maximale absolute besparingen
CO t.o.v. BO	$[(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - a^2] \min\left(\frac{b_2}{c_6 + c_7}, \frac{b_1}{c_3 + c_7}\right)$
DO t.o.v. BO	$\left[\frac{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{c_7 + c_8} - 0.5(c_7 + c_8)\right] \min(b_1, b_2)$
DO t.o.v. CO	$\left[\frac{a^2}{c_7 + c_8} - 0.5(c_7 + c_8)\right] \min(b_1, b_2)$
DO t.o.v. FO	$\left[\frac{d^2}{c_7 + c_8} - 0.5(c_7 + c_8)\right] \min(b_1, b_2)$

Eigenschap 3.1.9: De onderstaande tabel geeft de maximale relatieve besparingen van de besproken modellen:

Modellen	Maximale relatieve besparingen
CO t.o.v. BO	$1 - \frac{a}{\sqrt{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}}$
DO t.o.v. BO	$1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}}$
DO t.o.v. CO	$1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2}a}$
DO t.o.v. FO	$1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2}d}$

FO t.o.v. BO	$1 - \frac{d}{\sqrt{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}}$
FO t.o.v. CO	$\frac{b_1(c_7 - c_4) + b_2(c_7 - c_5)}{b_1(c_3 + c_7) + b_2(c_6 + c_7)}$

3.2 Kostenvoorbeeld met de vier modellen

In paragraaf 3.1 is een aantal eigenschappen afgeleid, waaruit volgt wanneer een bepaald model minder kosten met zich meebrengt dan een ander model. In deze paragraaf zal nader worden ingegaan op een voorbeeld waarbij de parameters van de besproken modellen in hoofdstuk 2 de volgende waarden hebben:

1. $c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c$ en $b_1 = b_2 = b$
2. $c_7 = c_8 = \alpha c$ met $\alpha \geq 1$

Allereerst zal de relatie tussen het serviceniveau (β) en de relatieve kosten van de gezamenlijke component t.o.v. de specifieke component (α) bekeken worden voor de vier modellen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de MATLAB-programma's die in appendix D zijn terug te vinden. Deze programma's berekenen voor een combinatie van β en α de kosten van steeds twee modellen.

In figuur 21 worden het Basis Model BO en het Commonality Model CO vergeleken. Indien de kosten van het Commonality Model CO hoger zijn dan die van het Basis Model BO wordt in de (β, α) grafiek een zwarte punt geplaatst. De grafiek zal nu bestaan uit een wit gedeelte waar het zinvol is het Commonality Model CO te gebruiken en een zwart gedeelte waar beter het Basis Model BO gebruikt kan worden. In figuur 22 worden het Basis Model BO en het Double Commonality Model DO vergeleken. In figuur 23 het Commonality Model CO en het Double Commonality Model DO en in figuur 24 het Double Commonality Model DO en het Flexible Product Model FO. Eynan en Rosenblatt (1996 en 1997) geven enkel figuur 21 weer.

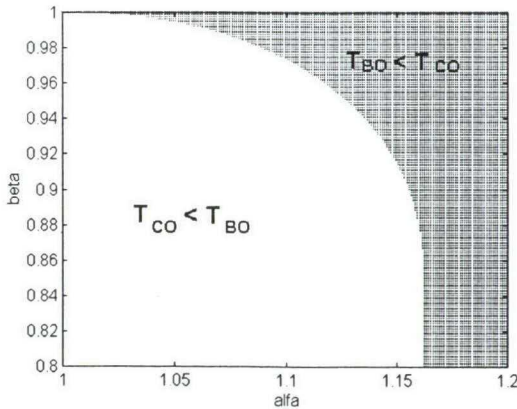


Fig. 21: (β, α) relatie voor BO en CO

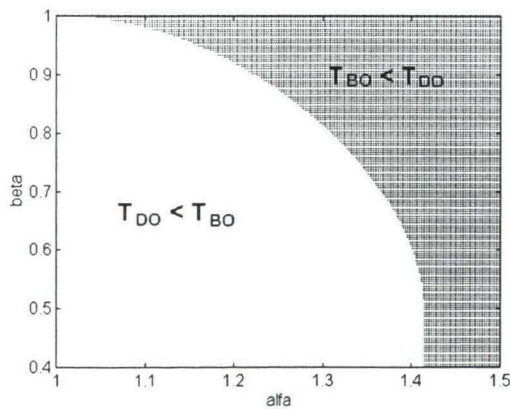


Fig. 22: (β, α) relatie voor BO en DO

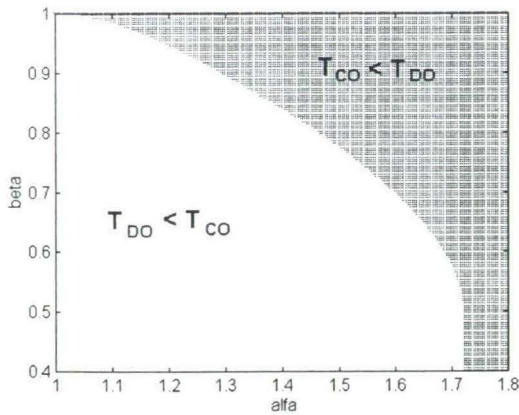


Fig. 23: (β, α) relatie voor CO en DO

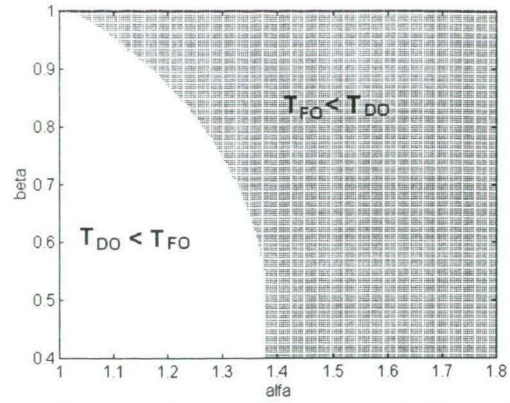


Fig.24: (β, α) relatie voor DO en FO

Uit de figuren 21 t/m 24 is een minimale waarde van α af te leiden waarboven het altijd voordeliger is een bepaald model te gebruiken. In figuur 21 ligt deze waarde rond de 1.16. Als α groter dan 1.16 is, brengt het Basis Model BO in dit geval onafhankelijk van de waarde van β altijd minder kosten met zich mee dan het Commonality Model CO. De waarde van α is echter ook expliciet af te leiden. Dit gebeurt in eigenschap 3.2.1. Verder valt uit de figuren 21 t/m 24 op te merken, dat naarmate β groter wordt het steeds minder voordelig wordt om het BO model door het CO of DO model te vervangen, het CO door het DO model te vervangen of het FO door het DO model te vervangen.

Eigenschap 3.2.1: In het geval dat $c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c$, $b_1 = b_2 = b$ en $c_7 = c_8 = \alpha c$ met $\alpha \geq 1$ geldt:

- a. $T_{CO} > T_{BO}$ als $c_7 > (\sqrt{10} - 2)c \approx 1.16c$
- b. $T_{DO} > T_{BO}$ als $c_7 > \sqrt{2}c \approx 1.41c$
- c. $T_{DO} > T_{CO}$ als $c_7 > 1.72c$
- d. $T_{DO} > T_{FO}$ als $c_7 > 1.38c$

Het bewijs van eigenschap 3.2.1 kan rechtstreeks verkregen worden uit de eigenschappen 3.1.1 t/m 3.1.4 door de bij eigenschap 3.2.1 genoemde voorwaarden hier in te vullen. De eigenschappen uit paragraaf 3.2 worden bewezen in appendix B.2.

Bij het vergelijken van het Basis Model BO en het Commonality Model CO kunnen de aan het begin van deze paragraaf genoemde eigenschappen ook nog enigszins aangepast worden. Hillier (1999) gebruikt de volgende aannames om tot figuur 25 te komen: $c_3 = c_6 = c_u$, $c_4 = c_5 = c_c$ en $b_1 = b_2 = b$. In dit geval zijn de kosten van de specifieke componenten (c_3 en c_6) aan elkaar gelijk. Dit geldt ook voor de kosten van de twee componenten (c_4 en c_5) die in het Commonality Model CO door de gezamenlijke component 7 worden vervangen. Op basis van de relatieve kosten van de specifieke componenten en de relatieve kosten van de gezamenlijke component 7 wordt nu een vergelijking gemaakt tussen het Basis Model BO en het Commonality Model CO.

Uit figuur 25 valt af te leiden, dat naarmate de kosten van de specifieke componenten t.o.v. de gezamenlijke component toenemen het steeds minder aantrekkelijk wordt om het Basis Model BO door het Commonality Model CO te

vervangen. Uit eigenschap 3.1.1 is de volgende eigenschap af te leiden waaronder Basis Model BO altijd goedkoper is dan het Commonality Model CO:

Eigenschap 3.2.2: Onder de voorwaarden $c_3 = c_6 = c_u$, $c_4 = c_5 = c_c$ en $b_1 = b_2 = b$ is het Basis Model BO altijd goedkoper dan het Commonality Model CO als geldt: $c_7 > \sqrt{4c_u^2 + 2c_c^2 + 4c_c c_u} - 2c_u$

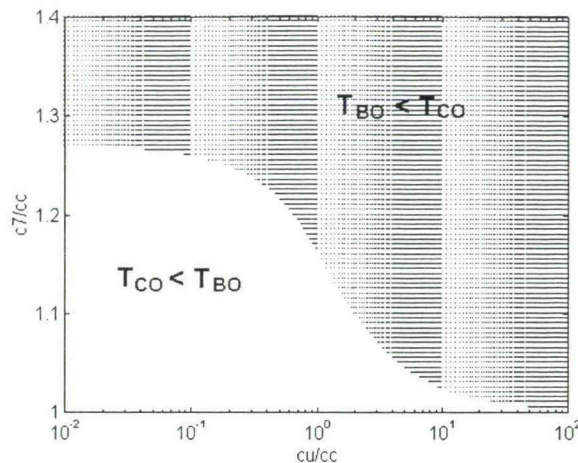


Fig. 25: Relatie tussen c_7/c_c en c_u/c_c

Met behulp van eenvoudige wiskunde wordt in appendix B.2 eigenschap 3.2.3 bewezen, die een bovengrens geeft voor de maximale relatieve besparingen op basis van eigenschap 3.1.9.

Eigenschap 3.2.3: De maximale relatieve besparingen wanneer model BO door CO vervangen wordt (BO door DO, CO door DO en FO door DO) worden begrensd door $1 - 1/\sqrt{2} \approx 29.3\%$

In het speciale geval dat $c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c$ en $c_7 = c_8$ zijn de bovengrenzen van de maximale relatieve besparingen van de verschillende modellen niet meer aan elkaar gelijk zoals bij eigenschap 3.2.3. Het bewijs van eigenschap 3.2.4 volgt door het invullen van de zojuist genoemde extra voorwaarden in eigenschap 3.1.9.

Eigenschap 3.2.4: Als $c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c$ en $c_7 = c_8$ geldt dat de maximale relatieve besparingen begrensd worden door:

- 6.5 % als BO door CO vervangen wordt.
- 29.3 % als BO door DO vervangen wordt.
- 24.4 % als CO door DO vervangen wordt.
- 24.4 % als FO door DO vervangen wordt.

4 Modellen m.b.t. standaardisatie van componenten met alternatieve verdelingen en een geaggregeerd serviceniveau

Bij de beschrijving van de vier modellen in hoofdstuk 2 is gekozen voor een uniforme verdeling van de vraag. Bij een uniforme verdeling is het namelijk mogelijk om een expliciete uitdrukking te geven van de oplossing van het model. Het grote nadeel is dat de uniforme verdeling geen goede weergave van de werkelijkheid is. In dit hoofdstuk zullen de vier modellen uit hoofdstuk 2 opnieuw geanalyseerd worden, maar nu met een exponentiële, gamma en normale vraagverdeling. Doordat nu een andere dan de uniforme verdeling gebruikt wordt, heeft dit wel tot gevolg dat er geen expliciete uitdrukkingen van de oplossing meer mogelijk zijn. Om toch een vergelijking te kunnen maken tussen de verschillende verdelingen zal in dit hoofdstuk gebruik gemaakt worden van een benadering van de oplossing met behulp van een MATLAB-programma.

4.1 Het Basis Model BO

Voor het Basis Model BO gelden de volgende aannamen en vereenvoudigingen:

1. De vraag van eindproduct 1 voor één periode (D_1) en eindproduct 2 voor één periode (D_2) hebben één van de volgende verdelingen:
 - Uniform: $D_1 \sim U(0,b)$ en $D_2 \sim U(0,b)$;
 - Exponentieel: $D_1 \sim E(2/b)$ en $D_2 \sim E(2/b)$;¹⁹
 - Gamma: $D_1 \sim \Gamma(\rho,\lambda)$ en $D_2 \sim \Gamma(\rho,\lambda)$;
Hierbij is λ de schaalparameter en ρ de vormparameter. Voor deze parameters worden de volgende waarden gebruikt: $\lambda = 6/b$ en $\rho = 3$.
Door deze waarden voor de parameters te nemen zijn gemiddelde en variantie van de gammaverdeling gelijk aan die van de uniforme en normale verdeling. Doordat de vormparameters van de twee gammaverdelingen een positief geheel getal zijn, zijn de gammaverdelingen gelijk aan een Erlang-3 verdeling, waarbij 3 de waarde van de vormparameter is. Vanaf nu zal deze verdeling dan ook als volgt weergegeven worden: Erlang: $D_1 \sim \text{Er}(3,6/b)$ en $D_2 \sim \text{Er}(3,6/b)$.
 - Normaal: $D_1 \sim N(0.5b, b^2/12)$ en $D_2 \sim N(0.5b, b^2/12)$;
Bovenstaande verdelingen hebben alle dezelfde verwachting. Verder hebben de uniforme, de Erlang en de normale verdeling ook dezelfde variantie.
2. Er worden geen restricties opgelegd aan de kosten van de componenten.
3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld geaggregeerd serviceniveau β met een waarde tussen 0 en 1. Dit serviceniveau wordt gedefinieerd als de kans dat aan de gezamenlijke vraag van beide eindproducten kan worden voldaan. Aan het serviceniveau wordt voldaan als geldt dat: $ASL \geq \beta$. ASL is hierbij het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau en is gelijk aan: $P(D_1 \leq S_3) * P(D_2 \leq S_6)$
4. Voor eindproduct 1 (2) is steeds één component 3 (5) en één component 4 (6) nodig. In de optimale oplossing zal daarom moeten gelden dat S_3 (S_5) gelijk is aan S_4 (S_6).

¹⁹ In het MATLAB-programma dat gebruikt wordt voor het simuleren van deze verdeling moet $b/2$ als parameter worden ingevuld.

5. De maximaal mogelijke vraag voor eindproduct 1 (2) is b_1 (b_2). Hierdoor geldt dat S_3 niet groter kan zijn dan b_1 en S_6 niet groter dan b_2 .

Op basis hiervan ontstaat het volgende model:

$$\text{Min } T_{BO} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\begin{aligned} \text{o.v.d. } \beta &= P(D_1 \leq S_3) * P(D_2 \leq S_6) \\ S_3, S_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Met behulp van de volgende methode wordt de oplossing van het bovenstaande model benaderd:

Benaderingsmethode:

1. Het vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau β is in het Basis Model BO als volgt gedefinieerd: $\beta = \text{ASL} = P(D_1 \leq S_3) * P(D_2 \leq S_6)$. Dit geaggregeerde serviceniveau is simpelweg de vermenigvuldiging van het serviceniveau van eindproduct 1 (SL_1) en het serviceniveau van eindproduct 2 (SL_2). Alle combinaties van SL_1 en SL_2 die gelijk zijn aan het vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau β zijn dus mogelijke oplossingen van het Basis Model BO. In deze eerste stap van de benaderingsmethode worden een groot aantal waarden van SL_1 en SL_2 bepaald zodanig dat het product van SL_1 en SL_2 gelijk is aan het vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau β .
2. Voor alle combinaties van SL_1 en SL_2 die in stap 1 bepaald zijn worden de kosten van het Basis Model BO berekend, die deze combinaties met zich meebrengen.
3. Met behulp van de in stap 2 berekende kosten kan nu de combinatie van SL_1 en SL_2 gevonden worden met minimale kosten, die (vanzelfsprekend) gelijk is aan het vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau β .

Benaderingsmethode - Getallenvoorbeeld:

$$b_1 = b_2 = 500, c_3 = 3, c_4 = 4, c_5 = 3, c_6 = 2, \beta = 0.8, \text{verdeling} = \text{uniform}.$$

Stap 1:

De volgende combinaties van SL_1 en SL_2 geven een ASL-waarde van 0.8:²⁰

$$(0.8, 1) (0.85, 0.941) (0.9, 0.889) (0.95, 0.842) (1, 0.8)$$

Stap 2:

Voordat de kosten van de combinaties van SL_1 en SL_2 uit stap 1 berekend kunnen worden moeten in deze stap eerst S_3 en S_6 berekend worden. SL_1 (of SL_2) is eenvoudigweg een realisatie van de cumulatieve verdelingsfunctie van de vraag van eindproduct 1 (of 2). S_3 (of S_6) is nu de waarde waarbij deze realisatie van de

²⁰ Om het rekenvoorbeeld wat te vereenvoudigen worden hier maar een paar combinaties van SL_1 en SL_2 weergegeven, die een ASL-waarde van 0.8 geven. In het MATLAB programma worden vanzelfsprekend een veel groter aantal combinaties gebruikt.

cumulatieve verdelingsfunctie optreedt. Invullen van S_3 (of S_6) in de cumulatieve verdelingsfunctie levert dus SL_1 (of SL_2) op.

Als SL_1 een waarde van 0.8 heeft, moet dus berekend worden voor welke S_3 geldt dat: $P(D_1 \leq S_3) = 0.8$. Berekenen geeft de volgende waarden:

SL_1	SL_2	S_3	S_6	Kosten
0.8	1	400	500	5300
0.85	0.941	425	471	5330
0.9	0.889	450	445	5375
0.95	0.842	475	421	5430
1	0.8	500	400	5500

Stap 3:

Van de vijf berekende waarden, geldt nu dat de combinatie $S_3 = 400$ en $S_6 = 500$ de laagste kosten heeft.

Benaderingsmethode - MATLAB:

De in deze paragraaf gebruikte benaderingsmethode is voor de uniforme, normale, Erlang en exponentiële verdeling uitgevoerd met behulp van MATLAB-programma's, die te vinden zijn in appendix D.²¹ De onderstaande tekeningen geven de vraagverdelingen, die gebruikt zijn weer. Hierna volgen de uitkomsten, die met behulp van de benaderingsmethode gevonden zijn:

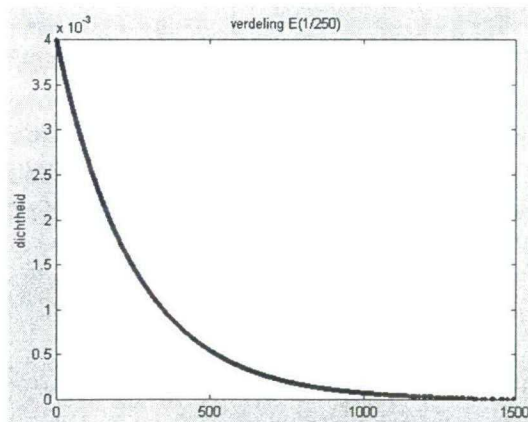


Fig. 26a: Exponentiële vraagverdeling

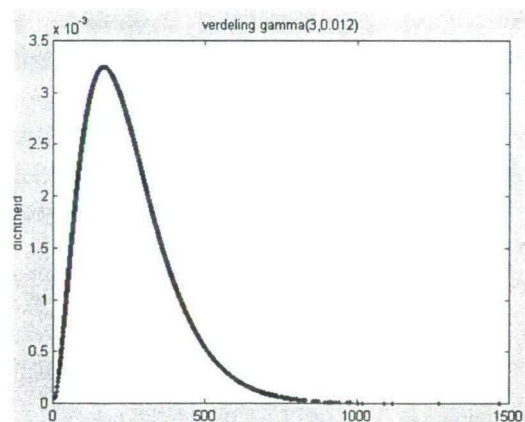


Fig. 26b: Erlang vraagverdeling

²¹ De programma's voor het Basis Model BO worden in appendix D.1 gegeven. Het Commonality Model CO in appendix D.2, het Flexible Product Model FO in appendix D.3 en het Double Commonality Model DO in appendix D.4.

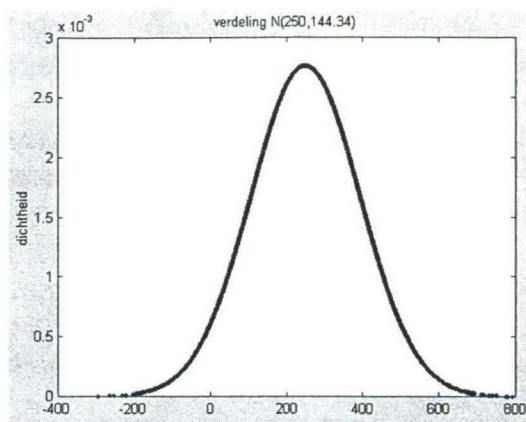


Fig. 26c: Normale vraagverdeling

Voorbeeld 1: $b_1 = b_2 = 500$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$, $c_5 = 3$ en $c_6 = 2$

Verdeling ($\beta = 0.8$)	S_3	S_6	Kosten
Uniform (Exact)	400	500	5300
Uniform (Simulatie)	400	500	5300
Exponentieel (Simulatie)	528	603	6711
Erlang (Simulatie)	419	459	5228
Normaal (Simulatie)	415	448	5145

Verdeling ($\beta = 0.98$)	S_3	S_6	Kosten
Uniform (Exact)	490	500	5930
Uniform (Simulatie)	490	500	5930
Exponentieel (Simulatie)	1112	1195	13759
Erlang (Simulatie)	683	721	8386
Normaal (Simulatie)	576	596	7012

Voorbeeld 2: $b_1 = b_2 = 500$, $c_3 = 6$, $c_4 = 5$, $c_5 = 6$ en $c_6 = 3$

Verdeling ($\beta = 0.8$)	S_3	S_6	Kosten
Uniform (Exact)	405	484	8899
Uniform (Simulatie)	405	484	8899
Exponentieel (Simulatie)	541	586	11219
Erlang (Simulatie)	426	450	8727
Normaal (Simulatie)	421	441	8600

Verdeling ($\beta = 0.98$)	S_3	S_6	Kosten
Uniform (Exact)	490	500	9890
Uniform (Simulatie)	490	500	9890
Exponentieel (Simulatie)	1128	1175	22976
Erlang (Simulatie)	689	712	13998
Normaal (Simulatie)	580	592	11704

Uit de bovenstaande tabellen valt op te maken dat numerieke benadering bij het uniforme model dezelfde oplossing geeft als de exacte berekening. Bij een β van 0.8 komen de oplossingen van de uniforme, Erlang en normale verdeling nog redelijk met elkaar overeen. Bij de hogere β van 0.98 loopt het verschil tussen de uniforme

verdeling en de andere verdelingen echter al flink op. De kosten van de uniforme verdeling blijven dan relatief laag vanwege het feit, dat deze verdeling een bovengrens kent. Van de drie andere verdelingen heeft de normale verdeling de laagste kosten. T.o.v. de Erlang en de exponentiële verdeling is de staart van deze normale verdeling het dunst. De kans op waarden ver boven het gemiddelde is hier dus relatief klein. Een nadeel van de normale verdeling is echter wel dat er kans is op negatieve vraag, iets dat in de werkelijkheid natuurlijk niet kan voorkomen. Aangezien de exponentiële verdeling de dikste staart heeft is de kans op een waarde ver boven het gemiddelde hier het grootst. De exponentiële verdeling heeft dan ook de hoogste kosten.

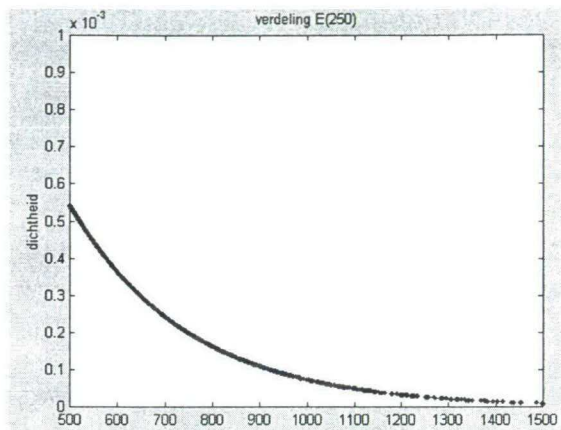


Fig. 26d: Staart bij exponentiële verdeling

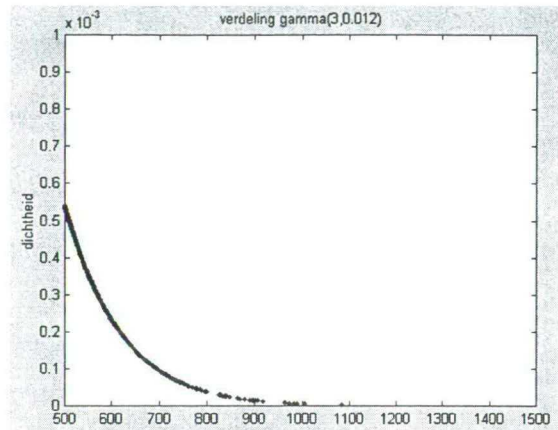


Fig. 26e: Staart bij Erlang verdeling

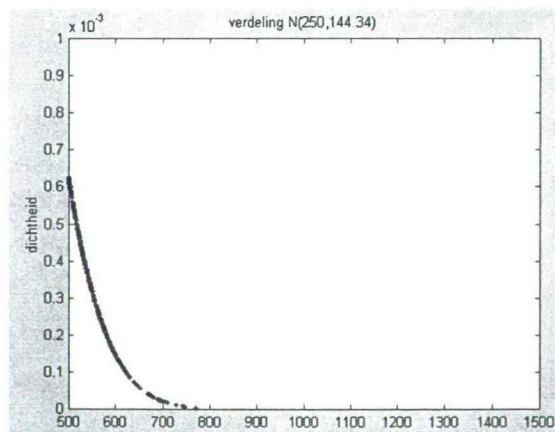


Fig. 26f: Staart bij normale verdeling

De figuren 26d t/m 26f geven voor de drie gebruikte verdelingen hun staart weer. Uit bovenstaande plaatjes is onmiddellijk op te maken dat de exponentiële verdeling de hoogste kans heeft op grote waarden (> 500) en dus de dikste staart heeft. De normale verdeling heeft de kleinste kans op relatief grote waarden.

4.2 Het Commonality Model CO

Voor het Commonality Model CO gelden de volgende aannamen en vereenvoudigingen:

1. De vraag van eindproduct 1 voor één periode (D_1) en eindproduct 2 voor één periode (D_2) hebben één van de volgende verdelingen:
 - Uniform: $D_1 \sim U(0, b)$ en $D_2 \sim U(0, b)$;
 - Exponentieel: $D_1 \sim E(b/2)$ en $D_2 \sim E(b/2)$;
 - Erlang: $D_1 \sim Er(3, 6/b)$ en $D_2 \sim Er(3, 6/b)$;
 - Normaal: $D_1 \sim N(0.5b, b^2/12)$ en $D_2 \sim N(0.5b, b^2/12)$;
2. Voor de kostencomponenten geldt de volgende voorwaarde:
 $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$.²²
3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld geaggregeerd serviceniveau β met een waarde tussen 0 en 1. Dit serviceniveau wordt gedefinieerd als de kans dat aan de gezamenlijke vraag van beide eindproducten kan worden voldaan. Aan het serviceniveau wordt voldaan als geldt dat: $ASL \geq \beta$. ASL is als volgt gedefinieerd: $ASL = P(D_1 \leq S_3, D_2 \leq S_6, D_1 + D_2 \leq S_7)$ en is het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau.

Nu ontstaat het volgende model:

$$\text{Min } T_{CO} = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7$$

$$\text{o.v.d. } \beta = P(D_1 \leq S_3, D_2 \leq S_6, D_1 + D_2 \leq S_7) \\ S_3, S_6, S_7 \geq 0$$

Benaderingsmethode:

1. Bereken een expliciete uitdrukking voor $ASL = P(D_1 \leq S_3, D_2 \leq S_6, D_1 + D_2 \leq S_7)$. Deze berekening wordt weergegeven in appendix C.1.

Exponentiële verdeling:

$$ASL = 1 - \exp(-\lambda S_6) - \exp(-\lambda S_3) - ([S_3 + S_6 - S_7]\lambda - 1)\exp(-\lambda S_7)^{23}$$

Erlangverdeling:

$$ASL = F(S_7 - S_6)F(S_6) + 0.5\lambda^3 \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} (e^{-\lambda a} a^2 - e^{-2\lambda a} a^2 - e^{-2\lambda a} a^3 \lambda - e^{-2\lambda a} 0.5a^4 \lambda^2) da$$

*Normale verdeling:*²⁴

²² De gezamenlijke component is dus duurder dan ieder van de twee afzonderlijke componenten, die hij vervangt. Dit is een realistische aanname, aangezien de gezamenlijke component, de eigenschappen van beide componenten die hij vervangt moet hebben. In het geval dat de gezamenlijke component goedkoper is dan elk van de afzonderlijke componenten geldt dat de gezamenlijke component altijd moet worden gebruikt.

²³ Bij het Commonality Model CO geldt $S_3 + S_6 - S_7 > 0$. Voor nadere uitleg zie Van der Zanden (2001) bladzijde 21. Ook geldt $\max\{S_3, S_6\} < S_7$.

²⁴ MATLAB gebruikt een eigen benadering om deze integraal te benaderen. De in dit afstudeerwerkstuk uitgelegde verdeling is eveneens in MATLAB getest en geeft (bijna) dezelfde uitkomsten. De benadering in MATLAB is het nauwkeurigst.

$$ASL = F(S_7 - S_6)F(S_6) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} \exp\{-0.5(\frac{a-\mu}{\sigma})^2\} * (\frac{1}{1 + \exp\{-\sqrt{\pi}(\beta_1 k^5 + \beta_2 k^3 + \beta_3 k)\}}) da$$

met $\mu = 0.5b$

$$\sigma^2 = b^2/12$$

$$k = (S_7 - a - 0.5b)/(b/\sqrt{12}),$$

$$\beta_1 = -0.0004406$$

$$\beta_2 = 0.0418198$$

$$\beta_3 = 0.9$$

2. Bij het Basis Model BO kon heel gemakkelijk bepaald worden voor welke combinaties van SL_1 en SL_2 (of S_3 en S_6) ASL gelijk is aan de vooraf vastgestelde waarde. Bij het Commonality Model CO is dat niet meer mogelijk. De waarde van ASL bij het Commonality Model CO hangt af van S_3 , S_6 en S_7 . Met behulp van een MATLAB programma zal deze oplossing benaderd gaan worden. De benadering van de juiste oplossing van het Commonality Model CO zal plaats vinden in twee stappen:

- 2a. In de eerste stap wordt de oplossing van het Commonality Model CO berekend door voor een beperkt aantal waarden van S_3 , S_6 en S_7 de bijbehorende kosten en ASL uit te rekenen. In het MATLAB-programma wordt allereerst voor S_3 , S_6 en S_7 een gebied gekozen waarbinnen gezocht zal gaan worden. Binnen dit gebied worden nu een beperkt aantal waarden onderzocht (Stel dat het gebied is: $[0, 1000]$ voor S_3 , $[0, 1000]$ voor S_6 en $[0, 1000]$ voor S_7 . In deze eerste stap wordt nu bv. enkel gekeken naar combinaties van S_3 , S_6 en S_7 waarbij alle drie de getallen een hondertal zijn). Hieruit volgt nu een oplossing
- 2b. In de tweede stap wordt enkel dicht in de buurt van de oplossing van de eerste stap naar een nog goedkopere combinatie van S_3 , S_6 en S_7 gezocht. (Stel nu dat $[200, 300, 400]$ de oplossing is uit de eerste stap. In de tweede stap kunnen dan de volgende gebieden onderzocht worden waarbij voor alle mogelijke combinaties van gehele getallen naar kosten en ASL gekeken wordt: $[190, 210]$ voor S_3 , $[290, 310]$ voor S_6 en $[390, 410]$ voor S_7 .)

Benaderingsmethode – MATLAB:

Voorbeeld 1: $b_1 = b_2 = 500$, $c_3 = 3$, $c_6 = 2$ en $c_7 = 5$

Verdeling ($\beta = 0.8$)	S_3	S_6	S_7	β	Kosten
Uniform (Exact)	498	500	685	0.8	5919
Uniform (Simulatie)	498	500	685	0.8001	5919
Exponentieel (Simulatie)	596	659	791	0.8	7061
Erlang (Simulatie)	539	406	725	0.8	6054
Normaal (Simulatie)	425	437	861	0.8	6454

Verdeling ($\beta = 0.98$)	S_3	S_6	S_7	β	Kosten
Uniform (Exact)	500	500	900	0.98	7000
Uniform (Simulatie)	500	500	900	0.98	7000
Exponentieel (Simulatie)	1215	1293	1525	0.98	13856
Erlang (Simulatie)	777	687	1167	0.98	9540
Normaal (Simulatie)	582	590	1171	0.98	8781

Voorbeeld 2: $b_1 = b_2 = 500$, $c_3 = 6$, $c_6 = 3$ en $c_7 = 6$

Verdeling ($\beta = 0.8$)	S_3	S_6	S_7	β	Kosten
Uniform (Exact)	463	500	713	0.8	8550
Uniform (Simulatie)	448	499	730	0.8	8565
Exponentieel (Simulatie)	560	663	820	0.8	10269
Erlang (Simulatie)	490	425	757	0.8	8757
Normaal (Simulatie)	420	443	862	0.8	9021

Verdeling ($\beta = 0.98$)	S_3	S_6	S_7	β	Kosten
Uniform (Exact)	500	500	900	0.98	9900
Uniform (Simulatie)	500	500	900	0.98	9900
Exponentieel (Simulatie)	1163	1309	1561	0.98	20271
Erlang (Simulatie)	737	702	1195	0.98	13698
Normaal (Simulatie)	580	594	1171	0.98	12288

Uit de twee voorbeelden valt op te maken dat de numerieke benadering bij het uniforme model dezelfde oplossing geeft als de exacte berekening. Ook hier geldt, dat de oplossing van de normale verdeling bij een β van 0.8 redelijk dicht in de buurt komt van de oplossing van de uniforme en Erlang verdeling. Bij een β van 0.98 loopt het verschil tussen de uniforme verdeling en de andere verdelingen al verder op. De exponentiële verdeling brengt de meeste kosten met zich mee, omdat deze van alle geanalyseerde verdelingen de dikste staart heeft. Net zoals bij het Basis Model BO liggen de kosten van de Erlang verdeling bij een β van 0.98 tussen die van de normale en exponentiële in. Afhankelijk van de kosten van de verschillende componenten is het Commonality Model CO nu duurder of goedkoper dan het Basis Model BO. Voor de uniforme verdeling kan hier eigenschap 3.1.1 gebruikt worden.

4.3 Het Flexible Product Model FO

Voor het Flexible Product Model FO gelden de volgende aannamen en vereenvoudigingen:

- De vraag van eindproduct 1 voor één periode (D_1) en eindproduct 2 voor één periode (D_2) hebben één van de volgende verdelingen:
 - Uniform: $D_1 \sim U(0, b)$ en $D_2 \sim U(0, b)$;
 - Exponentieel: $D_1 \sim E(b/2)$ en $D_2 \sim E(b/2)$;
 - Erlang: $D_1 \sim Er(3, 6/b)$ en $D_2 \sim Er(3, 6/b)$;
 - Normaal: $D_1 \sim N(0.5b, b^2/12)$ en $D_2 \sim N(0.5b, b^2/12)$;
- Voor de kosten van de componenten geldt de volgende voorwaarde:
 $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$.

3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld geaggregeerd serviceniveau β met een waarde tussen 0 en 1. Dit serviceniveau wordt gedefinieerd als de kans dat aan de gezamenlijke vraag van beide eindproducten kan worden voldaan. Aan het serviceniveau wordt voldaan als geldt dat: $ASL \geq \beta$. ASL is hierbij het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau.
4. De voorraad van component 4 (5) zal kleiner of gelijk zijn aan de voorraad van component 3 (6). Er geldt dus: $S_4 \leq S_3$ en $S_5 \leq S_6$.
5. De voorraad van component 3 (6) is kleiner of gelijk aan de totale voorraad van de componenten 4 (5) en 7 samen: $S_7 + S_4 \geq S_3$ en $S_7 + S_5 \geq S_6$.

Het Flexible Product Model FO kan nu als volgt geformuleerd worden:

$$\text{Min } T_{FO} = c_3 S_3 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 S_6 + c_7 S_7$$

$$\text{o.d.v. } \beta = P(D_1 \leq S_3, D_2 \leq S_6, D_1 + D_2 \leq S_4 + S_5 + S_7)$$

$$S_3 \leq b_1, S_6 \leq b_2$$

$$S_7 + S_4 \geq S_3, S_7 + S_5 \geq S_6.$$

$$S_3, S_4, S_5, S_6, S_7 \geq 0$$

Benaderingsmethode:

1. Bereken een expliciete uitdrukking voor $ASL = P(D_1 \leq S_3, D_2 \leq S_6, D_1 + D_2 \leq S_4 + S_5 + S_7)$. Deze berekening wordt weergegeven in appendix C.2.

Exponentiële verdeling:

$$ASL = 1 - \exp(-\lambda S_6) - \exp(-\lambda S_3) - ([S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7]\lambda - 1)\exp(-\lambda(S_4 + S_5 + S_7))$$

Erlangverdeling:

$$ASL = F(S_4 + S_5 + S_7 - S_6)F(S_6) +$$

$$0.5\lambda^3 \int_{a=S_4+S_5+S_7-S_6}^{S_3} (e^{-\lambda a} a^2 - e^{-2\lambda a} a^2 - e^{-2\lambda a} a^3 \lambda - e^{-2\lambda a} 0.5a^4 \lambda^2) da$$

Normale verdeling.²⁵

$$ASL = F(S_4 + S_5 + S_7 - S_6)F(S_6) +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a=S_4+S_5+S_7-S_6}^{S_3} \exp\left\{-0.5\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} * \left(\frac{1}{1 + \exp\{-\sqrt{\pi}(\beta_1 k^5 + \beta_2 k^3 + \beta_3 k)\}}\right) da$$

$$\text{met } \mu = 0.5b$$

$$\sigma^2 = b^2/12$$

$$k = (S_4 + S_5 + S_7 - a - 0.5b)/(b/\sqrt{12}),$$

$$\beta_1 = -0.0004406$$

$$\beta_2 = 0.0418198$$

$$\beta_3 = 0.9$$

²⁵ MATLAB gebruikt een eigen benadering om deze integraal te benaderen. De in dit hoofdstuk uitgelegde verdeling is eveneens in MATLAB getest en geeft (bijna) dezelfde uitkomsten.

2. Bij het Flexible Product Model FO is er sprake van een vijfdimensionale oplossing. Het berekenen van de oplossing van het Flexible Product Model FO zal daarom meer tijd in beslag nemen, dan bij het Commonality Model CO. Hier was de oplossing namelijk “slechts” driedimensionaal. Om de rekentijd enigszins te beperken zal dus met een minder nauwkeurige oplossing genoeg moeten worden genomen. Hierdoor wordt enkel stap 2a van de benaderingsmethode zoals deze ook bij het Commonality Model CO gebruikt is uitgevoerd:
- De oplossing van het Flexible Product Model FO wordt berekend door voor een beperkt aantal waarden van S_3 , S_4 , S_5 , S_6 en S_7 de bijbehorende kosten en ASL uit te rekenen. Bij het Flexible Product Model FO geldt voor S_i (met $i = 3, \dots, 7$): De waarde van S_i bij het Flexible Product Model FO ligt tussen de waarde van S_i bij het Basis Model BO en het Commonality Model CO in. Indien een S_i in een bepaald model niet voorkomt (In het Basis Model BO komt de variabele S_7 bijvoorbeeld niet voor) wordt de waarde hiervan op nul gezet. Hieruit volgt nu het gebied waarbinnen voor waarden van S_3 , S_4 , S_5 , S_6 en S_7 de bijbehorende kosten en ASL uitgerekend zullen gaan worden.

Benaderingsmethode – MATLAB:

Voorbeeld 1: $b_1 = b_2 = 500$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$, $c_5 = 3$, $c_6 = 2$ en $c_7 = 5$

Verdeling ($\beta = 0.8$)	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	β	Kosten
Uniform (Exact)	420	277	357	500	142	0.8	5149
Uniform (Simulatie)	420	280	360	500	140	0.8008	5160
Exponentieel (Simulatie)	530	260	370	640	270	0.8005	6370
Erlang (Simulatie)	440	400	400	440	40	0.8006	5200
Normaal (Simulatie)	415	415	448	448	0	0.8	5145

Verdeling ($\beta = 0.98$)	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	β	Kosten
Uniform (Exact)	500	400	400	500	100	0.98	5800
Uniform (Simulatie)	500	400	400	500	100	0.98	5800
Exponentieel (Simulatie)	1120	420	560	1260	700	0.98	12740
Erlang (Simulatie)	700	540	560	720	160	0.9804	8180
Normaal (Simulatie)	576	576	596	596	0	0.98	7012

Voorbeeld 2: $b_1 = b_2 = 500$, $c_3 = 6$, $c_4 = 5$, $c_5 = 6$, $c_6 = 3$ en $c_7 = 6$

Verdeling ($\beta = 0.8$)	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	β	Kosten
Uniform (Exact)	452	224	273	500	227	0.8	8332
Uniform (Simulatie)	435	250	310	500	190	0.8020	8360
Exponentieel (Simulatie)	560	180	270	650	380	0.8005	10110
Erlang (Simulatie)	480	360	300	420	120	0.8016	8460
Normaal (Simulatie)	421	421	441	441	0	0.8	8600

Verdeling ($\beta = 0.98$)	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	β	Kosten
Uniform (Exact)	500	400	400	500	100	0.98	9500
Uniform (Simulatie)	500	400	400	500	100	0.98	9500
Exponentieel (Simulatie)	1160	340	440	1260	820	0.9801	20000
Erlang (Simulatie)	720	540	520	700	180	0.9805	13320
Normaal (Simulatie)	580	580	592	592	0	0.9801	11708

Uit de twee voorbeelden valt op te maken dat de numerieke benadering bij het uniforme model dezelfde oplossing geeft als de exacte berekening. Ook hier geldt, dat de oplossing van de normale en Erlang verdeling bij een β van 0.8 redelijk dicht in de buurt komt van de uniforme verdeling. Bij een β van 0.98 loopt het verschil tussen de uniforme en de andere verdelingen al verder op. De exponentiële verdeling brengt de meeste kosten met zich mee, omdat deze van alle geanalyseerde verdelingen de dikste staart heeft. Net zoals bij het Basis Model BO en Commonality Model CO liggen de kosten van de Erlangverdeling bij een β van 0.98 tussen die van de normale en exponentiële verdeling in. De kosten van het Flexible Product Model FO zijn gelijk of kleiner dan de kosten van het Basis Model BO en het Commonality Model CO. Dit volgt rechtstreeks uit eigenschap 3.1.7.

4.4 Het Double Commonality Model DO

Voor het Double Commonality Model DO gelden de volgende aannamen en vereenvoudigingen:

- De vraag van eindproduct 1 voor één periode (D_1) en eindproduct 2 voor één periode (D_2) hebben één van de volgende verdelingen:
 - Uniform: $D_1 \sim U(0,b)$ en $D_2 \sim U(0,b)$;
 - Exponentieel: $D_1 \sim E(2/b)$ en $D_2 \sim E(2/b)$;
 - Erlang: $D_1 \sim Er(3, 6/b)$ en $D_2 \sim Er(3, 6/b)$;
 - Normaal: $D_1 \sim N(0.5b, b^2/12)$ en $D_2 \sim N(0.5b, b^2/12)$;
 Bovenstaande verdelingen hebben allen dezelfde verwachting. Verder hebben de uniforme, Erlang en normale verdeling ook dezelfde variantie.
- Voor de kostencomponenten gelden de volgende voorwaarden:
 $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$ en $c_8 \geq \max(c_3, c_6)$
- Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld geaggregeerd serviceniveau β met een waarde tussen 0 en 1. Dit serviceniveau wordt gedefinieerd als de kans dat aan de gezamenlijke vraag van beide eindproducten kan worden voldaan. Aan het serviceniveau wordt voldaan als geldt dat: $ASL \geq \beta$. ASL is als volgt gedefinieerd: $ASL = P(D_1 + D_2 \leq S_7)$ en is het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau. De voorraad van component 7 moet dus voldoende zijn om zowel aan de vraag van eindproduct 1, als aan de vraag van eindproduct 2 te voldoen.
- Voor eindproduct 1 (2) is steeds één component 7 en één component 8 nodig. In de optimale oplossing zal daarom moeten gelden dat S_7 gelijk is aan S_8 .

Op basis hiervan ontstaat het volgende model:

$$\text{Min } T_{BO} = (c_7 + c_8)S_7$$

$$\text{o.v.d. } \beta = P(D_1 + D_2 \leq S_7) \\ S_7 \geq 0$$

Bij het berekenen van het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau ASL is nu de verdeling van $D_1 + D_2$ van belang. Deze kansverdeling is nu de som van een tweetal onafhankelijke stochasten (convolutie). Van der Genugten (1986) geeft deze verdelingen op bladzijde 203 bij stelling 4.4.10:

Exponentiële verdeling:

$$D_1 \sim E(2/b), D_2 \sim E(2/b) \Rightarrow D_1 + D_2 \sim \Gamma(2, 2/b)$$

Erlang verdeling:

$$D_1 \sim \text{Er}(3, 6/b) \text{ en } D_2 \sim \text{Er}(3, 6/b) \Rightarrow D_1 + D_2 \sim \Gamma(6, 6/b)$$

Normale verdeling:

$$D_1 \sim N(0.5b, b^2/12), D_2 \sim N(0.5b, b^2/12) \Rightarrow D_1 + D_2 \sim N(b, 2b^2/12)$$

ASL is in dit geval een realisatie van de cumulatieve verdelingsfunctie van de som van de vraag van eindproduct 1 en de vraag van eindproduct 2. Invullen van S_7 in de cumulatieve verdelingsfunctie van $D_1 + D_2$ geeft een ASL waarde.

Benaderingsmethode – MATLAB:

$b = 500, c_7 = 5, c_8 = 4, \beta = 0.8, \text{verdeling} = \text{exponentieel}.$

$$D_1 \sim E(1/250) \text{ en } D_2 \sim E(1/250) \Rightarrow D_1 + D_2 \sim \Gamma(2, 1/250)$$

Nu moet de waarde van S_7 gevonden worden waarvoor geldt: $0.8 = P(D_1 + D_2 \leq S_7)$. Aangezien $D_1 + D_2$ gamma verdeeld is, is deze standaard met behulp van MATLAB (of een statistische tabel) te vinden. De gebruikte vraagverdelingen worden in de volgende figuren weergegeven:

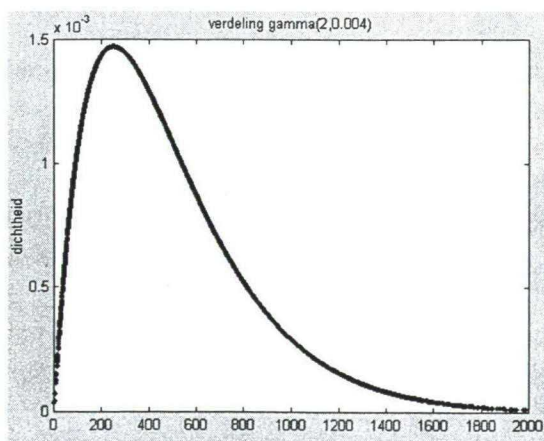


Fig. 27a: Exponentiële vraagverdeling

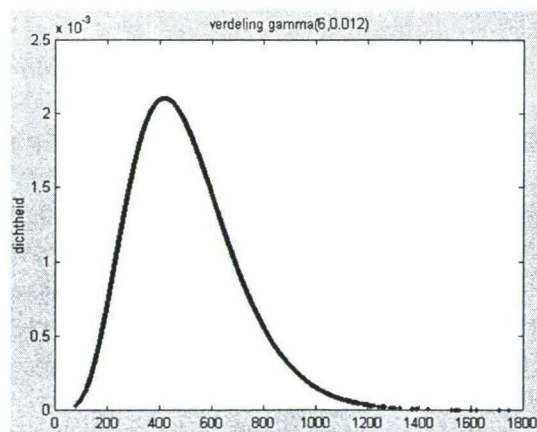


Fig. 27b: Erlang vraagverdeling

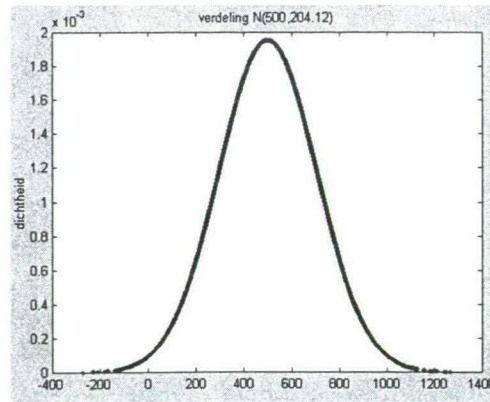


Fig. 27c: Normale verdeling

Voorbeeld 1: $b_1 = b_2 = 500$ $c_7 = 5$ en $c_8 = 4$

Verdeling ($\beta = 0.8$)	S_7	Kosten
Uniform	684	6154
Exponentieel	749	6741
Erlang	659	5931
Normaal	672	6048

Verdeling ($\beta = 0.98$)	S_7	Kosten
Uniform	900	8100
Exponentieel	1459	13131
Erlang	1002	9018
Normaal	919	8271

Voorbeeld 2: $b_1 = b_2 = 500$ $c_7 = 6$ en $c_8 = 6$

Verdeling ($\beta = 0.8$)	S_7	Kosten
Uniform	684	8208
Exponentieel	749	8988
Erlang	659	7908
Normaal	672	8064

Verdeling ($\beta = 0.98$)	S_7	Kosten
Uniform	900	10800
Exponentieel	1459	17508
Erlang	1002	12024
Normaal	919	11028

De oplossingen bij de uniforme, normale en Erlang verdeling komen opnieuw vrij goed met elkaar overeen. Een exponentiële vraagverdeling geeft opnieuw de hoogste kosten van alle verdelingen. Uit figuur 27 volgt duidelijk dat bij een exponentiële vraagverdeling de staart het dikste is ten opzichte van de andere verdelingen. Uit de eigenschappen 3.1.2 t/m 3.1.4 volgt dat het Double Commonality Model DO bij een uniforme verdeling duurder is dan de drie andere modellen. Voor de overige verdelingen ontstaat er uit deze voorbeeld geen eenduidig beeld.

5 Modellen m.b.t. standaardisatie van componenten met individuele serviceniveaus

In hoofdstuk 2 zijn een viertal modellen met ongecorreleerde vraag besproken, waarbij steeds uitgegaan is van een geaggregeerd serviceniveau. In hoofdstuk 5 zal dit geaggregeerde serviceniveau verlaten worden en gekeken gaan worden naar een individueel serviceniveau. Elk van de eindproducten moet nu aan dit individuele serviceniveau voldoen. In paragraaf 5.1 wordt het Basis Model BOI met een uniforme verdeling besproken. In paragraaf 5.2 volgt het Commonality Model COI met een uniforme verdeling.

5.1 Het Basis Model BOI

Als uitgangspunt voor het Basis Model met ongecorreleerde vraag en een individueel serviceniveau wordt het artikel "The Effect Of Commonality On Safety Stock In A Simple Inventory Model" van Baker, Magazine en Nuttle (1985) genomen. In dit artikel wordt enkel een eerste aanzet gegeven voor modellen met een individueel serviceniveau. Enkel het Basis en Commonality Model worden besproken, waarbij de beide eindproducten dan ook nog eens een identieke vraagverdeling hebben.

In Het Basis Model BOI wordt uitgegaan van 2 eindproducten en 2 x 2 componenten. Eindproduct 1 (2) bestaat uit één component 3 (5) en één component 4 (6). D_1 (D_2) is de vraag naar eindproduct 1 (2) voor één periode. Figuur 28 geeft het Basis Model BOI schematisch weer:

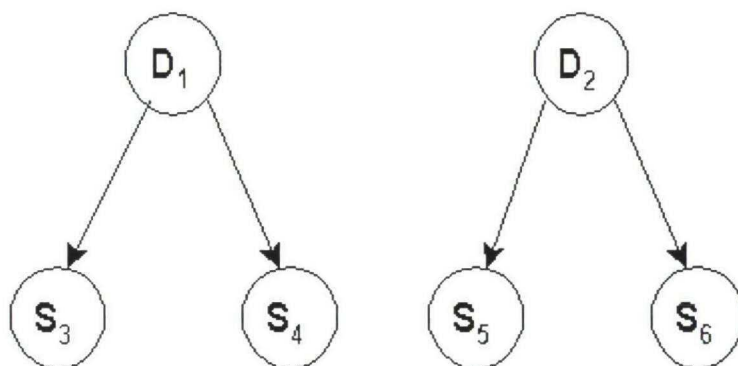


Fig. 28: Schematische weergave van het Basis Model BOI

Bij dit model horen de volgende aannamen:

1. De vraag van beide eindproducten is uniform verdeeld:
 - De vraag van eindproduct 1 voor één periode (D_1) is $U(0, b_1)$ verdeeld.
 - De vraag van eindproduct 2 voor één periode (D_2) is $U(0, b_2)$ verdeeld.
2. Er worden geen restricties opgelegd aan de kosten van de componenten.
3. Voor elk eindproduct j ($j = 1, 2$) geldt een vooraf vastgesteld individueel serviceniveau β_j met een waarde tussen 0 en 1. Aan dit serviceniveau wordt voldaan als geldt dat: $SL_j \geq \beta_j$ voor $j=1, 2$. SL_j is hierbij het gerealiseerde individuele serviceniveau van eindproduct j .

Dit geeft het volgende model:

$$\text{Min } T_{\text{BOI}} = c_3 S_3 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 S_6$$

$$\begin{aligned} \text{o.d.v. } & SL_1 \geq \beta_1 \text{ en } SL_2 \geq \beta_2 \\ & S_3, S_4, S_5, S_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Aan bovenstaand model kunnen de volgende vereenvoudigingen worden opgelegd:

1. Voor eindproduct 1 (2) is steeds één component 3 (5) en één component 4 (6) nodig. In de optimale oplossing zal dus steeds moeten gelden dat S_3 gelijk is aan S_4 (S_5 gelijk is aan S_6). Het in voorraad houden van ongelijke hoeveelheden van de beide componenten zal niet leiden tot een verhoging van het serviceniveau.
2. De maximaal mogelijke vraag voor eindproduct 1 (2) is b_1 (b_2). Het aanhouden van een grotere voorraad van component 3 (6) dan b_1 (b_2) zal niet leiden tot een hoger serviceniveau.
3. Het gerealiseerde individuele serviceniveau van eindproduct 1 (SL_1) wordt nu gedefinieerd als:
 $SL_1 = S_3/b_1 = (\beta_1)$. Voor eindproduct 2 geldt: $SL_2 = S_6/b_2 = (\beta_2)$.
 Doordat het bedrijf de kosten wil minimaliseren zal nooit meer voorraad aangehouden worden dan noodzakelijk is om aan de serviceniveaus te voldoen. SL_1 en SL_2 zullen dus gelijk zijn aan de vooraf bepaalde β_j 's.

Hierna ontstaat het volgende model:

$$\text{Min } T_{\text{BOI}} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\begin{aligned} \text{o.v.d. } & \beta_1 = S_3/b_1 \\ & \beta_2 = S_6/b_2 \\ & S_3, S_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Aangezien β_1 , β_2 , b_1 en b_2 bekend zijn is de oplossing van bovenstaand model triviaal:

Tabel 11: Resultaten van het Basis Model BOI

$$\begin{aligned} \textbf{Range 1: } & S_3 = \beta_1 b_1, S_6 = \beta_2 b_2, T_{\text{BOI}} = (c_3 + c_4)\beta_1 b_1 + (c_5 + c_6)\beta_2 b_2 \\ & 0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Met behulp van het bovenstaande model kan een bedrijf bij een gegeven verdeling van de vraag en bij gegeven kostencomponenten bepalen hoeveel het van elk van de componenten in voorraad moet hebben om aan een bepaald serviceniveau te voldoen.

Voorbeeld 1: $b_1 = 500, b_2 = 800, c_3 = 3, c_4 = 4, c_5 = 3, c_6 = 2$

Basis Model BOI ($\beta_1 = \beta_2 = 0.8$)		Basis Model BOI ($\beta_1 = \beta_2 = 0.98$)	
$S_3 = S_4$	400	$S_3 = S_4$	490
$S_5 = S_6$	640	$S_5 = S_6$	784
Kosten	6000	Kosten	7350

Voorbeeld 2: $b_1 = 500, b_2 = 800, c_3 = 6, c_4 = 5, c_5 = 6$ en $c_6 = 3$

Basis Model BOI ($\beta_1 = \beta_2 = 0.8$)		Basis Model BOI ($\beta_1 = \beta_2 = 0.98$)	
$S_3 = S_4$	400	$S_3 = S_4$	490
$S_5 = S_6$	640	$S_5 = S_6$	784
Kosten	10160	Kosten	12446

Als het Basis Model BOI met het Basis Model BO uit paragraaf 2.1 vergeleken wordt kunnen de volgende conclusies getrokken worden:

1. De kosten van het Basis Model BOI zijn lager dan de kosten van het Basis Model BO. (Dit zal in paragraaf 6.1 bewezen worden)
2. De voorraad van elke afzonderlijke component is in het Basis Model BOI kleiner of gelijk aan de voorraad van deze afzonderlijke component in het Basis Model BO.

5.2 Het Commonality Model COI

Het artikel van Mirchandani en Mishra (2000) wordt als basis genomen voor het Commonality Model COI. In het Commonality Model COI wordt een gezamenlijke component 7 gebruikt, die component 4 van eindproduct 1 en component 5 van eindproduct 2 vervangt. Een bepaald deel van de voorraad van de gezamenlijke component (S_7) wordt nu toegewezen aan eindproduct 1 en een ander deel aan eindproduct 2. In het bovengenoemde artikel worden hiervoor een tweetal methoden onderscheiden:

1. Eindproduct 1 heeft een hogere prioriteit dan eindproduct 2. In dit geval wordt eerst aan de vraag van eindproduct 1 voldaan voordat aan die van eindproduct 2 begonnen wordt. Indien niet aan de volledige vraag van eindproduct 1 voldaan kan worden (dit is het geval als de beschikbare voorraad van de gezamenlijke component niet voldoende is), wordt aan zoveel mogelijk vraag naar eindproduct 1 voldaan voordat begonnen wordt om de gezamenlijke component aan eindproduct 2 toe te wijzen. Deze variant wordt in paragraaf 4 van Mirchandani en Mishra (2000) uitgewerkt.
2. Aan de verschillende eindproducten worden geen prioriteiten toegekend. Indien er nu niet voldoende van de gezamenlijke component aanwezig is om aan de volledige vraag te voldoen, zal deze met een verdeelsleutel (Bv. van elke 10 gezamenlijke componenten worden er 6 aan eindproduct 1 en 4 aan eindproduct 2 toegewezen) aan de beide eindproducten worden toegewezen. Deze variant wordt in paragraaf 5 van Mirchandani en Mishra (2000) uitgewerkt.

In deze paragraaf wordt gekozen voor methode 2. Bij deze methode worden aan de verschillende eindproducten geen prioriteiten toegekend. Aangezien bij de modellen met een geaggregeerd serviceniveau uit hoofdstuk 2 geen gebruik is gemaakt van prioriteiten is dit een logische keuze.

In het Commonality Model COI wordt een tweetal eindproducten samengesteld. Eindproduct 1 bestaat uit één component 3 en één component 7. Eindproduct 2 wordt samengesteld uit één component 6 en één component 7. Component 7 is dus de gezamenlijke component. Deze vervangt voor eindproduct 1 component 4 en voor eindproduct 2 component 5. Figuur 29 geeft dit schematisch weer:

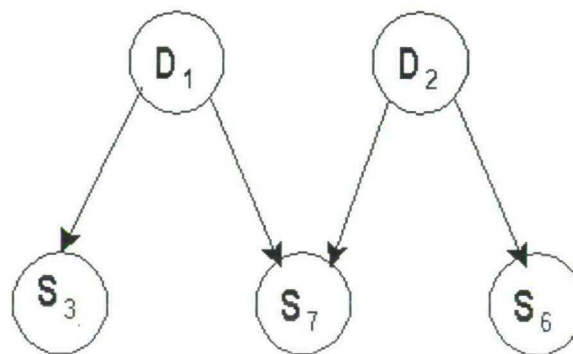


Fig. 29: Schematische weergave van het Commonality Model COI

Voor dit model gelden de volgende aannamen:

1. De vraag van beide eindproducten is uniform verdeeld;
 - De vraag van eindproduct 1 voor één periode (D_1) is $U(0, b_1)$ verdeeld.
 - De vraag van eindproduct 2 voor één periode (D_2) is $U(0, b_2)$ verdeeld.
2. Voor de kosten van de componenten geldt: $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$. De gezamenlijke component is dus duurder dan ieder van de twee componenten, die hij vervangt. Deze voorwaarde is bij het berekenen van de oplossing van dit model niet nodig. Ze is echter wel van belang als het Commonality Model COI met andere modellen (bv. het Basis Model BOI) vergeleken gaat worden.
3. Voor elk eindproduct j ($j = 1, 2$) geldt een vooraf vastgesteld individueel serviceniveau β_j met een waarde tussen 0 en 1. Aan dit serviceniveau wordt voldaan als geldt dat: $SL_j \geq \beta_j$ voor $j=1, 2$. SL_j is hierbij het gerealiseerde individuele serviceniveau van eindproduct j .

Dit geeft het volgende model:²⁶

$$\text{Min} \quad T_{\text{COI}} = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7$$

$$\text{o.d.v. } SL_1 \geq \beta_1 \text{ en } SL_2 \geq \beta_2$$

²⁶ Mirchandani en Mishra (2000) gebruiken de volgende symbolen: Voor S_3 , S_6 en S_7 worden I_1 , I_2 en I_C gebruikt. Voor β_1 en β_2 worden S_1 en S_2 gebruikt. Voor D_1 en D_2 worden R_1 en R_2 gebruikt. w_1 , w_2 zijn het aantal gezamenlijke componenten, dat voor één eindproduct 1, respectievelijk 2 nodig is. In lijn met de voorgaande modellen worden beide getallen op 1 gezet. Voor de kosten C_3 , C_6 en C_7 van de componenten gebruiken Mirchandani en Mishra (2000) C_1 , C_2 en C_C .

$$S_3, S_6, S_7 \geq 0$$

Voor de waarden van S_3 , S_6 en S_7 gelden nu de volgende voorwaarden:

1. $S_3 \leq b_1$: De maximaal mogelijke vraag voor eindproduct 1 is b_1 . Het aanhouden van een grotere voorraad van component 3 dan b_1 zal niet leiden tot een hoger serviceniveau.
2. $S_3 \geq \beta_1 b_1$: Het vooraf vastgestelde individuele serviceniveau van eindproduct 1 is β_1 . Om aan dit serviceniveau te voldoen moeten er (bij een uniforme verdeling) $\beta_1 b_1$ eenheden van eindproduct 1 samengesteld worden. Indien er minder dan $\beta_1 b_1$ eenheden van eindproduct 1 samengesteld worden kan niet aan het vooraf vastgestelde individuele serviceniveau β_1 voldaan worden. Hieruit volgt nu dat er van component 3 minimaal $\beta_1 b_1$ eenheden in voorraad moeten zijn.
3. Analooq voor S_6 geldt nu: $S_6 \leq b_2$ en $S_6 \geq \beta_2 b_2$.
4. $S_7 \geq \beta_1 b_1$: Om aan het vooraf vastgestelde individuele serviceniveau van eindproduct 1 (β_1) te kunnen voldoen is eerder bepaald, dat minimaal $\beta_1 b_1$ eenheden van component 3 nodig zijn. Hieruit volgt dan dat er ook minimaal $\beta_1 b_1$ eenheden van component 7 nodig zijn.
5. $S_7 \geq \beta_2 b_2$: Analooq aan de redenering onder punt 4.
6. $S_7 \leq \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$: Uit (4) volgt dat om aan het vooraf vastgestelde individuele serviceniveau van eindproduct 1 (2) te voldoen er $\beta_1 b_1$ ($\beta_2 b_2$) eenheden van component 7 aanwezig moeten zijn. Het aanhouden van een grotere hoeveelheid van component 7 dan $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$ zal nu niet leiden tot een verhoging van het serviceniveau.

Hierna moeten de individuele serviceniveaus verder worden uitgewerkt. De individuele serviceniveaus voor eindproduct 1 en 2 worden gedefinieerd als:

$$SL_1 = P(D_1 \leq S_3) - (1-q)p \text{ en } SL_2 = P(D_2 \leq S_6) - q \cdot p$$

Met:

$P(D_1 \leq S_3)$ = De kans dat de vraag naar eindproduct 1 niet groter is dan de hoeveelheid van component 3 op voorraad.

$P(D_2 \leq S_6)$ = De kans dat de vraag naar eindproduct 2 niet groter is dan de hoeveelheid van component 6 op voorraad.

q = De kans dat één eenheid van de gezamenlijke component 7 aan eindproduct 1 wordt toegewezen (= de kans dat één eenheid van de gezamenlijke component 7 niet aan eindproduct 2 wordt toegewezen).

p = De kans dat er voldoende voorraad van de specifieke componenten aanwezig is om aan de volledige vraag van de beide eindproducten te kunnen voldoen, maar dat de voorraad S_7 van de gezamenlijke component onvoldoende is om aan de volledige vraag van de beide eindproducten te kunnen voldoen.

Het hierboven gedefinieerde individuele serviceniveau van eindproduct 1 is nu als volgt te verklaren:

$P(D_1 \leq S_3)$ is het individuele serviceniveau van eindproduct 1 als er geen rekening gehouden hoeft te worden met de aanwezigheid van de gezamenlijke component 7. In het hierboven gedefinieerde individuele serviceniveau is de gezamenlijke

component 7 echter wel van belang. Om nu tot het individuele serviceniveau van eindproduct 1 te komen moet van $P(D_1 \leq S_3)$ nog $(1-q)*p$ worden afgetrokken. Dit is de kans dat de voorraad S_7 van de gezamenlijke component onvoldoende is om aan de volledige vraag van de beide eindproducten te kunnen voldoen vermenigvuldigd met de kans dat de gezamenlijke component 7 niet aan eindproduct 1 wordt toegewezen.

De redenering voor het hierboven gedefinieerde individuele serviceniveau van eindproduct 2 verloopt identiek.

Hierna ontstaat het volgende model:

$$\text{Min } T_{\text{COI}} = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7$$

$$\text{o.d.v. } P(D_1 \leq S_3) - (1-q)p = \beta_1$$

$$P(D_2 \leq S_6) - q*p = \beta_2$$

$$\beta_1 b_1 \leq S_3 \leq b_1$$

$$\beta_2 b_2 \leq S_6 \leq b_2$$

$$S_7 \geq S_3$$

$$S_7 \geq S_6$$

$$S_7 \leq S_3 + S_6$$

$$S_3, S_6, S_7 \geq 0$$

$$0 \leq q \leq 1$$

$$\text{Met } P(D_1 \leq S_3) = S_3/b_1$$

$$P(D_2 \leq S_6) = S_6/b_2$$

$$p = [(S_3 + S_6 - S_7)^2]/2b_1b_2$$

De berekening van deze drie uitdrukkingen is terug te vinden in appendix E.1.

Afhankelijk van de waarden van S_3 en S_6 zijn er nu net als in hoofdstuk 2 een aantal ranges te definiëren.²⁷ In totaal bestaat het Commonality Model COI uit een negental²⁸ ranges. Figuur 30 geeft weer op welke wijze de 9 verschillende ranges in elkaar overgaan. In appendix E.2 is uitgebreid terug te vinden aan welke voorwaarden S_3 en S_6 in een bepaalde range moeten voldoen.

²⁷ Mirchandani en Mishra (2000) geven enkel de resultaten van de ranges 2A, 3A, 4A en 5.

²⁸ Voor het berekenen van de oplossing van dit model is allereerst gekeken naar een situatie waarin ook de waarden van S_7 meegenomen worden. Dit leidt dan tot een situatie met 27 ranges, waarvan er overigens 10 onmiddellijk wegvallen wegens het niet hebben van een oplossing. Bovendien leidt deze aanpak tot problemen bij het bepalen van de voorwaarden die voor elke range gelden. Dit probleem kan ondervangen worden door enkel de waarden van S_3 en S_6 mee te nemen. Nu ontstaat er een model met 9 ranges, die allemaal een oplossing hebben. Wel moet er nu achteraf gecontroleerd worden of S_7 aan de gestelde voorwaarden voldoet.

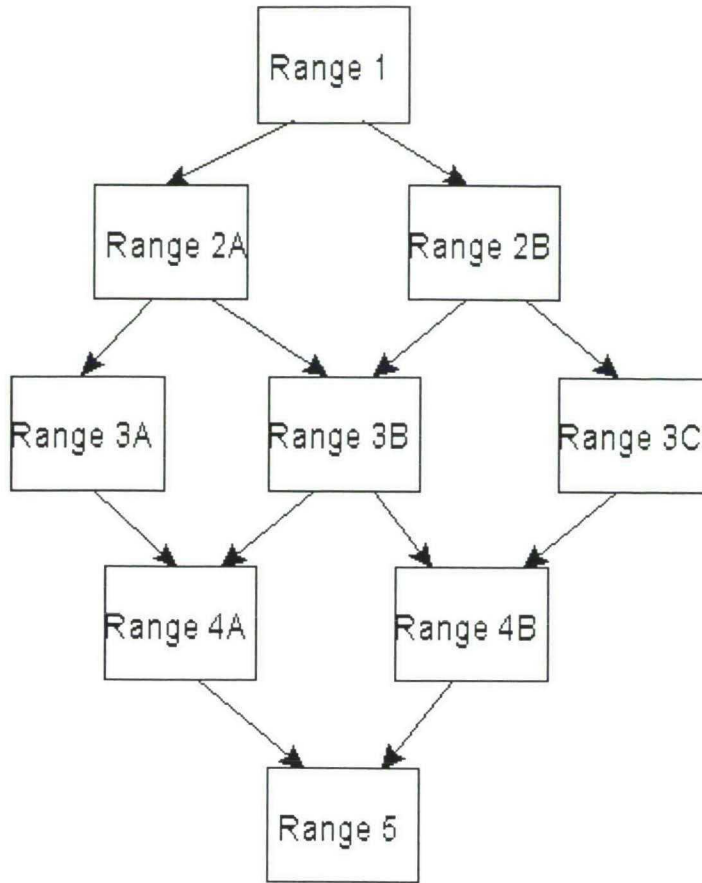


Fig. 30: Ranges van het Commonality Model COI

Voor deze ranges gelden de volgende voorwaarden:

Range 1: $S_3 = \beta_1 b_1$ en $S_6 = \beta_2 b_2$

Range 2A: $\beta_1 b_1 < S_3 < b_1$ en $S_6 = \beta_2 b_2$

Range 2B: $S_3 = \beta_1 b_1$ en $\beta_2 b_2 < S_6 < b_2$

Range 3A: $S_3 = b_1$ en $S_6 = \beta_2 b_2$

Range 3B: $\beta_1 b_1 < S_3 < b_1$ en $\beta_2 b_2 < S_6 < b_2$

Range 3C: $S_3 = \beta_1 b_1$ en $S_6 = b_2$

Range 4A: $S_3 = b_1$ en $\beta_2 b_2 < S_6 < b_2$

Range 4B: $\beta_1 b_1 < S_3 < b_1$ en $S_6 = b_2$

Range 5: $S_3 = b_1$ en $S_6 = b_2$

Eigenschap 5.2.1: Bij het Commonality Model COI worden aan β_1 en β_2 de volgende voorwaarden opgelegd:

$$\beta_1 \geq \max\left\{\frac{c_7}{c_6 + c_7}, \frac{2b_2 - b_1}{2b_2}, \frac{c_7 b_2}{b_1(c_6 + c_7)} \left(1 - \frac{c_7}{2(c_6 + c_7)}\right)\right\}$$

$$\beta_2 \geq \max\left\{\frac{c_7}{c_3 + c_7}, \frac{2b_1 - b_2}{2b_1}, \frac{c_7 b_1}{b_2(c_6 + c_7)} \left(1 - \frac{c_7}{2(c_6 + c_7)}\right)\right\}$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 0.5$$

Eigenschap 5.2.1 is nodig bij het bewijzen van een tweetal voorwaarden, die bij het Commonality Model COI gelden: $S_7 \geq S_3$, $S_7 \geq S_6$. Dat eigenschap 5.2.1 hierbij

noodzakelijk is, is pas gebleken bij het controleren van deze voorwaarden in appendix E.2. In deze appendix worden bij alle ranges deze voorwaarden gecontroleerd. Bij een aantal ranges zijn nu extra eigenschappen nodig om dit te kunnen bewijzen. Als bijvoorbeeld bij range 2A niet geldt dat $\beta_2 \geq \frac{c_7}{c_3 + c_7}$ is, dan kan

$S_7 \geq S_3$ niet bewezen worden (zie appendix E.2). Ook bij de andere ranges moeten nu extra eigenschappen aan β_1 en β_2 worden opgelegd om het bewijs rond te krijgen. Al deze extra eigenschappen bij elkaar genomen vormen nu eigenschap 5.2.1.

De berekeningen van de resultaten van het Commonality Model COI zijn in appendix E.2 terug te vinden. Om de berekeningen te vereenvoudigen worden de volgende

twee constanten gedefinieerd: $F_1 = \frac{c_7^2 b_2}{2b_1(c_3 + c_7)^2}$ en $F_2 = \frac{c_7^2 b_1}{2b_2(c_6 + c_7)^2}$.

Bij het presenteren van de resultaten van het Commonality Model COI wordt gekeken naar een tweetal situaties: $F_1 \neq F_2$ en $F_1 = F_2$.

Tabel 12: Resultaten van het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$)

Range 1: Deze range bestaat enkel als c_7 gelijk is aan 0.

$$S_3 = \beta_1 b_1, S_6 = \beta_2 b_2, S_7 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, T_{COI} = c_3 \beta_1 b_1 + c_6 \beta_2 b_2$$

Wanneer c_7 groter dan 0 wordt zal de oplossing van het Commonality Model COI zich bevinden in één van de zeven andere ranges:

Range 2A: $S_3 = b_1(F_1 + \beta_1)$, $S_6 = \beta_2 b_2$, $S_7 = b_1(F_1 + \beta_1) + \beta_2 b_2 - \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7}$, $q = 0$,

$$F_1 > F_2, T_{COI} = (c_3 + c_7)b_1(F_1 + \beta_1) + (c_6 + c_7)\beta_2 b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7}$$

$$(F_1 = \frac{c_7^2 b_2}{2b_1(c_3 + c_7)^2} \text{ en } F_2 = \frac{c_7^2 b_1}{2b_2(c_6 + c_7)^2})$$

met $F_1 > 0$ en $F_1 + \beta_1 < 1$

Range 2B: $S_3 = \beta_1 b_1$, $S_6 = b_2(F_2 + \beta_2)$, $S_7 = b_2(F_2 + \beta_2) + \beta_1 b_1 - \frac{c_7 b_1}{c_6 + c_7}$,

$$q = 1, F_1 < F_2, T_{COI} = (c_6 + c_7)b_2(F_2 + \beta_2) + (c_3 + c_7)\beta_1 b_1 - \frac{c_7^2 b_1}{c_6 + c_7}$$

met $F_2 > 0$ en $F_2 + \beta_2 < 1$

Range 3A: $S_3 = b_1$, $S_6 = \beta_2 b_2$, $S_7 = b_1 + \beta_2 b_2 - \sqrt{2b_1 b_2(1 - \beta_1)}$, $q = 0$, $F_1 > F_2$,

$$T_{COI} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)\beta_2 b_2 - c_7 \sqrt{2b_1 b_2(1 - \beta_1)}$$

met $F_1 + \beta_1 \geq 1$ en $F_2 + \beta_2 \leq 1$

Range 3C: $S_3 = \beta_1 b_1$, $S_6 = b_2$, $S_7 = \beta_1 b_1 + b_2 - \sqrt{2b_1 b_2(1 - \beta_2)}$, $q = 1$, $F_1 < F_2$,

$$T_{COI} = (c_3 + c_7)\beta_1 b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7 \sqrt{2b_1 b_2(1 - \beta_2)}$$

met $F_2 + \beta_2 \geq 1$ en $F_1 + \beta_1 \leq 1$

Range 4A: $S_3 = b_1$, $S_6 = b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1)$, $S_7 = b_1 + S_6 - \frac{c_7 b_1}{c_6 + c_7}$, $F_1 > F_2$,
 $q = \frac{F_2 + \beta_1 - 1}{F_2}$, $T_{COI} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) - \frac{c_7^2 b_1}{c_6 + c_7}$
 met $F_2 + \beta_1 > 1$ en $F_2 + \beta_1 + \beta_2 < 2$

Range 4B: $S_3 = b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1)$, $S_6 = b_2$, $S_7 = S_3 + b_2 - \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7}$, $F_1 < F_2$,
 $q = \frac{1 - \beta_2}{F_1}$, $T_{COI} = (c_3 + c_7)b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1) + (c_6 + c_7)b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7}$
 met $F_1 + \beta_2 > 1$ en $F_1 + \beta_1 + \beta_2 < 2$

Range 5: $S_3 = b_1$, $S_6 = b_2$, $S_7 = b_1 + b_2 - \sqrt{2b_1 b_2(2 - \beta_1 - \beta_2)}$, $q = \frac{1 - \beta_2}{2 - \beta_1 - \beta_2}$
 $T_{COI} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7 \sqrt{2b_1 b_2(2 - \beta_1 - \beta_2)}$
 $F_2 + \beta_1 + \beta_2 \geq 2$ en $F_1 + \beta_1 + \beta_2 \geq 2$

Uit de uitkomsten van het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$) volgt dat bij de ranges 2A, 3A en 4A geldt: $F_1 > F_2$. Bij de ranges 2B, 3C en 4B geldt: $F_1 < F_2$. De constanten waaruit F_1 en F_2 bestaan (b_1 , b_2 , c_3 , c_6 en c_7) staan echter vast. Indien geldt dat $F_1 > F_2$ is zijn dus enkel de ranges 1, 2A, 3A, 4A en 5 toegestaan. (Bij de ranges 1 en 5 worden geen voorwaarden aan F_1 en F_2 opgelegd) Wanneer range 3B zou bestaan is het dus mogelijk om door het verhogen van de individuele serviceniveaus via range 2A bij range 4B uit te komen. Deze overgang is echter niet mogelijk. Hieruit volgt nu dat range 3B bij het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$) niet bestaat.

Tabel 13: Resultaten van het Commonality Model COI ($F_1 = F_2$)^{29,30}

Range 1: Deze range bestaat enkel als c_7 gelijk is aan 0.
 $S_3 = \beta_1 b_1$, $S_6 = \beta_2 b_2$, $S_7 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$, $T_{COI} = c_3 \beta_1 b_1 + c_6 \beta_2 b_2$

Wanneer c_7 groter dan 0 wordt zal de oplossing van het Commonality Model COI zich bevinden in één van de drie volgende ranges:

Range 2: $S_3 = \beta_1 b_1 + (1-q) \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)^2}$, $S_6 = \beta_2 b_2 + q \frac{(c_7 b_2)^2}{2b_1(c_3 + c_7)^2}$,

²⁹ De berekeningen van deze variant van het Commonality Model COI zijn terug te vinden in appendix E.3.

³⁰ In deze paragraaf zijn een tweetal varianten van het Commonality Model COI beschreven. Een variant met $F_1 = F_2$ en een variant met $F_1 \neq F_2$. De variant met $F_1 \neq F_2$ kan heel snel "omgeschreven" worden naar een algemene variant van het Commonality Model COI. Hiervoor moeten dan de volgende voorwaarden worden aangepast: In de ranges 2A, 3A en 4A wordt de voorwaarde $F_1 > F_2$ vervangen door $F_1 \geq F_2$. In de ranges 2B, 3C en 4B wordt de voorwaarde $F_1 < F_2$ vervangen door $F_1 \leq F_2$. De variant van het Commonality Model COI met $F_1 = F_2$ is vooral vanuit modelmatige redenen opgenomen, omdat hierin een aantal ranges samenvallen. Bij de kostenvergelijkingen van het Commonality Model COI met andere modellen zal enkel naar de algemene variant van het Commonality Model COI gekeken worden.

$$S_7 = S_3 + S_6 - \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7}, q = \text{onbepaald},$$

$$T_{\text{COI}} = (c_3 + c_7) \beta_1 (b_1 + F_1) + (c_6 + c_7) \beta_2 b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7} \text{ met}$$

$$F_1 > 0, \beta_1 + (1-q)F_1 \leq 1 \text{ en } \beta_2 + qF_1 \leq 1$$

Range 3: Deze range heeft 2 mogelijke oplossingen:

$$(A) \quad S_3 = b_1, S_6 = b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1), S_7 = b_1 + S_6 - \frac{c_7 b_1}{c_6 + c_7},$$

$$q = \frac{F_2 + \beta_1 - 1}{F_2}$$

$$(B) \quad S_3 = b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1), S_6 = b_2, S_7 = S_3 + b_2 - \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7},$$

$$q = \frac{1 - \beta_2}{F_1}$$

$$T_{\text{COI}} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) - \frac{c_7^2 b_1}{c_6 + c_7} \text{ met}$$

$\beta_1 + (1-q)F_1 > 1$ en $F_1 + \beta_1 + \beta_2 < 2$ indien oplossing A gekozen wordt.

$\beta_2 + qF_1 > 1$ en $F_1 + \beta_1 + \beta_2 < 2$ indien oplossing B gekozen wordt.

Range 4: $S_3 = b_1, S_6 = b_2, S_7 = b_1 + b_2 - \sqrt{2b_1 b_2 (2 - \beta_1 - \beta_2)}, q = \frac{1 - \beta_2}{2 - \beta_1 - \beta_2}$

$$T_{\text{COI}} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7 \sqrt{2b_1 b_2 (2 - \beta_1 - \beta_2)}$$

met $F_1 + \beta_1 + \beta_2 \geq 2$

Voorbeeld 1: $b_1 = 500, b_2 = 800, c_3 = 3, c_6 = 2$ en $c_7 = 5^{31,32}$ ($F_1 \neq F_2$)

Commonality Model COI ($\beta_1 = \beta_2 = 0.8$)		Commonality Model COI ($\beta_1 = \beta_2 = 0.98$)	
S_3	500	S_3	500
S_6	640	S_6	800
S_7	740	S_7	1121
Kosten	6480	Kosten	8705

³¹ De voorwaarden die aan β_1 en β_2 gesteld worden betekenen in dit voorbeeld dat β_1 groter moet zijn dan 0.71 en β_2 groter dan 0.625. $\beta_1 + \beta_2$ moet groter dan 0.5 zijn. Aangezien in de praktijk meestal hoge serviceniveaus van 0.9 of meer interessant zijn, levert dit geen problemen op.

³² Bij $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$ bevindt de oplossing van het Commonality Model COI zich in range 3A. Bij $\beta_1 = \beta_2 = 0.98$ is dit in range 5.

Voorbeeld 2: $b_1 = 500$, $b_2 = 800$, $c_3 = 6$, $c_6 = 3$ en $c_7 = 6$ ($F_1 \neq F_2$)

Commonality Model COI ($\beta_1 = \beta_2 = 0.8$)		Commonality Model COI ($\beta_1 = \beta_2 = 0.98$)	
S_3	500	S_3	500
S_6	640	S_6	800
S_7	740	S_7	1121
Kosten	9360	Kosten	12126

Als de oplossing van het Commonality Model COI met die van het Basis Model BOI vergeleken wordt kunnen de volgende conclusies getrokken worden:

1. Of het Commonality Model COI al of niet voordeliger is dan het Basis Model BOI hangt af van de kosten van de verschillende componenten. (In paragraaf 6.1 wordt hierop nader ingegaan)
2. De voorraad van elk van de specifieke componenten (S_3 en S_6) in het Commonality Model COI is groter dan die van elk van deze componenten in het Basis Model BOI.
3. De voorraad van de gezamenlijke component (S_7) in het Commonality Model COI is groter dan de som van de voorraden van de afzonderlijke componenten (S_4 en S_5) uit het Basis Model BOI, die deze vervangt.

Als het Commonality Model COI met het Commonality Model CO uit paragraaf 2.2 vergeleken wordt kunnen de volgende conclusies getrokken worden:

1. De kosten van het Commonality Model COI zijn lager dan de kosten van het Commonality Model CO. (Dit zal in paragraaf 6.1 bewezen worden)
2. De voorraad van elke afzonderlijke component is in het Commonality Model COI kleiner of gelijk aan de voorraad van deze afzonderlijke component in het Commonality Model CO.

6 Kostenanalyses m.b.t. de modellen uit hoofdstuk 5

6.1 Kostenvergelijking

In paragraaf 2.1 is het Basis Model BO besproken. Bij dit model worden de kosten van de componenten geminimaliseerd onder de voorwaarde dat een vooraf vastgesteld geaggregeerd serviceniveau β voor de beide eindproducten gerealiseerd wordt. Indien dit geaggregeerde serviceniveau bijvoorbeeld 95% bedraagt, betekent dit dat voor 95 % aan de gezamenlijke vraag naar de beide eindproducten voldaan moet worden. Zoals uit het voorbeeld in paragraaf 4.1 blijkt hangt het geaggregeerde serviceniveau bij het Basis Model BO weer af van de individuele serviceniveaus van de beide eindproducten in dit model. Er zijn vervolgens een groot aantal combinaties van individuele serviceniveaus van de beide eindproducten te bedenken waarbij aan het geaggregeerde serviceniveau van 95% voldaan wordt. In het in paragraaf 5.1 besproken Basis Model BOI worden de kosten geminimaliseerd onder de voorwaarde dat een vooraf vastgesteld individueel serviceniveau voor de beide eindproducten gerealiseerd wordt. Indien het individuele serviceniveau voor beide eindproducten 95% is, moet voor 95% aan de vraag naar eindproduct 1 EN voor 95% aan de vraag naar eindproduct 2 voldaan worden. Vergelijking van de uitkomsten van paragraaf 5.1 met die van paragraaf 2.1 laten zien dat het soort serviceniveau bij het Basis Model van invloed is op de uitkomst van dit model. In deze paragraaf zal een drietal vergelijkingen tussen de modellen plaatsvinden:

- Basis Model BOI (individueel serviceniveau) en Basis Model BO (geaggregeerd serviceniveau);
- Commonality Model COI (individueel serviceniveau) en Commonality Model CO (geaggregeerd serviceniveau);
- Basis Model BOI en Commonality Model COI.

Bij het maken van deze vergelijking zullen de kosten van alle mogelijk ranges van het Basis Model BOI (Commonality Model COI) en het Basis Model BO (Commonality Model CO) met elkaar vergeleken worden. Om praktische redenen zal hier niet de methode uit paragraaf 3.1 genomen worden, waar gebruik gemaakt wordt van afgeleiden om de kosten van de verschillende modellen met elkaar te vergelijken. Een bewijs van de eigenschappen uit deze paragraaf van dit afstudeerwerkstuk is terug te vinden in appendix F.

Eigenschap 6.1.1: De kosten van het Basis Model BOI (T_{BOI}) zijn altijd lager dan de kosten van het Basis Model BO (T_{BO}), als het geaggregeerde serviceniveau β van het Basis Model BO gelijk is aan de individuele serviceniveaus (β_1 en β_2) van het Basis Model BOI.

Eigenschap 6.1.1 valt ook intuïtief af te leiden op de volgende wijze:

Bij het Basis Model BO wordt de volgende vergelijking met nevenvoorwaarde geminimaliseerd:

$$\text{Min } T_{BO} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\begin{aligned} \text{o.v.d. } \beta &= S_3 S_6 / b_1 b_2 \\ S_3, S_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bij het Basis Model BOI wordt de volgende vergelijking met nevenvoorwaarden geminimaliseerd:

$$\text{Min } T_{BOI} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\begin{aligned} \text{o.v.d. } \beta_1 &= S_3 / b_1 \\ \beta_2 &= S_6 / b_2 \\ S_3, S_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Als voorbeeld wordt nu genomen dat voor de serviceniveaus moet gelden: $\beta = \beta_1 = \beta_2 = 0.8$. Voor de oplossing van het Basis Model BOI moet nu gelden dat de gerealiseerde individuele serviceniveaus 0.8 zijn. Bij het Basis Model BO moet het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau 0.8 zijn. Uit de voorwaarde bij het Basis Model BO volgt echter onmiddellijk dat dit gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau het product is van de gerealiseerde individuele serviceniveaus van de eindproducten 1 en 2. Indien deze twee gerealiseerde individuele serviceniveaus elk 0.8 zijn, zal het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau slechts 0.64 zijn. Om een gerealiseerd geaggregeerd serviceniveau van 0.8 te kunnen bereiken moeten de gerealiseerde individuele serviceniveaus dus groter of gelijk aan 0.8 zijn. Hieruit volgt nu dat de kosten van het Basis Model BOI lager zullen zijn dan die van het Basis Model BO.

Eigenschap 6.1.2: De kosten van het Commonality Model COI (T_{COI}) zijn altijd lager dan de kosten van het Commonality Model CO (T_{CO}), als het geaggregeerde serviceniveau β van het Commonality Model CO gelijk is aan de individuele serviceniveaus (β_1 en β_2) van het Commonality Model COI.

Een uitgebreid bewijs van eigenschap 6.1.2 is terug te vinden in appendix F.

Eigenschap 6.1.3: De kosten van het Commonality Model COI (T_{COI}) zijn lager dan die van het Basis Model BOI (T_{BOI}) als:

$$c_3 + c_7 > \max\left(\frac{c_7^2}{c_7 - c_5}, \frac{c_7^2 b_2}{b_1(c_7 - c_4)}\right) \text{ en } c_6 + c_7 > \max\left(\frac{c_7^2}{c_7 - c_4}, \frac{c_7^2 b_1}{b_2(c_7 - c_5)}\right) \text{ en } c_7 > 0$$

Mirchandani en Mishra (2000) geven in paragraaf 5 op bladzijde 18 een kostenvergelijking weer tussen het Basis Model BOI (Aldaar het NC model genoemd) en het Commonality Model COI (Aldaar het NPP model genoemd). Mirchandani en Mishra leggen hier echter de volgende voorwaarden aan de modellen op: $b_1 = b_2 = b$ en $c_3 = c_6$. Hierdoor is er dus niet meer sprake van een algemene kostenvergelijking tussen het Basis model BOI en het Commonality Model COI (bij Mirchandani en Mishra respectievelijk het NC en het NPP model). Bij eigenschap 6.1.2 uit dit afstudeerwerkstuk worden deze voorwaarden niet aan de modellen opgelegd. Deze

eigenschap is dus algemener dan de corresponderende “proposition 8” op bladzijde 18 van Mirchandani en Mishra.

Een nadere vergelijking tussen modellen met een geaggregeerd serviceniveau en modellen met een individueel serviceniveau is terug te vinden in paragraaf 6 van Mirchandani en Mishra (2000). In deze paragraaf besteden Mirchandani en Mishra vooral aandacht aan de verschillen in de voorraadniveaus tussen de twee modellen. In dit afstudeerwerkstuk is enkel aandacht besteed aan het vergelijken van de totale kosten van deze modellen, omdat dit in de praktijk het interessantst is. In paragraaf 7.3 van dit afstudeerwerkstuk wordt hier overigens een begin mee gemaakt.

In Mirchandani en Mishra (2000) worden een tweetal varianten besproken van het Commonality Model COI. In paragraaf 4 van dit artikel wordt een variant besproken waarin prioriteiten aan de verschillende eindproducten worden toegekend. In het geval dat eindproduct 1 een hogere prioriteit heeft dan eindproduct 2 zal de gezamenlijke component 7 net zo lang aan eindproduct 1 worden toegewezen totdat aan de vraag van eindproduct 1 voldaan is. Hierna zal aan de vraag van eindproduct 2 voldaan gaan worden. In paragraaf 5 van dit artikel wordt de variant zonder prioriteiten besproken. Deze variant is ook in dit afstudeerwerkstuk in hoofdstuk 5 uitgebreid aan bod geweest. Hierbij wordt de gezamenlijke component 7 steeds met een bepaalde kans aan eindproduct 1 toegewezen en met een bepaalde kans aan eindproduct 2. Indien de kans dat de gezamenlijke component 7 aan eindproduct 1 wordt toegewezen op één gezet wordt ontstaat er een Commonality Model COI met prioriteiten. Hieruit volgt dus dat het Commonality Model COI met prioriteiten een speciaal geval is van het Commonality Model COI zonder prioriteiten. Dit leidt tot de volgende eigenschap:

Eigenschap 6.1.4: De kosten van het Commonality Model COI met prioriteiten (paragraaf 4 uit het artikel van Mirchandani en Mishra (2000)) zijn groter of gelijk aan de kosten van het Commonality Model COI zonder prioriteiten (paragraaf 5 uit het artikel van Mirchandani en Mishra (2000) en paragraaf 5.2 van dit afstudeerwerkstuk).

7 Mogelijkheden tot nader onderzoek

In dit hoofdstuk zal in het kort ingegaan worden op mogelijkheden tot nader onderzoek. In dit afstudeerwerkstuk is slechts een klein gedeelte besproken van de mogelijkheden die er zijn met betrekking tot het onderwerp “Standaardisatie van componenten”. Aan de volgende onderwerpen zal aandacht besteed worden:

1. Het meer-perioden model (§ 7.1)
 - De in dit afstudeerwerkstuk gebruikte modellen gaan altijd uit van één periode.
2. Een uitbreiding van het 2 componenten model (§ 7.2)
 - In deze paragraaf zal het Basis Model BONM besproken gaan worden waarbij n producten elk uit M_i componenten samengesteld worden.
3. Een nadere analyse van de voorraadniveaus (§ 7.3)
 - Het vergelijken van de voorraadniveaus van de verschillende modellen met elkaar.
4. Veiligheidsvoorraad en component commonality (§ 7.4)
 - Wat gebeurt er als rekening gehouden gaat worden met het invoeren van een veiligheidsvoorraad.
5. Een overzicht van andere mogelijke uitbreidingen (§ 7.5)
 - In het kort zal hier een aantal andere mogelijke uitbreidingen besproken worden met verwijzingen naar relevante literatuur.

7.1 Het meer-perioden model

Hillier (1999) breidt het Basis Model BO en het Commonality Model CO uit naar meerdere perioden:

1. *Het meer-perioden Basis Model (BOM):*

$$\text{Min } T_{\text{BOM}} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 - [0.25(c_3 + c_4)b_1 + 0.25(c_5 + c_6)b_2] + 0.5(h_3 + h_4)b_1 + 0.5(h_5 + h_6)b_2$$

$$\begin{aligned} \text{o.d.v. } S_3 S_6 &= \beta b_1 b_2 \\ S_3, S_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

- c_i = kosten om één eenheid van component i gedurende één periode op voorraad te houden ($i = 3, \dots, 6$);
 h_i = aankoopkosten van één eenheid van component i ($i = 3, \dots, 6$);
 $U(0, b_1)$ = vraagverdeling van eindproduct 1 gedurende één periode;
 $U(0, b_2)$ = vraagverdeling van eindproduct 2 gedurende één periode;
 S_i = voorraad van component i ($i = 3, \dots, 6$) aan het begin van een periode;
 β = vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau.

Elke periode moet nu de som van de kosten van het in voorraad houden van de componenten en de aankoopkosten geminimaliseerd worden, waarbij voldaan moet worden aan het vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau β .

De totale voorraadkosten voor één periode zijn nu:

$$(c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 - [0.25(c_3 + c_4)b_1 + 0.25(c_5 + c_6)b_2]$$

$S_3 =$ voorraad van component 3 aan het begin van de periode;
 $b_1/2 =$ verwachte vraag van component 3 in één periode;
 $S_3 - b_1/4 =$ verwachte voorraadniveau van component 3 in één periode.
 $(c_3 + c_4)(S_3 - b_1/4) =$ voorraadkosten van component 3 in één periode.

Voor component 6 kunnen de voorraadkosten in één periode nu op analoge manier berekend worden.

Hierna moeten nog de aankoopkosten per periode berekend worden. De gemiddelde vraag van component 3 per periode is $b_1/2$. Voor component 6 is dit $b_2/2$. Op de lange termijn betekent dit dat de aankoopkosten per periode gemiddeld $(h_3 + h_4)b_1/2$ voor component 3 en $(h_5 + h_6)b_2/2$ voor component 6 zijn.

Uit de term, die bij het Basis Model BOM geminimaliseerd moet worden, volgt nu meteen dat de oplossing van het meer-perioden Basis Model BOM de oplossing van het Basis Model BO plus de som van twee termen, die niet van de beslissingsvariabelen afhangen is.

2. *Het meer-perioden Commonality Model (COM):*

$$\text{Min } T_{\text{COM}} = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7 - [0.25(c_3 + c_7)b_1 + 0.25(c_6 + c_7)b_2] + 0.5(h_3 + h_7)b_1 + 0.5(h_6 + h_7)b_2$$

$$\text{o.d.v. } 2S_3 S_6 - (S_3 + S_6 - S_7)^2 = 2\beta b_1 b_2$$

$$S_3, S_6, S_7 \geq 0$$

De afleiding van dit model gaat op dezelfde manier als bij het Basis Model BOM.

7.2 Een uitbreiding van het 2 componenten model

In hoofdstuk 2 is een viertal modellen besproken met uniforme vraag. Het betrof hierbij modellen met een zeer eenvoudige productstructuur. Zo bestaat het Basis Model BO uit paragraaf 2.1 uit twee eindproducten, die elk uit twee specifieke componenten samengesteld worden.

In deze paragraaf zal een eerste aanzet gegeven worden naar een uitbreiding van de modellen uit hoofdstuk 2. Dit zal gebeuren aan de hand van het Basis Model BO. In dit hoofdstuk zal het Basis Model BONM besproken gaan worden waarbij N eindproducten elk uit M_i ($i=1, \dots, N$) componenten samengesteld worden. Op soortgelijke wijze kan deze uitbreiding ook plaatsvinden voor de overige modellen die in hoofdstuk 2 besproken zijn. Andere alternatieve productstructuren zijn te vinden in het artikel van Bagchi en Gutierrez (1992) en Mirchandani en Mishra (2000).

In het Basis Model BONM zijn er N eindproducten. Elk eindproduct wordt samengesteld uit M_i ($i=1, \dots, N$) verschillende specifieke componenten. In totaal zijn er dus $\sum_{i=1}^N M_i$ verschillende specifieke componenten.

Voor het Basis Model BONM gelden de volgende aannames:

1. De vraag van de eindproducten is uniform verdeeld;
 - De vraag van eindproduct i voor één periode (D_i) is $U(0, b_i)$ verdeeld. ($i=1, \dots, N$)
2. Er worden geen restricties opgelegd aan de kosten van de componenten;
3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld geaggregeerd serviceniveau β met een waarde tussen 0 en 1. Dit serviceniveau wordt gedefinieerd als de kans dat aan de gezamenlijke vraag van alle eindproducten kan worden voldaan. Aan het serviceniveau wordt voldaan als geldt dat: $ASL \geq \beta$. ASL is hierbij het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau.

Dit leidt tot het volgende model:

$$\begin{aligned} \text{Min } T_{\text{BONM}} = & c_{11}S_{11} + c_{12}S_{12} + \dots + c_{1M_1}S_{1M_1} \\ & + c_{21}S_{21} + c_{22}S_{22} + \dots + c_{2M_2}S_{2M_2} \\ & + \dots \\ & + c_{N1}S_{N1} + c_{N2}S_{N2} + \dots + c_{NM_N}S_{NM_N} \end{aligned}$$

$$\text{o.d.v. } ASL \geq \beta$$

$$S_{ij} \geq 0 \text{ voor } i = 1, \dots, N \text{ en } j = 1, \dots, M_i$$

Aan het bovenstaande model kunnen verder nog de volgende vereenvoudigingen worden opgelegd:

1. Voor eindproduct 1 is steeds één component 11, één component 12, ... en één component $1M_1$ nodig. In de optimale oplossing zal daarom moeten gelden dat er van alle componenten, die voor het samenstellen van eindproduct 1 nodig zijn een gelijke hoeveelheid voorradig is. Hieruit volgt dus: $S_{11} = S_{12} = \dots = S_{1M_1}$. Het in voorraad houden van ongelijke hoeveelheden van beide componenten zal niet leiden tot een verhoging van het serviceniveau. Deze vereenvoudiging kan nu dus op de componenten van alle N eindproducten worden toegepast.
2. De maximaal mogelijke vraag voor eindproduct 1 is b_1 . Het aanhouden van een grotere voorraad van een component, die nodig is voor het maken van eindproduct 1 dan b_1 leidt niet tot een verbetering van het serviceniveau. Hieruit volgt dat S_{11} t/m S_{1M_1} niet groter mogen zijn dan b_1 . Dit geldt vervolgens op dezelfde wijze voor de componenten van de overige eindproducten.
3. ASL is nu op basis van de uniforme verdeling van de vraag van de eindproducten te schrijven als: $ASL = \frac{S_{11}S_{21}\dots S_{N1}}{b_1b_2\dots b_N} = \prod_{i=1}^N S_{i1} / \prod_{i=1}^N b_i$.

Doordat het bedrijf de kosten wil minimaliseren zal nooit meer voorraad aangehouden worden dan noodzakelijk is. Het gerealiseerde geaggregeerde serviceniveau ASL zal dus gelijk zijn aan het vooraf vastgestelde geaggregeerde serviceniveau β .

Hierna ontstaat het volgende model:

$$\text{Min } T_{\text{BONM}} = (c_{11} + \dots + c_{1M_1})S_{11} + \dots + (c_{N1} + \dots + c_{NM_N})S_{N1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} c_{ij}S_{i1}$$

$$\text{o.v.d. } \beta = \prod_{i=1}^N S_{i1} / \prod_{i=1}^N b_i$$

$$S_{i1} \geq 0 \text{ voor } i = 1, \dots, N$$

De ranges van het Basis Model BONM zijn te verdelen in $N + 1$ groepen:

Groep 0: Voor elke i ($i = 1, \dots, N$) geldt: $S_{i1} = b_i$.

Groep 0 bestaat uit $\binom{N}{0} = 1$ range.

Groep 1: $A = \{i \mid S_{i1} < b_i\}$, $|A| = 1$, $\forall i \in A : S_{i1} = b_i$.³³

Groep 1 bestaat uit $\binom{N}{1} = N$ ranges.

Groep 2: $A = \{i \mid S_{i1} < b_i\}$, $|A| = 2$, $\forall i \in A : S_{i1} = b_i$.

Groep 2 bestaat uit $\binom{N}{2} = [N(N-1)]/2$ ranges.

Groep H: $A = \{i \mid S_{i1} < b_i\}$, $|A| = H$, $\forall i \in A : S_{i1} = b_i$.

Groep H bestaat uit $\binom{N}{H} = \frac{N!}{(N-H)!H!}$ ranges.

Groep N: Voor elke i ($i = 1, \dots, N$) geldt $S_{i1} < b_i$.

Groep N bestaat uit $\binom{N}{N} = 1$ range.

Uit het bovenstaande volgt nu dat het totaal aantal ranges van het Basis Model BONM volgt uit: $\sum_{j=0}^N \binom{N}{j} = 2^N$.

Tabel 14: Resultaten van het Basis Model BONM

De oplossing van dit model voor een range uit Groep H wordt nu :

Range uit groep H: $A = \{i \mid S_{i1} < b_i\}$, $|A| = H$

$$\forall i \in A : S_{i1} = b_i, \forall i \in A : S_{i1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{M_i} c_{ij}} * \sqrt[H]{\beta \prod_{k \in A} (b_k \sum_{j=1}^{M_k} c_{kj})}$$

Met behulp van bovenstaande formules kan nu voor alle ranges uit de verschillende groepen de oplossing van het Basis Model BONM gevonden worden. Voor de groepen 0, 1 en N valt de oplossing als volgt te schrijven:

Range uit groep 0: Voor elke i ($i = 1, \dots, N$) geldt: $S_{i1} = b_i$.

Range uit groep 1: $A = \{i \mid S_{i1} < b_i\}$, $|A| = 1$
 $\forall i \in A : S_{i1} = b_i, \forall i \in A : S_{i1} = \beta b_i$

³³ In groep 1 is er precies één S_{i1} die kleiner is dan b_i .

Range uit groep N : Voor elke i ($i = 1, \dots, N$) geldt:
$$S_{i1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{M_i} c_{ij}} * \sqrt[N]{\beta \prod_{k=1}^N (b_k \sum_{j=1}^{M_k} c_{kj})}$$

7.3 Een nadere analyse van de voorraadniveaus

Bij het vergelijken van de modellen, die in dit afstudeerwerkstuk beschreven zijn, is vooral gekeken naar de totale kosten van deze modellen. De totale kosten vallen echter uiteen in de kosten van de gezamenlijke componenten en de kosten van de specifieke componenten. Deze twee soorten kosten hangen dan weer af van de voorraadniveaus van de gezamenlijke en specifieke componenten. Deze keuze is bewust gemaakt omdat de totale kosten in de praktijk het meest interessant zijn als vergelijkingsmateriaal. In deze paragraaf zal echter een eerste aanzet gegeven worden tot een nadere analyse van de voorraadniveaus van de verschillende modellen, die in de hoofdstukken 2 en 5 besproken zijn. Bij de beschrijving van deze modellen in de desbetreffende hoofdstukken is steeds gebruik gemaakt van een tweetal numerieke voorbeelden. Hierbij zijn steeds de voorraden van de componenten in de verschillende modellen met elkaar vergeleken. Op basis hiervan kunnen de volgende stellingen gemaakt worden, die nader onderzocht kunnen worden. In dit hoofdstuk zullen een zevental stellingen weergegeven worden met eventueel een korte toelichting. Dit is natuurlijk maar een eerste begin.

Stelling 7.3.1: Als de kosten van het Commonality Model CO lager zijn dan de kosten van het Basis Model BO is de voorraad van de specifieke component S_3 (S_6) in het Commonality Model CO groter of gelijk aan de voorraad van deze component S_3 (S_6) in het Basis Model BO.

Stelling 7.3.2: Als de kosten van het Commonality Model CO lager zijn dan de kosten van het Basis Model BO is de voorraad van de gezamenlijke component (S_7) in het Commonality Model CO kleiner dan de totale voorraad van de specifieke componenten uit het Basis Model BO (S_4 en S_5), die deze component vervangt.

De stellingen 7.3.1 en 7.3.2 zijn in het artikel van Eynan en Rosenblatt (1996) terug te vinden als property 7 en 8. Eynan en Rosenblatt (1996) geven in de appendix van hun artikel een bewijs voor deze twee stellingen.

Stelling 7.3.3: De voorraad van alle individuele componenten in het Flexible Product Model FO ligt tussen de voorraad van deze individuele componenten in het Basis Model BO en het Commonality Model CO in.

Zoals al eerder is aangetoond, zijn de kosten van het Flexible Product Model FO altijd kleiner of gelijk aan die van het Basis Model BO en het Commonality Model CO. Deze eigenschap geldt vanwege het feit dat één van de oplossingen van het Flexible Product Model FO het Basis Model BO is en één andere het Commonality Model CO. Op basis hiervan valt dan af te leiden dat stelling 7.3.3 geldt.

- Stelling 7.3.4:** Als de kosten van het Double Commonality Model DO lager zijn dan de kosten van het Basis Model BO, dan is de voorraad van de component 7 (8) in het Double Commonality Model DO kleiner dan de totale hoeveelheid voorraad van de componenten uit het Basis Model BO [S_4 en S_5] ($[S_3$ en $S_6]$), die deze componenten vervangen.
- Stelling 7.3.5:** Als de kosten van het Commonality Model COI (uit § 5.2) lager zijn dan de kosten van het Basis Model BOI (uit § 5.1) dan is de voorraad van de specifieke component S_3 (S_6) in het Commonality Model COI is groter dan de voorraad van deze specifieke component in het Basis Model BOI.
- Stelling 7.3.6:** Als de kosten van het Commonality Model COI (uit § 5.2) lager zijn dan de kosten van het Basis Model BOI (uit § 5.1) dan is de voorraad van de gezamenlijke component S_7 in het Commonality Model COI groter dan de totale voorraad van de componenten S_4 en S_5 uit het Basis Model BOI, die deze vervangt.
- Hypothese 7.3.7:** De voorraad van elke afzonderlijke component is in het Commonality Model COI kleiner of gelijk aan de voorraad van deze afzonderlijke component in het Commonality Model CO.

Bij eigenschap 6.1.2 uit paragraaf 6.1 is bewezen, dat de kosten van het Commonality Model COI altijd lager zijn dan de kosten van het Commonality Model CO als het geaggregeerde serviceniveau β van het Commonality Model CO gelijk is aan de individuele serviceniveaus (β_1 en β_2) van het Commonality Model COI. Op basis hiervan lijkt het logisch dat hypothese 7.3.7 nu geldt. In een nader onderzoek kan dit nu bewezen gaan worden.

7.4 Veiligheidsvoorraad en component commonality

Bij de beschrijving van de modellen in dit afstudeerwerkstuk is stilzwijgend de aanname gemaakt, dat de componenten tijdig aanwezig zijn om ze vervolgens te bewerken en zo aan de vraag naar eindproducten te kunnen voldoen. Als dit het geval is, hoeft er geen rekening gehouden te worden met veiligheidsvoorraden. In de praktijk zal er altijd enige tijd zitten tussen het moment waarop de componenten binnenkomen in het bedrijf en het moment waarop ze verwerkt worden tot eindproduct. Als deze periode één week duurt en er wordt geen gebruik gemaakt van een veiligheidsvoorraad dan gebeurt het volgende:

Voorbeeld:

In week 1 bepaalt het bedrijf de vraag naar eindproduct 1 in week 2. Indien deze vraag 30 eenheden is, worden er in week 1 net zoveel componenten aangeschaft en bewerkt die nodig zijn om aan een vraag van 30 eenheden te voldoen. In week 2 zal de werkelijke vraag naar eindproduct 1 in week 2 bekend worden. Indien deze werkelijke vraag meer dan 30 eenheden is zal het bedrijf slechts in staat zijn om 30 eenheden van eindproduct 1 te maken. De overige vraag kan nu niet vervuld

worden.³⁴ Wanneer de werkelijke vraag minder dan 30 eenheden is, zal dat deel dat overblijft in voorraad gaan om aan de vraag van week 3 te kunnen voldoen. Baker (1985) beschrijft dit in zijn artikel als volgt: “We assemble end items to a known demand, but we build components to uncertain demand.” Baker (1985) geeft in zijn artikel een aanzet tot het gebruik van veiligheidsvoorraden bij “Component Commonality”:

Baker (1985) gaat in zijn artikel uit van de volgende voorwaarden:

1. De hoeveelheid componenten, die ingekocht moet worden, wordt bepaald met behulp van een “lot-for-lot” methode.
2. Er zit een “lead-time” van één periode tussen het in voorraad hebben van de componenten en het verwerken van de componenten tot eindproduct.
3. De vraag voor eindproduct j in de huidige periode is bekend.
4. De vraag voor eindproduct j in een toekomstige periode is een normale verdeling met gemiddelde μ_j en standaard deviatie σ_j .

Verder worden de volgende variabelen gedefinieerd:

- m = het aantal verschillende componenten.
- n = het aantal verschillende eindproducten, dat samengesteld wordt.
- a_{ij} = het aantal eenheden van component i dat nodig is om één eenheid van eindproduct j samen te stellen.
- k = veiligheidsfactor.
- S_i = veiligheidsvoorraad voor component i .
- β = serviceniveau volgens P1-servicecriterium.

Baker (1985) gebruikt in zijn artikel een P1-servicecriterium. Dit is de kans dat er geen tekorten zijn gedurende een aflevercyclus. De waarde van de veiligheidsfactor k volgt nu rechtstreeks uit een tabel van de normale verdeling. Hiervoor kan bijvoorbeeld tabel B.1 uit Silver, Pyke en Peterson (1998) gebruikt worden.

Voorbeeld 1: (geen commonality, ongecorreleerde vraag van eindproducten)

$m = 8, n = 3, \sigma_1 = 40, \sigma_2 = 30, \sigma_3 = 40, \beta = 0.9$
 $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 1, a_{42} = a_{52} = 1, a_{63} = a_{73} = a_{83} = 1.$

In voorbeeld 1 worden geen gezamenlijke componenten gebruikt:

- Eindproduct 1 wordt samengesteld uit elk één eenheid van de componenten 1, 2 en 3;
- Eindproduct 2 wordt samengesteld uit elk één eenheid van de componenten 4 en 5;
- Eindproduct 3 wordt samengesteld uit elk één eenheid van de componenten 6, 7 en 8.

Verder is de vraag van de eindproducten ongecorreleerd. De veiligheidsvoorraad S_i voor component i kan nu als volgt gedefinieerd worden: $S_i = k \cdot a_{ij} \cdot \sigma_j$. Aangezien een β

³⁴ Een andere modeluitbreiding is het invoeren van “back-ordering”. In deze situatie wordt het gedeelte van de vraag waaraan in periode 1 niet kan worden voldaan in periode 2 samengesteld. Het nadeel van deze methode is dat de levertijden van het bedrijf op gaan lopen en dit negatief uit kan pakken voor de concurrentiepositie ten opzichte van andere bedrijven.

van 0.9 correspondeert met een veiligheidsfactor k van 1.28 zal de veiligheidsvoorraad voor de acht gebruikte componenten als volgt worden:

Component i	1	2	3	4	5	6	7	8	Totaal
S_i	51	51	51	38	38	51	51	51	382

Voorbeeld 2A: (commonality, ongecorreleerde vraag van eindproducten)

$m = 4, n = 3, \sigma_1 = 40, \sigma_2 = 30, \sigma_3 = 40, \beta = 0.9$

$a_{11} = a_{21} = a_{31} = 1, a_{12} = a_{22} = 1, a_{13} = a_{33} = a_{73} = 1.$

In voorbeeld 2A veranderen de productstructuren als volgt t.o.v. voorbeeld 1:

- Geen veranderingen bij eindproduct 1;
- Bij eindproduct 2 wordt component 4 (5) door component 1 (2) vervangen;
- Bij eindproduct 3 wordt component 6 (8) door component 1 (3) vervangen.

Aangezien de vraag van de eindproducten ongecorreleerd is, kunnen de volgende veiligheidsvoorraden gedefinieerd worden:

$$S_1 = k[\sqrt{a_{11}^2 \sigma_1^2 + a_{12}^2 \sigma_2^2 + a_{13}^2 \sigma_3^2}], S_2 = k[\sqrt{a_{21}^2 \sigma_1^2 + a_{22}^2 \sigma_2^2}], S_3 = k[\sqrt{a_{31}^2 \sigma_1^2 + a_{33}^2 \sigma_3^2}] \text{ en } S_7 = k \cdot a_{73} \cdot \sigma_3$$

Hieruit volgen nu de volgende veiligheidsvoorraden voor de vier gebruikte componenten:

Component i	1	2	3	7	Totaal
S_i	82	64	72	51	269

Ten opzichte van voorbeeld 1 leidt het gebruik van gezamenlijke componenten dus tot een lagere totale veiligheidsvoorraad van de gebruikte componenten.

Ook in het geval dat er meerdere eenheden van een bepaalde component nodig zijn voor het samenstellen van één eenheid van een eindproduct is er sprake van voordeel t.o.v. de situatie waarin er geen gezamenlijke componenten worden gebruikt:

Voorbeeld 2B: (commonality, ongecorreleerde vraag van eindproducten)

$m = 3, n = 3, \sigma_1 = 40, \sigma_2 = 30, \sigma_3 = 40, \beta = 0.9$

$a_{11} = a_{21} = a_{31} = 1, a_{12} = a_{22} = 1, a_{13} = 1, a_{33} = 2.$

In voorbeeld 2B veranderen de productstructuren als volgt t.o.v. voorbeeld 2A:

- Geen veranderingen bij de eindproducten 1 en 2;
- Bij eindproduct 3 wordt component 7 door component 3 vervangen. Voor het maken van één eenheid van eindproduct 3 zijn nu dus twee eenheden van component 3 nodig.

Component i	1	2	3	Totaal
S_i	82	64	114	260

Voorbeeld 3: (commonality, gecorreleerde vraag van eindproducten)

$m = 3, n = 3, \sigma_1 = 40, \sigma_2 = 30, \sigma_3 = 40, \rho_{12} = 0.5, \rho_{13} = -0.6, \rho_{23} = -0.4, \beta = 0.9$
 $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 1, a_{12} = a_{22} = 1, a_{13} = 1, a_{33} = 2.$

De productstructuren in dit voorbeeld zijn gelijk aan die uit voorbeeld 2B. Aangezien er nu sprake is van een gecorreleerde vraag van de eindproducten kunnen de veiligheidsvoorraden als volgt berekend worden:

$$S_i = k \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} 2\rho_{jk} a_{ij} a_{ik} \sigma_j \sigma_k} \right)$$

Hieruit volgt nu de volgende oplossing voor dit voorbeeld:

Component i	1	2	3	Totaal
S_i	63	78	83	224

Uit voorbeeld 3 volgt nu, dat het gecorreleerd zijn van de vraag van de eindproducten gevolgen heeft voor de oplossing van het model. Het gecorreleerd zijn van de vraag van de eindproducten leidt tot het toevoegen van een extra term bij het berekenen van de veiligheidsvoorraden S_i . Indien alle correlaties negatief (positief) zijn, zal deze term ook negatief (positief) zijn. T.o.v. een model met ongecorreleerde vraag (waarbij verder alles hetzelfde blijft) zal de veiligheidsvoorraad nu afnemen (toenemen). Wanneer sommige correlaties positief en andere negatief zijn is het netto-effect van te voren niet te voorspellen.

7.5 Een overzicht van andere mogelijke uitbreidingen

In deze afsluitende paragraaf zal in het kort nog een aantal andere mogelijke uitbreidingen toegelicht worden. Hierbij zal volstaan worden met een korte schets van de uitbreiding en een verwijzing naar de hierbij relevante literatuur.

Gecorreleerde vraag:

In alle modellen, die in dit afstudeerwerkstuk besproken zijn, is uitgegaan van een vraag van de eindproducten, die ongecorreleerd is. In Eynan (1996) en Van der Zanden (2001) worden een Basis Model, Commonality Model en Double Commonality Model besproken, waarbij de vraag van de eindproducten gecorreleerd is. Het invoeren van een gecorreleerde vraag leidt onmiddellijk tot een ingewikkelder model. In Van der Zanden (2001) is een eerste aanzet gemaakt tot het analyseren van deze modellen met een gecorreleerde vraag. Deze analyse is echter niet volledig. Met name bij de modellen met een positief gecorreleerde vraag (§ 3.4 en § 4.4 in Van der Zanden (2001)) zijn er nog een aantal rekenkundige problemen op te lossen. Daarnaast verdient het de aanbeveling om ook bij de modellen met gecorreleerde vraag naar andere verdelingen, dan de uniforme verdeling te gaan kijken.

Beperkte capaciteit:

In dit afstudeerwerkstuk is impliciet de aanname gemaakt, dat er in de modellen sprake is van een onbeperkte productie- en opslagcapaciteit. In één periode wordt de

hoeveelheid eindproduct samengesteld die nodig is, onafhankelijk van hoeveel dit is. In werkelijkheid heeft een bedrijf echter een beperkte productie- en opslagcapaciteit. Dit zal er dus toe leiden, dat in drukke periodes niet aan de volledige vraag voldaan kan worden, omdat er te weinig productie- en opslagcapaciteit aanwezig is. Een probleem, dat overigens ondervangen kan worden door in rustige periodes meer te produceren dan strikt noodzakelijk is, zodat een voorraad opgebouwd kan worden. Daarnaast kan een bedrijf er ook voor kiezen om de opslag van eindproducten uit te besteden aan bedrijven, die hier in gespecialiseerd zijn. Indien er voor gekozen wordt om opslagruimte te huren per m^3 kan hier flexibeler mee omgegaan worden, dan wanneer een bedrijf een eigen opslagruimte laat bouwen. In drukke periodes kan een bedrijf gewoon meer opslagruimte huren om tijdelijk aan de grotere vraag te kunnen voldoen. In het artikel van Gerchak en Henig (1989) wordt een model besproken, waarin zowel aan de opslagcapaciteit als aan de productiecapaciteit een beperkende voorwaarde wordt opgelegd. Daarnaast introduceren Gerchak en Henig (1989) variabelen, die weergeven hoeveel er van een bepaalde component aan het begin van een periode aanwezig is. Indien er dus teveel van een bepaalde component is aangeschaft, kan dit in een volgende periode alsnog voor de productie gebruikt worden. Ook dit is een onderwerp dat in dit afstudeerwerkstuk niet aan bod gekomen is. Tevens is er in hun model de mogelijkheid opgenomen van “backlogging”. Hiervoor wordt een continue variabele α geïntroduceerd met waarden van 0 tot 1. Indien α de waarde 0 heeft, vindt er geen “backlogging” plaats. Alle vraag waaraan in een periode niet voldaan kan worden, gaat nu voor het bedrijf verloren. Als α de waarde 1 heeft, betekent dit dat alle vraag waaraan in een periode niet voldaan kan worden, alsnog in de volgende periode uitgeleverd wordt. Bij een waarde tussen 0 en 1 wordt een gedeelte van de vraag waar niet aan voldaan kan worden in de volgende periode alsnog uitgeleverd.

Verbeteringen bij de besproken modellen:

Aan de besproken modellen in dit afstudeerwerkstuk kunnen nog een aantal verbeteringen worden toegevoegd:

Simulaties uit hoofdstuk 4: Bij het berekenen van deze simulaties, is ter vereenvoudiging de voorwaarde opgelegd, dat de vraagverdelingen van de beide eindproducten aan elkaar gelijk zijn. Verder wordt bij het berekenen van de oplossing van de simulaties voor het Commonality Model CO (§ 4.2) en het Flexible Product Model FO (§ 4.3) een eenvoudige methode gebruikt, die in deze paragrafen wordt uitgelegd, om deze oplossing te vinden. In een eventueel nader onderzoek zou met name hier nog winst te behalen zijn, om zo ook de rekentijd van de gebruikte MATLAB-programma's te verminderen.

Individueel serviceniveau: In hoofdstuk 5 zijn het Basis Model BOI en het Commonality Model COI met een individueel serviceniveau besproken. In de literatuur is hier minder informatie over terug te vinden, dan bij modellen met een geaggregeerd serviceniveau. Dit zal zeer zeker te maken hebben met het feit, dat het model een stuk gecompliceerder wordt, wanneer het geaggregeerde serviceniveau door een individueel serviceniveau vervangen wordt. Wat betreft het individueel serviceniveau kan nog nader onderzoek plaats vinden door gebruik te maken van andere verdelingen dan de uniforme verdeling. Hierbij zal dan van simulatie gebruik gemaakt moeten gaan worden. Verder kan ook nog gekeken worden naar het Flexible Product Model en het Double Commonality Model met een individueel

serviceniveau. Vanzelfsprekend zal dan ook de kostenanalyse in hoofdstuk 6 verder uitgebreid kunnen worden.

Literatuuropgave

Baker, K.R., 1985, Safety Stocks and Component Commonality. *Journal of Operations Management*, **6** (1), 13-22.

Baker, K.R., Magazine, M.J. en Nuttle, Henry L.W., 1986, The Effect Of Commonality On Safety Stock In A Simple Inventory Model. *Management Science*, **32** (8), 982-988.

Bagchi, U en Gutierrez, G., 1992, Effect of increasing component commonality on service level and holding cost. *Naval Research Logistics*, **39**, 815-832.

Eynan, A., 1996, The impact of demands' correlation on the effectiveness of component commonality. *International Journal of Production Research*, **34** (6), 1581-1602.

Eynan, A. en Rosenblatt, Meir J., 1996, Component commonality effects on inventory costs. *IIE Transactions*, **28**(1), 93-104.

Eynan, A en Rosenblatt, Meir J., 1997, An analysis of purchasing costs as the number of products' components is reduced. *Production and Operations Management*, **6** (4), 388-397.

Van der Genugten, B.B., 1986, *Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek deel 1*, H.E. Stenfert Kroese B.V., Leiden.

Gerchak, Y. en Henig, M., 1989, Component commonality in assemble-to-order systems: Models and properties. *Naval Research Logistics*, **36**, 61-68.

Hillier, M.S., 1999, Component commonality in a multiple-period inventory model with service level constraints. *International Journal of Production Research*, **37**(12), 2665-2683.

Mirchandani, P en Mishra, Ajay K., 2000, Component Commonality : Models with Product-Specific Service Constraints, Niet gepubliceerd artikel, University of Pittsburgh.

Perera, H.S.C., Nagarur, N en Tabucanon, Mario T., 1999, Component part standardization : A way to reduce the life-cycle costs of products. *International Journal of Production Economics*, **60-61**, 109-116.

Qi, L. en Jiang, H., 1997, Semismooth Karush-Kuhn-Tucker Equations and Convergence Analysis of Newton and Quasi-Newton Methods for Solving These Equations. *Mathematics of Operations Research*, **22**(2), 301-325.

Silver, E.A., Pyke, D.F. en Peterson, R., 1998, *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, John Wiley & Sons, New York.

Van der Zanden, W.J., 2001, Standaardisatie van componenten: De mogelijkheid van voorraadkostenbesparingen voor specifieke gevallen. Derdejaarsscriptie, Katholieke Universiteit Brabant, departement Econometrie en Operations Research.

Appendix A: Modelberekeningen bij hoofdstuk 2

A.1 Het Basis Model BO

Het Basis Model BO kan d.m.v. de Lagrangemethode en de substitutiemethode worden opgelost. Voor range 1 zal van beide methodes een uitgebreide afleiding worden gegeven. In de ranges 2A en 2B komt slechts één variabele voor (S_3 of S_6). Oplossen van het model met de Lagrange methode heeft nu geen zin. De oplossing van range 3 is triviaal. Verdere berekeningen van het Basis Model BO zijn in appendix A van Van der Zanden (2001) te vinden.

Lagrangemethode:

$$\ell = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 - \lambda(S_3S_6 - \beta b_1b_2) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_3} = c_3 + c_4 - \lambda(S_6/b_1b_2) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_6} = c_5 + c_6 - \lambda(S_3/b_1b_2) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = S_3S_6/b_1b_2 - \beta = 0 \quad (4)$$

$$\text{Uit (2) en (3) volgt: } \lambda = \frac{b_1b_2(c_3 + c_4)}{S_6} = \frac{b_1b_2(c_5 + c_6)}{S_3} \Rightarrow S_3 = \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)} S_6 \quad (5)$$

$$(5) \text{ invullen in (4) geeft: } \beta = \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)} S_6^2 \Rightarrow S_6 = \sqrt{\beta b_1b_2 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}} \quad (6)$$

$$(6) \text{ invullen in (5) geeft: } S_3 = \left(\sqrt{\frac{(c_5 + c_6)^2}{(c_3 + c_4)^2}} \right) \sqrt{\beta b_1b_2 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}} \Rightarrow S_3 = \sqrt{\beta b_1b_2 \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)}} \quad (7)$$

Na het berekenen van de waarden van de beslissingsvariabelen moet het gebied van range 1 nog bepaald worden.

$$S_3 < b_1 \Rightarrow \sqrt{\beta b_1b_2 \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)}} < b_1 \Rightarrow \beta b_2 \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)} < b_1 \Rightarrow \beta < \frac{b_1(c_3 + c_4)}{b_2(c_5 + c_6)} \quad (7)$$

$$S_6 < b_2 \Rightarrow \sqrt{\beta b_1b_2 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}} < b_2 \Rightarrow \beta b_1 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)} < b_2 \Rightarrow \beta < \frac{b_2(c_5 + c_6)}{b_1(c_3 + c_4)} \quad (8)$$

$$\text{Uit (7) en (8) volgt nu: } \beta < \min \left(\frac{b_1(c_3 + c_4)}{b_2(c_5 + c_6)}, \frac{b_2(c_5 + c_6)}{b_1(c_3 + c_4)} \right) \quad (9)$$

Substitutiemethode:

$$\text{Min } T_{BO} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d. } \beta = S_3 S_6 / b_1 b_2 \quad (2)$$

$$(2) \text{ valt te schrijven als: } S_3 S_6 = \beta b_1 b_2 \Leftrightarrow S_6 = \beta b_1 b_2 / S_3 \quad (3)$$

$$(3) \text{ invullen in (1) geeft: } T_{BO} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)\beta b_1 b_2 / S_3$$

$$\frac{\partial T_{BO}}{\partial S_3} = c_3 + c_4 - \frac{(c_5 + c_6)\beta b_1 b_2}{S_3^2} = 0 \Leftrightarrow S_3 = \sqrt{\beta b_1 b_2 \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)}} \quad (4)$$

$$(4) \text{ invullen in (3) geeft } S_6 = \frac{\beta b_1 b_2}{\sqrt{\beta b_1 b_2 \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)}}} = \sqrt{\beta b_1 b_2 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}}$$

A.2 Het Commonality Model CO

Ook bij het Commonality Model CO kan zowel de Lagrange, als de substitutiemethode gebruikt worden. Voor range 1 zullen beide methodes worden uitgevoerd. Verdere berekeningen van het Commonality Model CO zijn in appendix A van Van der Zanden (2001) te vinden.

Lagrangemethode:

$$\ell = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7 - \lambda(2S_3 S_6 - (S_3 + S_6 - S_7)^2 - 2\beta b_1 b_2) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_3} = c_3 + 2\lambda(S_3 - S_7) = 0 \quad (2) \quad \frac{\partial \ell}{\partial S_6} = c_6 + 2\lambda(S_6 - S_7) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_7} = c_7 + 2\lambda(S_7 - S_3 - S_6) = 0 \quad (4) \quad \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = 2S_3 S_6 - (S_3 + S_6 - S_7)^2 - 2\beta b_1 b_2 = 0 \quad (5)$$

(2) t/m (4) zijn als volgt te schrijven:

$$S_3 = S_7 - \frac{c_3}{2\lambda}, \quad S_6 = S_7 - \frac{c_6}{2\lambda}, \quad S_7 = \frac{c_3 + c_6 + c_7}{2\lambda} \quad (6)$$

$$\text{Invullen van (6) in (5) geeft } \lambda = \sqrt{\frac{2(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - c_7^2}{8\beta b_1 b_2}} \quad (7)$$

(7) invullen in (6) geeft nu de volgende waarden:

$$S_3 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_6 + c_7) / a, \quad S_6 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_3 + c_7) / a, \quad S_7 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_3 + c_6 + c_7) / a$$

$$\text{met } a = \sqrt{(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - 0.5c_7^2}$$

Bepaling range:

$$S_3 < b_1 \Rightarrow \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_6 + c_7)/a < b_1 \Rightarrow \beta < \frac{b_1}{b_2} * \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2$$

$$S_6 < b_2 \Rightarrow \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_3 + c_7)/a < b_2 \Rightarrow \beta < \frac{b_2}{b_1} * \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2$$

Substitutiemethode:

$$\text{Min } T_{CO} = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.d.v. } S_3 S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_7)^2 = \beta b_1 b_2 \quad (2)$$

(2) valt om te schrijven, waarbij S_7 een functie van S_3 en S_6 wordt:

$$S_7 = S_3 + S_6 - \sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2} \quad (3)$$

$$(1) \text{ valt nu te schrijven als: } T_{CO} = (c_3 + c_7)S_3 + (c_6 + c_7)S_6 - c_7 \sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_{CO}}{\partial S_3} = (c_3 + c_7) - c_7 * \frac{S_6}{\sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2}} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_{CO}}{\partial S_6} = (c_6 + c_7) - c_7 * \frac{S_3}{\sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2}} = 0 \quad (6)$$

$$\text{Uit (5) volgt: } S_3 = \frac{c_7^2 S_6}{2(c_3 + c_7)^2} + \frac{\beta b_1 b_2}{S_6} \quad (7)$$

Invullen van (7) in (4) geeft:

$$T_{CO} = \frac{(c_3 c_7^2 + c_7^3) S_6}{2(c_3 + c_7)^2} + \frac{\beta b_1 b_2 (c_3 + c_7)}{S_6} + (c_6 + c_7) S_6 - \frac{c_7^2 S_6}{c_3 + c_7} \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_{CO}}{\partial S_6} = \frac{c_3 c_7^2 + c_7^3}{2(c_3 + c_7)^2} + (c_6 + c_7) - \frac{c_7^2}{c_3 + c_7} = \frac{\beta b_1 b_2 (c_3 + c_7)}{S_6^2} \quad (9)$$

$$\text{Uit (9) valt de waarde van } S_6 \text{ af te leiden: } S_6 = \sqrt{\beta b_1 b_2} (c_3 + c_7)/a \quad (10)$$

$$\text{Invullen van (10) in (7) geeft: } S_3 = \sqrt{\beta b_1 b_2} (c_6 + c_7)/a \quad (11)$$

$$\text{Invullen van (10) en (11) in (3) geeft: } S_7 = \sqrt{\beta b_1 b_2} (c_3 + c_6 + c_7)/a \quad (12)$$

Oplossing Hillier:

Hillier (1999) geeft bij range 2A de volgende uitkomst voor S_7 :

$$S_7 = \left[0.5 \left(\frac{c_7}{c_6 + c_7} \right)^2 - \frac{c_7}{c_6 + c_7} + 1 \right] b_1 + \beta b_2 =$$

$$\left[\frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2} - \frac{2c_6 c_7 + 2c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2} + \frac{2c_6^2 + 4c_6 c_7 + 2c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2} \right] b_1 + \beta b_2 =$$

$$\left[\frac{c_7^2 + 2c_6^2 + 2c_6 c_7}{2(c_6 + c_7)^2} \right] b_1 + \beta b_2 = \left[\frac{c_6^2}{2(c_6 + c_7)^2} + 0.5 \right] b_1 + \beta b_2$$

Na omrekenen kan geconcludeerd worden dat dit dezelfde uitkomst is als Eynan en Rosenblatt (1996) geven.

A.3 Het Flexible Product Model FO

Bij het berekenen van de oplossing van het Flexible Product Model FO zijn naast de gelijkheidsvoorwaarde van het serviceniveau, de volgende twee ongelijkheidsvoorwaarden nodig: $S_6 \leq S_5 + S_7$ en $S_3 \leq S_4 + S_7$. Het niet toevoegen van deze ongelijkheidsvoorwaarden leidt tot een model dat met behulp van de Lagrange- en substitutiemethode niet oplosbaar is. Indien de twee eerdergenoemde ongelijkheidsvoorwaarden wel worden meegenomen, kan het model niet meer m.b.v. de Lagrange- of substitutiemethode worden opgelost, maar is de Kuhn-Tucker methode nodig.

In deze paragraaf wordt voor range 1 aangetoond, dat het niet toevoegen van de ongelijkheidsvoorwaarden (en dus de Lagrange- of substitutiemethode gebruiken) niet tot een oplossing leidt. Hierna wordt voor alle ranges de Kuhn-Tucker methode gebruikt.

Lagrangemethode:

$$\text{Min } T_{FO} = c_3 S_3 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 S_6 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d. } \beta b_1 b_2 = S_3 S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7)^2 \quad (2)$$

$$\text{Lagrange functie: } \ell = c_3 S_3 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 S_6 + c_7 S_7 - c_4 \sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2} + c_5 S_5 + c_6 S_6 + c_7 S_7 - \lambda(S_3 S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7)^2 - \beta b_1 b_2) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_3} = c_3 - \lambda(S_3 - S_4 - S_5 - S_7) = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial S_4} = c_4 - \lambda(-S_3 - S_6 + S_4 + S_5 + S_7) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_5} = c_5 - \lambda(-S_3 - S_6 + S_4 + S_5 + S_7) = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial S_6} = c_6 - \lambda(S_3 - S_4 - S_5 - S_7) = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_7} = c_7 - \lambda(-S_3 - S_6 + S_4 + S_5 + S_7) = 0,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = S_3 S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7)^2 - \beta b_1 b_2$$

De afgeleide naar λ valt te schrijven als: $S_4 = S_3 + S_6 - S_5 - S_7 - \sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2}$

Invullen van de uitdrukking voor S_4 in de vijf overige afgeleiden geeft:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial S_3} &= c_3 - \lambda(-S_6 + \sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2}) = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial S_4} = c_4 + \lambda(\sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2}) = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial S_5} &= c_5 + \lambda(\sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2}) = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial S_6} = c_6 - \lambda(-S_3 + \sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2}) = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial S_7} &= c_7 + \lambda(\sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2}) = 0 \end{aligned}$$

In de bovenstaande vergelijkingen komen enkel S_3 en S_6 voor. Hieruit volgt dan ook onmiddellijk dat het model niet op deze wijze opgelost kan worden omdat de overige variabelen nu niet bepaald kunnen worden.

Substitutiemethode:

$$\text{Min} \quad T_{FO} = c_3 S_3 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 S_6 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d.} \quad \beta b_1 b_2 = S_3 S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7)^2 \quad (2)$$

$$(2) \text{ valt te schrijven als: } S_4 = S_3 + S_6 - S_5 - S_7 - \sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2} \quad (3)$$

Invullen van (3) in (1) en (2) geeft:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad T_{FO} &= c_3 S_3 + c_4 S_3 + c_4 S_6 - c_4 S_5 - c_4 S_7 - c_4 \sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2} \\ &+ c_5 S_5 + c_6 S_6 + c_7 S_7 \end{aligned} \quad (4)$$

Differentiëren van (4) geeft de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial S_3} &= c_3 + c_4 - c_4 \frac{S_6}{\sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2}} = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial S_5} = -c_4 + c_5 = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial S_6} &= c_4 + c_6 - c_4 \frac{S_3}{\sqrt{2S_3 S_6 - 2\beta b_1 b_2}} = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial S_7} = -c_4 + c_7 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Met behulp van de 4 afgeleiden uit (5) en vergelijking (3) moet het model nu opgelost worden. Hieruit volgt echter al onmiddellijk dat S_5 en S_7 op deze wijze niet te bepalen zijn en het model zo dus niet oplosbaar is.

Kuhn-Tucker methode:

Range 1:

$$\text{Min} \quad T_{FO} = c_3 S_3 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 S_6 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d.} \quad \beta b_1 b_2 = S_3 S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7)^2 \quad (2)$$

$$S_6 \leq S_5 + S_7$$

$$S_3 \leq S_4 + S_7$$

$$(2) \text{ valt te schrijven als: } S_4 = S_3 + S_6 - S_5 - S_7 - \sqrt{2S_3S_6 - 2\beta_1b_2} \quad (3)$$

Invullen van (3) in (1) en (2) geeft:

$$\begin{aligned} \text{Min } T_{FO} = & c_3S_3 + c_4S_3 + c_4S_6 - c_4S_5 - c_4S_7 - c_4\sqrt{2S_3S_6 - 2\beta_1b_2} \\ & + c_5S_5 + c_6S_6 + c_7S_7 \end{aligned}$$

$$\text{o.v.d. } S_6 \leq S_5 + S_7$$

$$S_5 \leq S_6 - \sqrt{2S_3S_6 - 2\beta_1b_2}$$

$$\begin{aligned} \text{Lagrange functie: } \ell = & c_3S_3 + c_4S_3 + c_4S_6 - c_4S_5 - c_4S_7 - c_4\sqrt{2S_3S_6 - 2\beta_1b_2} + c_5S_5 \\ & + c_6S_6 + c_7S_7 - \lambda_1(S_6 - S_5 - S_7) - \lambda_2(S_5 - S_6 + \sqrt{2S_3S_6 - 2\beta_1b_2}) \end{aligned}$$

Kuhn-Tucker toepassen:

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_3} = c_3 + c_4 - c_4 \frac{S_6}{\sqrt{2S_3S_6 - 2\beta_1b_2}} - \lambda_2 \frac{S_6}{\sqrt{2S_3S_6 - 2\beta_1b_2}} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_5} = -c_4 + c_5 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial S_7} = -c_4 + c_7 + \lambda_1 = 0 \quad (5) - (6)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_6} = c_4 + c_6 - \lambda_1 + \lambda_2 - c_4 \frac{S_3}{\sqrt{2S_3S_6 - 2\beta_1b_2}} - \lambda_2 \frac{S_3}{\sqrt{2S_3S_6 - 2\beta_1b_2}} = 0 \quad (7)$$

$$S_6 \leq S_5 + S_7, \quad S_5 \leq S_6 - \sqrt{2S_3S_6 - 2\beta_1b_2}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1(S_6 - S_5 - S_7) = 0, \quad \lambda_2(S_5 - S_6 + \sqrt{2S_3S_6 - 2\beta_1b_2}) = 0 \quad (8) - (9)$$

$$\text{Uit (5) en (6) volgt: } \lambda_1 = c_4 - c_7, \quad \lambda_2 = c_5 - c_7 \quad (10)$$

$$(10) \text{ invullen in (4) geeft: } S_3 = \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2 S_6}{2(c_3 + c_4)^2} + \frac{\beta_1 b_2}{S_6} \quad (11)$$

$$(10) \text{ invullen in (7) geeft: } S_6 = \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2 S_3}{2(c_5 + c_6)^2} + \frac{\beta_1 b_2}{S_3} \quad (12)$$

$$(12) \text{ invullen in (11) geeft: } S_3 = \sqrt{\beta_1 b_2} * \frac{c_5 + c_6}{d} \quad (13)$$

$$\text{met } d = \sqrt{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - 0.5(c_4 + c_5 - c_7)^2}$$

$$(13) \text{ invullen in (12) geeft: } S_6 = \sqrt{\beta_1 b_2} * \frac{c_3 + c_4}{d} \quad (14)$$

$$(13) \text{ en (14) invullen in (9) geeft: } S_5 = \sqrt{\beta_1 b_2} * \frac{c_3 + c_7 - c_5}{d} \quad (15)$$

$$(15) \text{ en (12) invullen in (8) geeft: } S_7 = \sqrt{\beta_1 b_2} * \frac{c_4 + c_5 - c_7}{d} \quad (16)$$

$$(16), (15), (14) \text{ en (13) invullen in (3) geeft: } S_4 = \sqrt{\beta_1 b_2} * \frac{c_6 + c_7 - c_4}{d} \quad (17)$$

Bepaling range:

$$S_3 \leq b_1 \Rightarrow \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_5 + c_6}{d} \leq b_1 \Rightarrow \beta b_2 \frac{(c_5 + c_6)^2}{d^2} \leq b_1 \Rightarrow \beta \leq \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{d}{c_5 + c_6} \right)^2$$

$$S_6 \leq b_2 \Rightarrow \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_3 + c_4}{d} \leq b_2 \Rightarrow \beta b_1 \frac{(c_3 + c_4)^2}{d^2} \leq b_2 \Rightarrow \beta \leq \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{d}{c_3 + c_4} \right)^2$$

Aanvullende voorwaarden:

$$S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_4 + c_5}{d} > 0$$

Er kan aangenomen worden dat $c_7 \leq c_4 + c_5$. Indien dit niet het geval is heeft het geen nut om de gezamenlijke component te gebruiken, daar deze altijd duurder is dan de componenten, die hij vervangt.

$$S_4 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_6 + c_7 - c_4}{d} \leq \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_5 + c_6}{d} = S_3$$

$$S_5 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_3 + c_7 - c_5}{d} \leq \sqrt{\beta b_1 b_2} * \frac{c_3 + c_4}{d} = S_6$$

Range 2A:

$$\text{Min } T_{FO} = c_3 b_1 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 S_6 + c_7 S_7$$

$$\text{o.v.d. } \beta b_1 b_2 = b_1 S_6 - 0.5(b_1 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7)^2$$

$$S_6 \leq S_5 + S_7$$

$$b_1 \leq S_4 + S_7$$

$$\text{Lagrange functie: } \ell = c_3 b_1 + c_4 b_1 + c_4 S_6 - c_4 S_5 - c_4 S_7 - c_4 \sqrt{2b_1 S_6 - 2\beta b_1 b_2} \\ + c_5 S_5 + c_6 S_6 + c_7 S_7 - \lambda_1 (S_6 - S_5 - S_7) - \lambda_2 (S_5 - S_6 + \sqrt{2b_1 S_6 - 2\beta b_1 b_2})$$

Kuhn-Tucker toepassen:

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_5} = -c_4 + c_5 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial S_7} = -c_4 + c_7 + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_6} = c_4 + c_6 - c_4 \frac{2b_1}{\sqrt{2b_1(S_6 - \beta b_2)}} - \lambda_1 \left(\frac{2b_1}{\sqrt{2b_1(S_6 - \beta b_2)}} - 1 \right) = 0$$

$$S_6 \leq S_5 + S_7, \quad S_5 \leq S_6 - \sqrt{2b_1(S_6 - \beta b_2)}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1 (S_6 - S_5 - S_7) = 0, \quad \lambda_2 (S_5 - S_6 + \sqrt{2b_1(S_6 - \beta b_2)}) = 0$$

Bepaling Range:

$$S_6 \leq b_2 \Rightarrow \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_5 + c_6)^2} b_1 + \beta b_2 \leq b_2 \Rightarrow \beta \leq 1 - \frac{b_1}{b_2} * \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_5 + c_6)^2}$$

Aanvullende voorwaarden:

$$S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7 = \left(1 - \frac{c_6 + c_7 - c_4}{c_5 + c_6}\right) b_1 = \frac{c_4 + c_5 - c_7}{c_5 + c_6} b_1 > 0$$

$$c_7 \leq c_4 + c_5 \Rightarrow c_6 + c_7 - c_4 \leq c_5 + c_6 \Rightarrow \frac{c_6 + c_7 - c_4}{c_5 + c_6} b_1 \leq b_1 \Rightarrow S_4 \leq b_1 = S_3$$

$$S_5 = \beta b_2 + \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_5 + c_6)^2} b_1 - \frac{c_4 + c_5 - c_7}{c_5 + c_6} b_1 \leq \beta b_2 + \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_5 + c_6)^2} b_1 = S_6$$

Range 2B:

$$\text{Min } T_{FO} = c_3 S_3 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 b_2 + c_7 S_7$$

$$\text{o.v.d. } \beta b_1 b_2 = S_3 b_2 - 0.5(S_3 + b_2 - S_4 - S_5 - S_7)^2$$

$$b_2 \leq S_5 + S_7$$

$$S_3 \leq S_4 + S_7$$

$$\text{Lagrange functie: } \ell = c_3 S_3 + c_4 S_3 + c_4 b_2 - c_4 S_5 - c_4 S_7 - c_4 \sqrt{2b_2(S_3 - \beta b_1)} + c_5 S_5 + c_6 b_2 + c_7 S_7 - \lambda_1(b_2 - S_5 - S_7) - \lambda_2(S_5 - b_2 + \sqrt{2b_2(S_3 - \beta b_1)})$$

Kuhn-Tucker toepassen:

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_3} = c_3 + c_4 - c_4 * \frac{b_2}{\sqrt{2b_2(S_3 - \beta b_1)}} - \lambda_1 * \frac{b_2}{\sqrt{2b_2(S_3 - \beta b_1)}} = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_5} = -c_4 + c_5 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \frac{\partial \ell}{\partial S_7} = -c_4 + c_7 + \lambda_1 = 0$$

$$b_2 \leq S_5 + S_7, S_5 \leq b_2 - \sqrt{2b_2(S_3 - \beta b_1)}, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1(b_2 - S_5 - S_7) = 0, \lambda_2(S_5 - b_2 + \sqrt{2S_3 b_2 - 2\beta b_1 b_2}) = 0$$

Bepaling range:

$$S_3 \leq b_1 \Rightarrow \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_3 + c_4)^2} b_2 + \beta b_1 \leq b_1 \Rightarrow \beta \leq 1 - \frac{b_2}{b_1} * \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_3 + c_4)^2}$$

Aanvullende voorwaarden:

$$S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7 = (1 - \frac{c_3 + c_7 - c_5}{c_3 + c_4}) b_2 = \frac{c_4 + c_5 - c_7}{c_3 + c_4} b_2 > 0$$

$$S_4 = \beta b_1 + \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_3 + c_4)^2} b_2 - \frac{c_4 + c_5 - c_7}{c_3 + c_4} b_2 \leq \beta b_1 + \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_3 + c_4)^2} b_2 = S_3$$

$$c_7 \leq c_4 + c_5 \Rightarrow c_3 + c_7 - c_5 \leq c_3 + c_4 \Rightarrow \frac{c_3 + c_7 - c_5}{c_3 + c_4} b_2 \leq b_2 \Rightarrow S_5 \leq b_2 = S_6$$

Range 3:

$$\text{Min } T_{FO} = c_3 b_1 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 b_2 + c_7 S_7$$

$$\text{o.v.d. } \beta b_1 b_2 = b_1 b_2 - 0.5(b_1 + b_2 - S_4 - S_5 - S_7)^2$$

$$b_2 \leq S_5 + S_7$$

$$b_1 \leq S_4 + S_7$$

Lagrange functie: $\ell = c_3b_1 + c_4b_1 + c_4b_2 - c_4S_5 - c_4S_7 - c_4\sqrt{2b_1b_2(1-\beta)} + c_5S_5 + c_6b_2 + c_7S_7 - \lambda_1(b_2 - S_5 - S_7) - \lambda_2(S_5 - b_2 + \sqrt{2b_1b_2(1-\beta)})$

Kuhn-Tucker toepassen:

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_5} = -c_4 + c_5 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial \ell}{\partial S_7} = -c_4 + c_7 + \lambda_1 = 0$$

$$b_2 \leq S_5 + S_7, \quad S_5 \leq b_2 - \sqrt{2b_1b_2(1-\beta)}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1(b_2 - S_5 - S_7) = 0, \quad \lambda_2(S_5 - b_2 + \sqrt{2(1-\beta)b_1b_2}) = 0$$

Ondergrens range 3:

(1): Range 2A is de opvolger³⁵ van range 1,

$$\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{d}{c_5 + c_6} \right)^2 < \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{d}{c_3 + c_4} \right)^2 \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{c_4 + c_5 - c_7}{2(c_5 + c_6)} \right)^2 < \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{c_4 + c_5 - c_7}{2(c_3 + c_4)} \right)^2 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{c_4 + c_5 - c_7}{2(c_5 + c_6)} \right)^2 > 1 - \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{c_4 + c_5 - c_7}{2(c_3 + c_4)} \right)^2$$

(2): Range 2B is de opvolger van range 1,

De ongelijkheidstekens in de bovenstaande vergelijking moeten nu omgewisseld worden.

Aanvullende voorwaarden:

$$S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7 = b_1 + b_2 - b_1 + \sqrt{2b_1b_2(1-\beta)} - b_2 + \sqrt{2b_1b_2(1-\beta)} -$$

$$\sqrt{2b_1b_2(1-\beta)} = \sqrt{2b_1b_2(1-\beta)} > 0$$

$$S_4 = b_1 - \sqrt{2b_1b_2(1-\beta)} \leq b_1 = S_3, \quad S_5 = b_2 - \sqrt{2b_1b_2(1-\beta)} \leq b_2 = S_6$$

A.4 Het Double Commonality Model DO

Bij het Double Commonality Model DO is er slechts een variabele (S_7) die berekend moet worden. Hierdoor hoeft enkel de substitutiemethode te worden gebruikt. In alle ranges volgt de uitkomst direct uit het gelijkstellen van ASL aan β . Verdere berekeningen van het Double Commonality Model DO zijn terug te vinden in appendix A van Van der Zanden (2001).

³⁵ Met range 2A is de opvolger van range 1 wordt bedoeld: Bij vastliggende componenten (b's en c's) wordt eerst $\beta = 0$ genomen. Vervolgens wordt steeds een iets grotere waarde voor β genomen. range 2A is nu de opvolger van range 1 als geldt dat bij een bepaalde waarde van β range 1 verlaten wordt en range 2A de eerstvolgende range is, die geldig wordt.

Appendix B: Kostenberekeningen bij hoofdstuk 3

B.1 Kostenvergelijking tussen de vier modellen (§ 3.1)

De kosten van het DO en FO model zijn te vinden in de tabellen 9 en 10 in paragraaf 3.1. De voorwaarden voor β van het DO model staan in tabel 4 in paragraaf 2.4, die van het FO model staan in tabel 3 in paragraaf 2.3.

Eigenschap 3.1.4:

$$T_{FO} < T_{DO} \text{ als: } c_7 + c_8 > \sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - (c_4 + c_5 - c_7)^2} = d\sqrt{2}$$

Range 1 bij FO en range 1 bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = d\sqrt{b_1 b_2 / \beta} \text{ en } dT_{DO}/d\beta = (c_7 + c_8) \sqrt{b_1 b_2 / 2\beta}$$

De kosten van FO zijn lager dan die van DO als $dT_{FO}/d\beta \leq dT_{DO}/d\beta$. Dit is enkel het geval als $c_7 + c_8 > d\sqrt{2}$ geldt.

Range 1 bij FO en range 2A bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = d\sqrt{b_1 b_2 / \beta} <^1 db_2 \sqrt{2} <^2 (c_7 + c_8) b_2 = dT_{DO}/d\beta$$

- (1) Bij range 2A van DO geldt: $b_1/2b_2 < \beta \Leftrightarrow b_1 < 2\beta b_2$
- (2) Hiervoor moet gelden: $c_7 + c_8 > d\sqrt{2}$

Range 1 bij FO en range 2B bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = d\sqrt{b_1 b_2 / \beta} <^1 db_1 \sqrt{2} <^2 (c_7 + c_8) b_1 = dT_{DO}/d\beta$$

- (1) Bij range 2B van DO geldt: $b_2/2b_1 < \beta \Leftrightarrow b_2 < 2\beta b_1$
- (2) Hiervoor moet gelden: $c_7 + c_8 > d\sqrt{2}$

Range 1 bij FO en range 3 bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = d\sqrt{b_1 b_2 / \beta} <^1 d\sqrt{b_1 b_2 / (1 - \beta)} <^2 (c_7 + c_8) \sqrt{b_1 b_2 / 2(1 - \beta)}$$

- (1) Bij range 3 van het DO model geldt: $\beta \geq \max(1 - b_1/2b_2, 1 - b_2/2b_1)$
Als $b_1 < b_2$ dan: $b_1 < b_2 \Rightarrow b_1/2b_2 < b_2/2b_2 \Rightarrow b_1/2b_2 < 1/2 \Rightarrow 1 - b_1/2b_2 > 1/2$
Als $b_2 < b_1$ dan: $b_2 < b_1 \Rightarrow b_2/2b_1 < b_1/2b_1 \Rightarrow b_2/2b_1 < 1/2 \Rightarrow 1 - b_2/2b_1 > 1/2$
Hieruit volgt dus dat $\beta > 0.5$. Dus $1 - \beta < \beta$.
- (2) Hiervoor moet gelden: $c_7 + c_8 > d\sqrt{2}$.

Range 2A bij FO en range 1 bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_5 + c_6) b_2 = (c_5 + c_6) \sqrt{b_2^2} = (c_5 + c_6) \sqrt{b_1 b_2 / (2b_1/2b_2)} <^1 (c_5 + c_6) \sqrt{b_1 b_2 / 2\beta} \\ \leq (c_7 + c_8) \sqrt{b_1 b_2 / 2\beta} = dT_{DO}/d\beta$$

- (1) Volgt uit de voorwaarde voor β bij range 1 van DO.

Range 2A bij FO en range 2A bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_5 + c_6) b_2 \leq (c_7 + c_8) b_2 = dT_{FO}/d\beta$$

Range 2A bij FO en range 2B bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_5 + c_6)b_2 <^1 (c_5 + c_6)b_1 \leq (c_7 + c_8)b_1 = dT_{DO}/d\beta$$

(1) Uit de voorwaarde voor β bij range 2B van DO volgt:

$$\frac{b_2}{2b_1} < 1 - \frac{b_2}{2b_1} \Rightarrow b_2 < b_1$$

Range 2A bij FO en range 3 bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_5 + c_6)b_2 = \frac{(c_5 + c_6)b_1b_2}{\sqrt{b_1^2}} = \frac{(c_5 + c_6)b_1b_2}{\sqrt{2(b_1/2b_2)b_1b_2}} \leq^1 \frac{(c_7 + c_8)b_1b_2}{\sqrt{2(1-\beta)b_1b_2}} = dT_{DO}/d\beta$$

(1) Volgt uit de voorwaarde voor β bij range 3 van DO.

Range 2B bij FO en range 1 bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_3 + c_4)b_1 = (c_3 + c_4)\sqrt{b_1^2} = (c_3 + c_4)\sqrt{b_1b_2/(2b_2/2b_1)} <^1 (c_3 + c_4)\sqrt{b_1b_2/2\beta} \leq (c_7 + c_8)\sqrt{b_1b_2/2\beta} = dT_{DO}/d\beta$$

(1) Volgt uit de voorwaarde voor β bij range 1 van DO.

Range 2B bij FO en range 2A bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_3 + c_4)b_1 <^1 (c_3 + c_4)b_2 \leq (c_7 + c_8)b_2 = dT_{DO}/d\beta$$

(1) Uit de voorwaarde voor β bij range 2A van DO volgt:

$$\frac{b_1}{2b_2} < 1 - \frac{b_1}{2b_2} \Rightarrow b_1 < b_2$$

Range 2B bij FO en range 2B bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_3 + c_4)b_1 \leq (c_7 + c_8)b_1 = dT_{DO}/d\beta$$

Range 2B bij FO en range 3 bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_3 + c_4)b_1 = \frac{(c_3 + c_4)b_1b_2}{\sqrt{b_2^2}} = \frac{(c_3 + c_4)b_1b_2}{\sqrt{2(b_2/2b_1)b_1b_2}} \leq^1 \frac{(c_7 + c_8)b_1b_2}{\sqrt{2(1-\beta)b_1b_2}} = dT_{DO}/d\beta$$

(1) Volgt uit de voorwaarde voor β bij range 3 van DO.

Range 3 bij FO en range 1 bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_4 + c_5 - c_7)\sqrt{b_1b_2/(2\beta)} \leq^1 (c_7 + c_8)\sqrt{b_1b_2/(2\beta)} = dT_{DO}/d\beta$$

(1) $(c_4 + c_5 - c_7) < (c_4 + c_5) \leq (c_7 + c_8)$

Range 3 bij FO en range 2A bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_4 + c_5 - c_7)\sqrt{b_1b_2/(2\beta)} <^1 (c_4 + c_5 - c_7)\sqrt{b_1b_2/(2b_2/2b_1)} = (c_4 + c_5 - c_7)b_1 \leq (c_7 + c_8)b_1 = dT_{DO}/d\beta$$

(1) Volgt uit de voorwaarde voor β bij range 2A van DO.

Range 3 bij FO en range 2B bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_4 + c_5 - c_7)\sqrt{b_1 b_2 / (2\beta)} <^1 (c_4 + c_5 - c_7)\sqrt{b_1 b_2 / (2b_1 / 2b_2)} = (c_4 + c_5 - c_7)b_2 \leq (c_7 + c_8)b_2 = dT_{DO}/d\beta$$

(1) Volgt uit de voorwaarde voor β bij range 2B van DO.

Range 3 bij FO en range 3 bij DO:

$$dT_{FO}/d\beta = (c_4 + c_5 - c_7)\sqrt{b_1 b_2 / (2\beta)} \leq (c_7 + c_8)\sqrt{b_1 b_2 / (2\beta)} = dT_{DO}/d\beta$$

Eigenschap 3.1.8.a:

Maximaal kostenvoordeel van CO t.o.v. BO.

Bij het bewijs van eigenschap 3.1.1 geldt in een viertal rangecombinaties (1 BO en 1 CO, 1 BO en 2A CO, 1 BO en 2B CO, 1 BO en 3 CO) dat $dT_{CO}/d\beta > dT_{BO}/d\beta$ als $a^2 > (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)$. Bij deze vier rangecombinaties geldt dus: $dT_{CO}/d\beta \leq dT_{BO}/d\beta$ als niet aan deze voorwaarde voldaan is. In alle andere rangecombinaties geldt altijd dat $dT_{CO}/d\beta > dT_{BO}/d\beta$. Bij het bepalen van het maximale kostenvoordeel van BO t.o.v. CO hoeft dus enkel gekeken te worden naar de vier rangecombinaties waar $dT_{CO}/d\beta \leq dT_{BO}/d\beta$ kan gelden.

De kosten van het BO en CO model zijn te vinden in de tabellen 7 en 8 in paragraaf 3.1. De voorwaarden voor β van het BO model staan in tabel 1 in paragraaf 2.1, die van het CO model staan in tabel 2 in paragraaf 2.2.

Range 1 bij BO en range 1 bij CO:

Voor $\beta = 0$ geldt $T_{CO}(\beta = 0) = T_{BO}(\beta = 0) = 0$. Als in deze range geldt: $dT_{CO}/d\beta \leq dT_{BO}/d\beta$, dan stijgen de kosten van BO harder dan van CO. Het kostenverschil tussen BO en CO zal maximaal zijn voor de β waarbij geldt: $dT_{CO}/d\beta = dT_{BO}/d\beta$.

$$dT_{CO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 / \beta} * a \text{ en } dT_{BO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) / \beta}$$

Bij het gelijkstellen van $dT_{CO}/d\beta$ en $dT_{BO}/d\beta$ valt β weg. Doordat $dT_{CO}/d\beta \leq dT_{BO}/d\beta$ is zal het kostenverschil tussen BO en CO naarmate β groter wordt verder oplopen. Het maximale kostenverschil zal zich echter in een andere rangecombinatie bevinden.

Range 1 bij BO en range 2A bij CO:

$$dT_{CO}/d\beta = b_2(c_6 + c_7) \text{ en } dT_{BO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) / \beta}$$

$$dT_{CO}/d\beta = dT_{BO}/d\beta \text{ bij } \beta = [b_1(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)] / [b_2(c_6 + c_7)^2]$$

Deze waarde van β invullen in T_{CO} en T_{BO} geeft:

$$T_{BO} - T_{CO} = \frac{b_1[(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - a^2]}{(c_6 + c_7)}$$

Range 1 bij BO en range 2B bij CO:

Bewijs verloopt identiek als bij range 1 BO en range 2B Co.

$$T_{BO} - T_{CO} = \frac{b_2[(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - a^2]}{c_3 + c_7}$$

Range 1 bij BO en range 3 bij CO:

$$dT_{CO}/d\beta = \frac{c_7 \sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{2(1-\beta)}} \text{ en } dT_{BO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}/\beta$$

Vervolgens wordt bewezen dat $dT_{CO(\text{Range 3})}/d\beta > dT_{CO(\text{Range 2B})}/d\beta$
(Het bewijs voor $dT_{CO(\text{Range 3})}/d\beta > dT_{CO(\text{Range 2A})}/d\beta$ verloopt identiek):

$$\beta > 1 - \frac{c_7^2 b_2}{2b_1(c_3 + c_7)^2} \Rightarrow 2\beta b_1(c_3 + c_7)^2 > 2b_1(c_3 + c_7)^2 - c_7^2 b_2 \Rightarrow$$

$$c_7^2 b_2 > 2(1-\beta)b_1(c_3 + c_7)^2 \Rightarrow \frac{c_7^2 b_1 b_2}{2(1-\beta)} > b_1^2(c_3 + c_7)^2 \Rightarrow \frac{c_7 \sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{2(1-\beta)}} > b_1(c_3 + c_7)$$

Op basis hiervan geldt dat de maximale besparing van CO t.o.v. BO in range 3 altijd kleiner zal zijn dan die in de ranges 2A of 2B.

Voor het bewijs van eigenschap 3.1.8.a: blijven er hierdoor twee rangecombinaties over waarin de maximale besparingen zich kunnen voordoen:

1. Range 1 bij BO en range 2A bij CO:

$$T_{BO} - T_{CO} = \frac{b_1[(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - a^2]}{c_6 + c_7} < \frac{b_2[(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - a^2]}{c_3 + c_7}$$

(1) Bij het Commonality Model CO is de bovengrens van range 1 als volgt:

$$\beta \leq \min \left[\frac{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2}{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2}, \frac{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2}{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2} \right]. \text{ Als range 2A geldig is geldt dat}$$

$$\frac{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2}{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2} < \frac{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2}{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2}$$

$$\frac{b_1}{b_2} * \frac{a^2}{(c_6 + c_7)^2} < \frac{b_2}{b_1} * \frac{a^2}{(c_3 + c_7)^2} \Rightarrow b_2^2 (c_6 + c_7)^2 > b_1^2 (c_3 + c_7)^2$$

$$\Rightarrow b_2 (c_6 + c_7) > b_1 (c_3 + c_7) \Rightarrow b_2 / (c_3 + c_7) > b_1 / (c_6 + c_7)$$

1. Range 1 bij BO en range 2B bij CO:

$$T_{BO} - T_{CO} = \frac{b_2[(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - a^2]}{c_3 + c_7} < \frac{b_1[(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - a^2]}{c_6 + c_7}$$

(1) Bij het Commonality Model CO is de bovengrens van range 1 als volgt:

$$\beta \leq \min \left[\frac{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2}{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2}, \frac{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2}{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2} \right]. \text{ Als range 2B geldig is geldt dat}$$

$$\frac{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2}{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2} > \frac{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2}{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2}$$

$$\frac{b_1}{b_2} * \frac{a^2}{(c_6 + c_7)^2} > \frac{b_2}{b_1} * \frac{a^2}{(c_3 + c_7)^2} \Rightarrow b_2^2(c_6 + c_7)^2 < b_1^2(c_3 + c_7)^2$$

$$\Rightarrow b_2(c_6 + c_7) < b_1(c_3 + c_7) \Rightarrow b_1/(c_6 + c_7) > b_2/(c_3 + c_7)$$

De maximale absolute besparingen van CO t.o.v. BO zijn nu:

$$\min\left(\frac{b_1[(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - a^2]}{c_6 + c_7}, \frac{b_2[(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - a^2]}{c_3 + c_7}\right) =$$

$$[(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - a^2] \min\left(\frac{b_1}{(c_6 + c_7)}, \frac{b_2}{(c_3 + c_7)}\right)$$

Eigenschap 3.1.8.b:

Maximaal kostenvoordeel van DO t.o.v. BO.

Ook bij het bewijs van eigenschap 3.1.8.b: zijn er een viertal rangecombinaties (1 BO en 1 DO, 1 BO en 2A DO, 1 BO en 2B DO, 1 BO en 3 DO) waar kan gelden: $dT_{DO}/d\beta \leq dT_{BO}/d\beta$.

De kosten van het BO en DO model zijn te vinden in de tabellen 7 en 9 in paragraaf 3.1. De voorwaarden voor β van het BO model staan in tabel 1 in paragraaf 2.1, die van het DO model staan in tabel 4 in paragraaf 2.4.

Range 1 bij BO en range 1 bij DO:

Voor $\beta = 0$ geldt $T_{DO}(\beta = 0) = T_{BO}(\beta = 0) = 0$.

$$dT_{DO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 / 2\beta} * (c_7 + c_8) \text{ en } dT_{BO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) / \beta}$$

Bij het gelijkstellen van $dT_{DO}/d\beta$ en $dT_{BO}/d\beta$ valt β weg. Het maximale kostenverschil zal zich dus in een andere rangecombinatie bevinden.

Range 1 bij BO en range 2A bij DO:

$$dT_{DO}/d\beta = b_2(c_7 + c_8) \text{ en } dT_{BO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) / \beta}$$

$$dT_{DO}/d\beta = dT_{BO}/d\beta \text{ bij } \beta = [b_1(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)] / [b_2(c_7 + c_8)^2]$$

Deze waarde van β invullen in T_{DO} en T_{BO} geeft:

$$T_{BO} - T_{DO} = \frac{b_1(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_1(c_7 + c_8)$$

Range 1 bij BO en range 2B bij DO:

Bewijs verloopt identiek als bij range 1 BO en range 2A DO.

$$T_{BO} - T_{DO} = \frac{b_2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_2(c_7 + c_8)$$

Range 1 bij BO en range 3 bij DO:

$$dT_{DO}/d\beta = \frac{(c_7 + c_8)\sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{2(1-\beta)}} \text{ en } dT_{BO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}/\beta$$

Vervolgens wordt bewezen dat $dT_{DO(\text{Range 3})}/d\beta > dT_{DO(\text{Range 2A})}/d\beta$
(Het bewijs voor $dT_{DO(\text{Range 3})}/d\beta > dT_{DO(\text{Range 2B})}/d\beta$ verloopt identiek):

$$\beta > 1 - \frac{b_2}{2b_1} \Rightarrow 2b_1\beta > 2b_1 - b_2 \Rightarrow \frac{b_2}{2(1-\beta)} > b_1 \Rightarrow (c_7 + c_8)\sqrt{\frac{b_1 b_2}{2(1-\beta)}} > (c_7 + c_8)b_1$$

Op basis hiervan geldt dat de maximale besparing van DO t.o.v. BO in range 3 altijd kleiner zal zijn dan die in de ranges 2A of 2B.

Voor het bewijs van eigenschap 3.1.8.b: blijven er hierdoor twee rangecombinaties over waarin de maximale besparingen zich kunnen voordoen:

1. Range 1 bij BO en range 2A bij DO:

$$T_{BO} - T_{DO} = \frac{b_1(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_1(c_7 + c_8) < \frac{b_2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_2(c_7 + c_8)$$

(1) Uit de voorwaarde voor β bij range 2A van DO volgt:

$$\frac{b_1}{2b_2} < 1 - \frac{b_1}{2b_2} \Rightarrow b_1 < b_2$$

2. Range 1 bij BO en range 2B bij DO:

$$T_{BO} - T_{DO} = \frac{b_2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_2(c_7 + c_8) < \frac{b_1(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_1(c_7 + c_8)$$

(1) Uit de voorwaarde voor β bij range 2B van DO volgt:

$$\frac{b_2}{2b_1} < 1 - \frac{b_2}{2b_1} \Rightarrow b_2 < b_1$$

De maximale absolute besparingen van DO t.o.v. BO zijn nu:

$$\min\left(\frac{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{c_7 + c_8}b_1 - 0.5b_1(c_7 + c_8), \frac{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{c_7 + c_8}b_2 - 0.5b_2(c_7 + c_8)\right) =$$

$$\left[\frac{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{c_7 + c_8} - 0.5(c_7 + c_8)\right]\min(b_1, b_2)$$

Eigenschap 3.1.8.c:

Maximaal kostenvoordeel van DO t.o.v. CO.

Ook bij het bewijs van eigenschap 3.1.8.c: zijn er een viertal rangecombinaties (1 CO en 1 DO, 1 CO en 2A DO, 1 CO en 2B DO, 1 CO en 3 DO) waar kan gelden: $dT_{DO}/d\beta \leq dT_{CO}/d\beta$.

De kosten van het CO en DO model zijn te vinden in de tabellen 8 en 9 in paragraaf 3.1. De voorwaarden voor β van het CO model staan in tabel 2 in paragraaf 2.2, die van het DO model staan in tabel 4 in paragraaf 2.4.

Range 1 bij CO en range 1 bij DO:

Voor $\beta = 0$ geldt $T_{DO}(\beta = 0) = T_{BO}(\beta = 0) = 0$.

$$dT_{DO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 / 2\beta} * (c_7 + c_8) \text{ en } dT_{CO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 / \beta} * a$$

Bij het gelijkstellen van $dT_{DO}/d\beta$ en $dT_{CO}/d\beta$ valt β weg. Het maximale kostenverschil zal zich dus in een andere rangecombinatie bevinden.

Range 1 bij CO en range 2A bij DO:

$$dT_{DO}/d\beta = b_2(c_7 + c_8) \text{ en } dT_{CO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 / \beta} * a$$

$$dT_{DO}/d\beta = dT_{CO}/d\beta \text{ bij } \beta = b_1 a^2 / [b_2 (c_7 + c_8)^2]$$

Deze waarde van β invullen in T_{DO} en T_{CO} geeft:

$$T_{CO} - T_{DO} = \frac{b_1 a^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5 b_1 (c_7 + c_8)$$

Range 1 bij CO en range 2B bij DO:

Bewijs verloopt identiek als bij range 1 CO en range 2B DO.

$$T_{CO} - T_{DO} = \frac{b_2 a^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5 b_2 (c_7 + c_8)$$

Range 1 bij CO en range 3 bij DO:

$$dT_{DO}/d\beta = \frac{(c_7 + c_8) \sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{2(1-\beta)}} \text{ en } dT_{CO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 / \beta} * a$$

Eerder is al bewezen dat $dT_{DO(\text{Range } 3)}/d\beta > dT_{DO(\text{Range } 2A)}/d\beta$ en $dT_{DO(\text{Range } 3)}/d\beta > dT_{DO(\text{Range } 2B)}/d\beta$. Op basis hiervan geldt dat de maximale besparing van DO t.o.v. CO in range 3 altijd kleiner zal zijn dan die in de ranges 2A of 2B.

Voor het bewijs van eigenschap 3.1.8.c: blijven er hierdoor twee rangecombinaties over waarin de maximale besparingen zich kunnen voordoen:

1. Range 1 bij CO en range 2A bij DO:

$$T_{BO} - T_{DO} = \frac{b_1 a^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5 b_1 (c_7 + c_8) < \frac{b_2 a^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5 b_2 (c_7 + c_8)$$

2. Range 1 bij CO en range 2B bij DO:

$$T_{BO} - T_{DO} = \frac{b_2 a^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5 b_2 (c_7 + c_8) < \frac{b_1 a^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5 b_1 (c_7 + c_8)$$

De maximale absolute besparingen van DO t.o.v. CO zijn nu:

$$\min\left(\frac{a^2}{c_7 + c_8}b_1 - 0.5b_1(c_7 + c_8), \frac{a^2}{c_7 + c_8}b_2 - 0.5b_2(c_7 + c_8)\right) =$$

$$\left[\frac{a^2}{c_7 + c_8} - 0.5(c_7 + c_8)\right]\min(b_1, b_2)$$

Eigenschap 3.1.8.d:

Maximaal kostenvoordeel van DO t.o.v. FO.

Ook bij het bewijs van eigenschap 3.1.8.d: zijn er een viertal rangecombinaties (1 FO en 1 DO, 1 FO en 2A DO, 1 FO en 2B DO, 1 FO en 3 DO) waar kan gelden: $dT_{DO}/d\beta \leq dT_{BO}/d\beta$.

De kosten van het DO en FO model zijn te vinden in de tabellen 9 en 10 in paragraaf 3.1. De voorwaarden voor β van het DO model staan in tabel 4 in paragraaf 2.4, die van het FO model staan in tabel 3 in paragraaf 2.3.

Range 1 bij FO en range 1 bij DO:

Voor $\beta = 0$ geldt $T_{DO}(\beta = 0) = T_{BO}(\beta = 0) = 0$.

$$dT_{DO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 / 2\beta} * (c_7 + c_8) \text{ en } d_{FO}/d\beta \sqrt{b_1 b_2 / \beta} * d$$

Bij het gelijkstellen van $dT_{DO}/d\beta$ en $dT_{FO}/d\beta$ valt β weg. Het maximale kostenverschil zal zich dus in een andere rangecombinatie bevinden.

Range 1 bij FO en range 2A bij DO:

$$dT_{DO}/d\beta = b_2(c_7 + c_8) \text{ en } dT_{FO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 / \beta} * d$$

$$dT_{DO}/d\beta = dT_{FO}/d\beta \text{ bij } \beta = b_1 d^2 / [b_2 (c_7 + c_8)^2]$$

Deze waarde van β invullen in T_{DO} en T_{BO} geeft:

$$T_{FO} - T_{DO} = \frac{b_1 d^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_1(c_7 + c_8)$$

Range 1 bij FO en range 2B bij DO:

Bewijs verloopt identiek als bij range 1 FO en range 2A DO.

$$T_{BO} - T_{DO} = \frac{b_2 d^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_2(c_7 + c_8)$$

Range 1 bij FO en range 3 bij DO:

$$dT_{DO}/d\beta = \frac{(c_7 + c_8)\sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{2(1-\beta)}} \text{ en } dT_{BO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 / \beta}$$

Eerder is al bewezen dat $dT_{DO(\text{Range } 3)}/d\beta > dT_{DO(\text{Range } 2A)}/d\beta$ en $dT_{DO(\text{Range } 3)}/d\beta > dT_{DO(\text{Range } 2B)}/d\beta$. Op basis hiervan geldt dat de maximale besparing van DO t.o.v. CO in range 3 altijd kleiner zal zijn dan die in de ranges 2A of 2B.

Voor het bewijs van eigenschap 3.1.8.d: blijven er hierdoor twee rangecombinaties over waarin de maximale besparingen zich kunnen voordoen:

1. Range 1 bij FO en range 2A bij DO:

$$T_{FO}-T_{DO} = \frac{b_1 d^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_1(c_7 + c_8) < \frac{b_2 d^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_2(c_7 + c_8)$$

2. Range 1 bij FO en range 2B bij DO:

$$T_{FO}-T_{DO} = \frac{b_2 d^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_2(c_7 + c_8) < \frac{b_1 d^2}{(c_7 + c_8)} - 0.5b_1(c_7 + c_8)$$

De maximale absolute besparingen van DO t.o.v. FO zijn nu:

$$\min\left(\frac{d^2}{c_7 + c_8}b_1 - 0.5b_1(c_7 + c_8), \frac{d^2}{c_7 + c_8}b_2 - 0.5b_2(c_7 + c_8)\right) =$$

$$\left[\frac{d}{c_7 + c_8} - 0.5(c_7 + c_8)\right]\min(b_1, b_2)$$

Eigenschap 3.1.9.a:

Relatief kostenvoordeel van CO t.ov. BO:

De kosten van het BO en CO model zijn te vinden in de tabellen 7 en 8 in paragraaf 3.1. De voorwaarden voor β voor het BO model staan in tabel 1 in paragraaf 2.1, die van het CO model staan in tabel 2 in paragraaf 2.2.

Range 1 bij BO en range 1 bij CO:

$$\frac{T_B - T_C}{T_B} = 1 - \frac{T_C}{T_B} = 1 - \frac{2\sqrt{\beta b_1 b_2} * a}{2\sqrt{\beta b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}} = 1 - \frac{a}{\sqrt{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}}$$

Hieruit kan opgemaakt worden, dat de relatieve besparingen over de gehele range constant zijn en dus niet van β afhangen.

Range 1 bij BO en range 2A bij CO:

$$\frac{\partial(T_C/T_B)}{\partial\beta} = \frac{(2b_1(c_6 + c_7)\sqrt{\beta} - [a^2 b_1/(c_6 + c_7) + (c_6 + c_7)\beta b_2]/\sqrt{\beta})\sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}}{4\beta b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}$$

De bovenstaande afgeleide gelijkstellen aan nul geeft: $\beta = \frac{b_1}{b_2} * \left(\frac{a}{c_6 + c_7}\right)^2$, wat het begin van range 2A bij CO is (en het einde van range 1 bij CO).

Range 1 bij BO en range 2B bij CO:

Op gelijke wijze volgt nu dat β het begin van range 2B bij CO is (en het einde van range 1 bij CO).

Range 1 bij BO en range 3 bij CO:

De afgeleide van T_C/T_B gelijkstellen aan 0 geeft $\beta = 1 - \frac{2c_7^2 b_1 b_2}{[(c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2]^2}$

Deze waarde ligt echter buiten range 3 bij CO. Indien range 3 bij CO de opvolger van range 2A bij CO is geldt: $\beta = 1 - \frac{2c_7^2 b_1 b_2}{[(c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2]^2} > 1 - \frac{b_1}{b_2} \frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2}$

In het geval dat range 3 bij CO de opvolger van range 2B bij CO is geldt:

$$\beta = 1 - \frac{2c_7^2 b_1 b_2}{[(c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2]^2} > 1 - \frac{b_2}{b_1} \frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)^2}$$

Hieruit volgt nu dat het maximale relatieve verschil in deze rangecombinatie zich hier voordoet aan het begin van range 3 (en dus het einde van range 2A of 2B). Eerder is al bewezen dat bij range 2A (of range 2B) het maximale relatieve verschil zich voordoet aan het begin van deze ranges (en dus niet aan het einde). Hieruit volgt nu, dat het maximale relatieve verschil bij het vervangen van BO door CO zich voordoet aan het eind van range 1 (en dus ook aan het begin van range 2A of 2B).

Eigenschap 3.1.9.b:

Relatief kostenvoordeel van DO t.ov. BO:

De kosten van het BO en DO model zijn te vinden in de tabellen 7 en 9 in paragraaf 3.1. De voorwaarden voor β voor het BO model staan in tabel 1 in paragraaf 2.1, die van het DO model staan in tabel 4 in paragraaf 2.4.

Het bewijs gaat nu op identieke wijze als bij eigenschap 3.1.9.a: Daarom zullen hier enkel de formules gegeven worden.

Range 1 bij BO en range 1 bij DO:

$$\frac{T_B - T_D}{T_B} = 1 - \frac{T_D}{T_B} = 1 - \frac{(c_7 + c_8)\sqrt{2\beta b_1 b_2}}{2\sqrt{\beta b_1 b_2}(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)} = 1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2}(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}$$

Hieruit kan opgemaakt worden, dat de relatieve besparingen over de gehele range constant zijn en dus niet van β afhangen.

Range 1 bij BO en range 2A bij DO:

$$\frac{\partial(T_D/T_B)}{\partial\beta} = \frac{(2b_2(c_7 + c_8)\sqrt{\beta b_1 b_2}(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - (c_7 + c_8)(0.5b_1 + \beta b_2)\sqrt{b_1 b_2}(c_3 + c_4)(c_5 + c_6))/\beta}{4\beta b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}$$

De bovenstaande afgeleide gelijkstellen aan nul geeft: $\beta = \frac{b_1}{2b_2}$, wat het begin van range 2A bij DO is (en het einde van range 1 bij DO).

Range 1 bij BO en range 2B bij DO:

Op gelijke wijze volgt nu dat β het begin van range 2B bij DO is (en het einde van range 1 bij DO).

Range 1 bij BO en range 3 bij DO:

$$\text{De afgeleide van } T_D/T_B \text{ gelijkstellen aan 0 geeft } \beta = 1 - \frac{2b_1 b_2}{[b_1 + b_2]^2}$$

Als range 3 bij DO de opvolger van range 2A bij DO is geldt:

$$\beta = 1 - \frac{2b_1 b_2}{[b_1 + b_2]^2} > 1 - \frac{b_1}{2b_2}$$

Als range 3 bij DO de opvolger van range 2B bij DO is geldt:

$$\beta = 1 - \frac{2b_1b_2}{[b_1 + b_2]^2} > 1 - \frac{b_2}{2b_1}$$

Eigenschap 3.1.9.c:

De kosten van het CO en DO model zijn te vinden in de tabellen 8 en 9 in paragraaf 3.1. De voorwaarden voor β voor het CO model staan in tabel 2 in paragraaf 2.2, die van het DO model staan in tabel 4 in paragraaf 2.4.

Range 1 bij CO en range 1 bij DO:

$$\frac{T_D - T_C}{T_D} = 1 - \frac{T_D}{T_C} = 1 - \frac{(c_7 + c_8)\sqrt{2\beta b_1b_2}}{2\sqrt{\beta b_1b_2}a} = 1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2}a}$$

Range 1 bij CO en range 2A bij DO:

$$\frac{\partial(T_D/T_C)}{\partial\beta} = \frac{2(c_7 + c_8)ab_2\sqrt{\beta b_1b_2} - (c_7 + c_8)(0.5b_1 + \beta b_2)a\sqrt{b_1b_2/\beta}}{4a^2\beta b_1b_2} = 0$$

De bovenstaande afgeleide gelijkstellen aan nul geeft: $\beta = \frac{b_1}{2b_2}$, wat het begin van range 2A bij DO is (en het einde van range 1 bij DO).

Range 1 bij CO en range 2B bij DO:

Op gelijke wijze volgt nu dat β het begin van range 2B bij DO is (en het einde van range 1 bij DO).

Range 1 bij CO en range 3 bij DO:

De afgeleide van T_D/T_C gelijkstellen aan 0 geeft $\beta = 1 - \frac{2b_1b_2}{[b_1 + b_2]^2}$

Als range 3 bij DO de opvolger van range 2A bij DO is geldt:

$$\beta = 1 - \frac{2b_1b_2}{[b_1 + b_2]^2} > 1 - \frac{b_1}{2b_2}$$

Als range 3 bij DO de opvolger van range 2B bij DO is geldt:

$$\beta = 1 - \frac{2b_1b_2}{[b_1 + b_2]^2} > 1 - \frac{b_2}{2b_1}$$

Eigenschap 3.1.9.d:

Relatief kostenvoordeel van DO t.o.v. FO.

Bewijs gelijk aan dat van eigenschap 3.1.9.c. Vervang a door d.

Eigenschap 3.1.9.e:

Relatief kostenvoordeel van FO t.o.v. BO.

De kosten van het BO en FO model zijn te vinden in de tabellen 7 en 10 in paragraaf 3.1. De voorwaarden voor β voor het BO model staan in tabel 1 in paragraaf 2.1, die van het FO model staan in tabel 3 in paragraaf 2.3.

Range 1 bij BO en range 1 of 2A of 2B of 3 bij FO:

Bewijs verloopt identiek aan eigenschap 3.1.9.a. Alleen moet a door d vervangen worden.

Range 2A bij BO en range 1 bij FO:

Een van de bovengrenzen van range 1 FO is: $\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{d}{c_5 + c_6} \right)^2$. Er geldt nu:

$$\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{d}{c_5 + c_6} \right)^2 < \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{(c_5 + c_6)^2} \right) = \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)} \right).$$

Hieruit volgt nu, dat deze bovengrens van range 1 FO kleiner is dan de bovengrens van range 1 BO. Voor de andere bovengrens van range 1 FO valt een identiek bewijs op te stellen. Doordat range 1 FO zich geheel in range 1 BO bevindt, zullen de rangecombinaties 2A (of 2B) BO en range 1 FO niet bestaan.

Range 2A bij BO en range 2A bij FO:

$$dT_{FO}/d\beta = b_2(c_5 + c_6) = dT_{BO}/d\beta.$$

Doordat de afgeleiden gelijk zijn zal het relatieve kostenvoordeel van FO t.o.v. BO over de hele range gelijk zijn. Het relatieve kostenvoordeel van deze rangecombinatie zal nu gelijk zijn aan het relatieve kostenvoordeel aan het einde van de rangecombinatie 1 BO en 2A FO.

Range 2A bij BO en range 2B bij FO:

Voorwaarde voor range 2A bij BO: $b_1(c_3 + c_4) < b_2(c_5 + c_6)$

Voorwaarde voor range 2B bij FO: $b_1(c_3 + c_4) > b_2(c_5 + c_6)$

Hieruit volgt dat deze Rangecombinatie niet mogelijk is.

Range 2A bij BO en range 3 bij FO:

Bij deze rangecombinatie geldt: $dT_{BO}/d\beta \leq dT_{FO}/d\beta$. Het bewijs is identiek aan dat van range 1 BO en range 3 CO bij eigenschap 3.1.9.a.

Range 2B bij BO en range 1 bij FO:

Op dezelfde wijze als bij range 2A BO en range 1 FO volgt dat deze rangecombinatie niet kan bestaan.

Range 2B bij BO en range 2A bij FO:

Voorwaarde voor range 2B bij BO: $b_1(c_3 + c_4) > b_2(c_5 + c_6)$

Voorwaarde voor range 2A bij FO: $b_1(c_3 + c_4) < b_2(c_5 + c_6)$

Hieruit volgt dat deze rangecombinatie niet mogelijk is.

Range 2B bij BO en range 2B bij FO:

Bewijs identiek aan range 2A bij BO en range 2B bij FO.

Range 2B bij BO en range 3 bij FO:

Bij deze rangecombinatie geldt: $dT_{BO}/d\beta \leq dT_{FO}/d\beta$. Het bewijs is identiek aan dat van range 1 BO en range 3 CO bij eigenschap 3.1.9.b.

Eigenschap 3.1.9.f:

Relatief kostenvoordeel van FO t.o.v. CO.

De kosten van het CO en FO model zijn te vinden in de tabellen 8 en 10 in paragraaf 3.1. De voorwaarden voor β voor het CO model staan in tabel 2 in paragraaf 2.2, die van het FO model staan in tabel 3 in paragraaf 2.3.

De volgende rangecombinaties kunnen worden uitgesloten:

Range 1 of 2A of 2B in CO en range 3 in FO:

Eerst wordt bewezen, dat de bovengrens van range 2A (2B) in CO kleiner is dan de bovengrens van range 2A (2B) in FO. Hieruit volgt dan dat range 2A (2B) in CO niet in combinatie met range 3 in FO kan voorkomen. Ook de combinatie range 1 CO en range 3 FO kan nu voorkomen.

Bewijs bovengrens range 2A CO is kleiner dan bovengrens range 2A in FO (Het bewijs van 2B CO en 2B FO gaat identiek):

$$\begin{aligned} \frac{(c_4 + c_5 - c_7)}{(c_5 + c_6)} &= \frac{(c_4 + c_5 - c_7)(c_6 + c_7)}{(c_5 + c_6)(c_6 + c_7)} = \frac{c_4c_6 + c_4c_7 + c_5c_6 + c_5c_7 - c_6c_7 - c_7^2}{(c_5 + c_6)(c_6 + c_7)} = \\ \frac{c_7(c_4 - c_7) + c_6(c_4 - c_7) + c_5c_6 + c_5c_7}{(c_5 + c_6)(c_6 + c_7)} &\leq \frac{c_5c_6 + c_6c_7}{(c_5 + c_6)(c_6 + c_7)} \leq \frac{c_5c_7 + c_6c_7}{(c_5 + c_6)(c_6 + c_7)} = \frac{c_7}{c_6 + c_7} \\ \frac{(c_4 + c_5 - c_7)}{(c_5 + c_6)} &\leq \frac{c_7}{c_6 + c_7} \Leftrightarrow 1 - \frac{b_1}{b_2} \frac{(c_4 + c_5 - c_7)^2}{2(c_5 + c_6)^2} \leq 1 - \frac{b_1}{b_2} \frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2} \end{aligned}$$

De overige rangecombinaties zijn wel mogelijk:

Range 1 CO en range 1 FO:

$$1 - \frac{T_{FO}}{T_{CO}} = 1 - \frac{2\sqrt{\beta b_1 b_2} d}{2\sqrt{\beta b_1 b_2} a} = 1 - \frac{d}{a}$$

De besparingen zijn bij deze rangecombinatie constant.

Range 1 CO en range 2A FO:

$$\frac{\partial(T_{FO}/T_{CO})}{\partial\beta} = \frac{(\sqrt{b_1 b_2 / \beta} * a) \left(\frac{a^2 b_1}{c_5 + c_6} + (c_5 + c_6) \beta b_2 \right) - 2\sqrt{\beta b_1 b_2} * a(c_5 + c_6) b_2}{4a^2 \beta b_1 b_2} = 0$$

Deze vergelijking oplossen geeft: $\beta = \frac{d^2}{(c_5 + c_6)^2} * \frac{b_1}{b_2}$ wat het begin van range 2A FO is. De maximale relatieve besparingen vinden dus hier plaats.

Range 1 CO en range 2B FO:

Bewijs gelijk aan dat van range 1 CO en range 2A FO. Ook hier vinden de maximale relatieve besparingen aan het begin van de range plaats.

Range 2A CO en range 1 FO:

$$dT_{FO}/d\beta = \sqrt{b_1 b_2 / \beta} * d < \sqrt{b_1 b_2 / \beta} * a <^1 b_2 (c_6 + c_7) = dT_{CO}/d\beta$$

(1) Volgt uit de voorwaarden van range 2A CO.

Doordat de afgeleide van FO naar β groter is dan de afgeleide van CO naar β betekent dit dat de relatieve besparingen groter worden naarmate β groter wordt.

Range 2A CO en range 2A FO:

$$dT_{FO}/d\beta = b_2(c_5 + c_6) \leq b_2(c_6 + c_7) = dT_{CO}/d\beta$$

Range 2A CO en range 2B FO:

$$dT_{FO}/d\beta = b_1(c_3 + c_4) \leq b_1(c_3 + c_7) < b_2(c_6 + c_7) = dT_{CO}/d\beta$$

Range 2B CO en range 1 FO:

Identiek als bij range 2A CO en range 1 FO.

Range 2B CO en range 2A FO:

$$dT_{FO}/d\beta = b_2(c_5 + c_6) \leq b_2(c_6 + c_7) < b_1(c_3 + c_7) = dT_{CO}/d\beta$$

(1) Volgt uit de voorwaarden van range 2B CO.

Range 2B CO en range 2B FO:

$$dT_{FO}/d\beta = b_1(c_3 + c_4) \leq b_1(c_3 + c_7) = dT_{CO}/d\beta$$

Range 3 CO en range 1 FO:

$$dT_{FO}/d\beta = \frac{d\sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{\beta}} < \frac{a\sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{\beta}} < \frac{c_7 \sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{2(1-\beta)}} = dT_{CO}/d\beta$$

(1) Dit is bewezen in Van der Zanden (2001) op pagina 77 onder het kopje “range 3 bij CO en range 1 bij BO”

Range 3 CO en range 2A FO:

$$dT_{FO}/d\beta = b_2(c_5 + c_6) = \frac{c_7 \sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{2(1 - \frac{c_7^2}{2(c_5 + c_6)^2} * \frac{b_1}{b_2})}} < \frac{c_7 \sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{2(1-\beta)}} = dT_{CO}/d\beta$$

Range 3 CO en range 2B FO:

Identiek als bij range 3 CO en range 2A FO.

Range 3 CO en range 3 FO:

$$dT_{FO}/d\beta = \frac{(c_4 + c_5 - c_7)\sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{2(1-\beta)}} \leq \frac{c_7 \sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{2(1-\beta)}} = dT_{CO}/d\beta$$

(1) $c_7 \geq c_4 + c_5 - c_7$ als $2c_7 \geq c_4 + c_5$. Dit geldt wat $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$

In geen van de toegestane rangecombinaties geldt dat de relatieve besparingen kleiner worden naarmate β kleiner wordt. Hieruit volgt nu dat de maximale relatieve besparingen zich bij $\beta = 1$ zullen voordoen.

B.2 Kostenvoorbeelden met de vier modellen (§ 3.2)

Eigenschap 3.2.1:

Invullen van voorwaarden van eigenschap 3.2.1 in eigenschap 3.1.1 t/m 3.1.4 geeft:

$$c_7 > \sqrt{(c+c)^2 + 2(c^2 + c^2 + c^2) - 2c} \Rightarrow c_7 > \sqrt{10c^2 - 2c} \Rightarrow c_7 > (\sqrt{10} - 2)c$$

$$2c_7 > \sqrt{2(2c)(2c)} \Rightarrow 2c_7 > \sqrt{8c^2} \Rightarrow c_7 > \sqrt{2}c$$

$$2c_7 > \sqrt{2(c+c_7)(c+c_7) - c_7^2} \Rightarrow 4c_7^2 > 2(c+c_7)^2 - c_7^2 \Rightarrow 3c_7^2 > 2c^2 + 4c_7c \Rightarrow c_7 > (4 + \sqrt{40})c/6$$

$$2c_7 > \sqrt{8c^2 - (2c - c_7)^2} \Rightarrow 4c_7^2 > 4c^2 + 4c_7c - c_7^2 \Rightarrow 5c_7^2 > 4c^2 + 4c_7c \Rightarrow (4 + \sqrt{96})c/10$$

Eigenschap 3.2.2:

Invullen van voorwaarden van eigenschap 3.2.2 in eigenschap 3.1.1 geeft:

$$c_7 > \sqrt{(c_u + c_u)^2 + 2(c_c c_u + c_c^2 + c_c c_u) - (c_u + c_u)} \Rightarrow c_7 > \sqrt{4c_u^2 + 2c_c^2 + 4c_c c_u - 2c_u}$$

Eigenschap 3.2.3:

Met behulp van eigenschap 3.1.9 volgt:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a}{\sqrt{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}} &= 1 - \sqrt{\frac{(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - 0.5c_7^2}{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}} \leq 1 - \sqrt{\frac{(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - 0.5c_7^2}{(c_3 + c_7)(c_6 + c_7)}} \\ &= 1 - \sqrt{1 - \frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)(c_6 + c_7)}} \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{c_7^2}{2c_7^2}} = 1 - \sqrt{0.5} = 0.293 \quad (\text{BO t.o.v. CO}) \end{aligned}$$

$$1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}} \leq 1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2(c_7 + c_8)^2}} = 1 - \sqrt{0.5} = 0.293 \quad (\text{BO t.o.v. DO})$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2(c_3 c_6 + c_3 c_7 + c_6 c_7 + 0.5c_7^2)}} &\leq 1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2(c_8^2 + 2c_7 c_8 + 0.5c_7^2)}} = 1 - \sqrt{\frac{c_7^2 + 2c_7 c_8 + c_8^2}{c_7^2 + 4c_7 c_8 + 2c_8^2}} \\ &\leq 1 - \sqrt{0.5} = 0.293 \quad (\text{CO t.o.v. DO}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2d}} &= 1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - (c_4 + c_5 - c_7)^2}} \leq 1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}} \\ &\leq 1 - \sqrt{0} = 0.293 \quad (\text{FO t.o.v. BO}) \end{aligned}$$

Eigenschap 3.2.4:

Invullen van voorwaarden van eigenschap 3.2.4 in eigenschap 3.1.9 geeft:

$$1 - \frac{a}{\sqrt{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}} = 1 - \sqrt{\frac{(c+c_7)^2 - 0.5c_7^2}{4c^2}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{c_7}{2c} + \frac{1}{8}\left(\frac{c_7}{c}\right)^2} \leq 1 - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = 0.0646$$

$$1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}} = 1 - \sqrt{\frac{4c_7^2}{8c^2}} \leq 1 - \sqrt{0.5} = 0.29$$

$$1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - c_7^2}} = 1 - \sqrt{\frac{4c_7^2}{8c^2 - c_7^2}} \leq 1 - \sqrt{\frac{4c_7^2}{7c^2}} \leq 1 - \sqrt{\frac{4}{7}} = 0.244$$

$$1 - \frac{c_7 + c_8}{\sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) - (c_4 + c_5 - c_7)^2}} = 1 - \sqrt{\frac{4c_7^2}{4c^2 + 4c_7c - c_7^2}} \leq 1 - \sqrt{\frac{4c_7^2}{3c^2 + 4c_7c}} \\ \leq 1 - \sqrt{\frac{4c_7^2}{3c_7^2 + 4c_7^2}} \leq 1 - \sqrt{4/7} = 0.244$$

Appendix C: Alternatieve verdelingen bij hoofdstuk 4

C.1 Het Commonality Model CO

Exponentiële verdeling:

$$\begin{aligned}
 ASL &= P(D_1 \leq S_3, D_2 \leq S_6, D_1 + D_2 \leq S_7) = \int_{a=0}^{S_3} \int_{b=0}^{\min\{S_6, S_7-a\}} f_A(a) f_B(b) db da = \\
 &\int_{a=0}^{S_3} f_A(a) F_B(\min\{S_6, S_7-a\}) da = \int_{a=0}^{S_7-S_6} f_A(a) F_B(S_6) da + \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} f_A(a) F_B(S_7-a) da = \\
 &F_A(S_7-S_6) F_B(S_6) + \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} f_A(a) F_B(S_7-a) da =
 \end{aligned}$$

(Doordat de vraagverdeling exponentieel is valt bovenstaande vergelijking nu als volgt te schrijven)

$$\begin{aligned}
 &[1 - \exp(-\lambda(S_7 - S_6))] * [1 - \exp(-\lambda S_6)] + \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} \lambda \exp(-\lambda a) (1 - \exp(-\lambda(S_7 - a))) da = \\
 &1 - \exp(-\lambda S_6) - \exp(-\lambda(S_7 - S_6)) + \exp(-\lambda S_7) + \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} \lambda \exp(-\lambda a) - \lambda \exp(-\lambda S_7) da = \\
 &1 - \exp(-\lambda S_6) - \exp(-\lambda(S_7 - S_6)) + \exp(-\lambda S_7) + [-\exp(-\lambda a) - \lambda a * \exp(-\lambda S_7)]_{S_7-S_6}^{S_3} = \\
 &1 - \exp(-\lambda S_6) - \exp(-\lambda S_3) - ([S_3 + S_6 - S_7] \lambda - 1) \exp(-\lambda S_7) = ASL
 \end{aligned}$$

Erlang verdeling:

$$\begin{aligned}
 ASL &= P(D_1 \leq S_3, D_2 \leq S_6, D_1 + D_2 \leq S_7) = \int_{a=0}^{S_3} \int_{b=0}^{\min\{S_6, S_7-a\}} f_A(a) f_B(b) db da = \\
 &\int_{a=0}^{S_3} f_A(a) F_B(\min\{S_6, S_7-a\}) da = \int_{a=0}^{S_7-S_6} f_A(a) F_B(S_6) da + \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} f_A(a) F_B(S_7-a) da = \\
 &F_A(S_7-S_6) F_B(S_6) + \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} f_A(a) F_B(S_7-a) da =
 \end{aligned}$$

Om de bovenstaande uitdrukking op te lossen zijn de dichtheid en de verdelingsfunctie van de gammaverdeling nodig. Omdat in dit specifieke geval de vormparameter k van de gammaverdeling een positief geheel getal is, valt de gammaverdeling te schrijven als een Erlang- k verdeling. Deze zijn beide bekend:

$$f_A(a) = \lambda^k * \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda a} \text{ en } F_A(a) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda a} * \frac{(\lambda a)^j}{j!}$$

Hierbij is λ de schaalparameter en k de vormparameter. In het gebruikte voorbeeld is de vormparameter steeds gelijk aan 3. Hierdoor valt de gammaverdeling als een Erlang-3 verdeling te schrijven. Hierdoor kunnen de bovenstaande formules gebruikt worden. Aangezien k gelijk is aan 3 geldt:

$$f(a) = \lambda^3 * \frac{a^2}{2!} e^{-\lambda a} = 0.5 \lambda^3 a^2 e^{-\lambda a} \text{ en } F(a) = 1 - \sum_{j=0}^2 e^{-\lambda a} * \frac{(\lambda a)^j}{j!}$$

Vervolgens kan ASL verder berekend worden:

$$F(S_7 - S_6)F(S_6) + \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} 0.5 \lambda^3 a^2 e^{-\lambda a} * (1 - \sum_{j=0}^2 e^{-\lambda a} * \frac{(\lambda a)^j}{j!}) da =$$

$$F(S_7 - S_6)F(S_6) + 0.5 \lambda^3 \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} (e^{-\lambda a} * a^2 - e^{-2\lambda a} * a^2 - e^{-2\lambda a} * a^3 \lambda - e^{-2\lambda a} * 0.5 * a^4 \lambda^2) da$$

Normale verdeling:

$$ASL = P(D_1 \leq S_3, D_2 \leq S_6, D_1 + D_2 \leq S_7) = \int_{a=0}^{S_3} \int_{b=0}^{\min\{S_6, S_7-a\}} f_A(a) f_B(b) db da =$$

$$\int_{a=0}^{S_3} f_A(a) F_B(\min\{S_6, S_7-a\}) da = \int_{a=0}^{S_7-S_6} f_A(a) F_B(S_6) da + \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} f_A(a) F_B(S_7-a) da =$$

$$F_A(S_7 - S_6)F_B(S_6) + \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} f_A(a) F_B(S_7-a) da$$

ASL valt nu in twee termen uiteen:

(1) $F_A(S_7 - S_6)F_B(S_6)$. Dit is het product van twee verdelingsfuncties. Bij een normale verdeling is de expliciete verdeling niet bekend. In MATLAB zitten echter standaardfuncties om de twee producttermen uit te rekenen.

(2) $\int_{a=S_7-S_6}^{S_3} f_A(a) F_B(S_7-a) da$. Bij het tweede deel van ASL moet de integraal van een product berekend worden. $f_A(a)$ is de dichtheid van een normale verdeling. Deze is bekend:

$$f_A(a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-0.5 \left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

$F_B(S_7 - a)$ is de verdelingsfunctie van een normale verdeling. Deze verdelingsfunctie is niet bekend en zal dus benaderd moeten gaan worden:

$$1 - F_B(S_7 - a) = \int_{S_7-a}^{\infty} N(\mu = 0.5b, \sigma^2 = b^2/12) dx$$

Silver, Pike en Peterson (1998) geven op bladzijde 735 een benadering van de verdelingsfunctie van een standaardnormale verdeling. Om deze standaardnormale verdeling in de bovenstaande formule in te passen zal deze op een andere manier geschreven moeten worden:

Neem $u = (x - \mu)/\sigma$. Hieruit volgt $x = u\sigma + \mu$ en $dx = \sigma du$

De ondergrens van bovenstaande integraal is: $x = S_7 - a \Rightarrow u = (S_7 - a - \mu)/\sigma$.

De bovengrens van bovenstaande integraal is: $x = \infty \Rightarrow u = \infty$

$$1 - F_B(S_7 - a) = \sigma \int_{(S_7-a-\mu)/\sigma}^{\infty} N(0,1) du \Rightarrow F_B(S_7 - a) = \sigma \int_{-\infty}^{(S_7-a-\mu)/\sigma} N(0,1) du$$

Invullen van de benadering van de verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling geeft nu:

$$F_B(S_7 - a) = \sigma \left(1 / \{ 1 + \exp(-\sqrt{\pi}(\beta_1 k^5 + \beta_2 k^3 + \beta_3 k)) \} \right) \text{ met}$$

$$k = (S_7 - a - \mu) / \sigma = (S_7 - a - 0.5b) / \sqrt{(b^2/12)},$$

$$\beta_1 = -0.0004406$$

$$\beta_2 = 0.0418198$$

$$\beta_3 = 0.9$$

$$\mu = 0.5b$$

$$\sigma = b^2/12$$

Uit (1) en (2) volgt nu dat ASL als volgt te schrijven is:

$$ASL = F_A(S_7 - S_6)F_B(S_6) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a=S_7-S_6}^{S_3} \exp\{-0.5(\frac{a-\mu}{\sigma})^2\} * (\frac{1}{1 + \exp\{-\sqrt{\pi}(\beta_1 k^5 + \beta_2 k^3 + \beta_3 k)\}}) da$$

C.2 Het Flexible Product Model FO

$$ASL = P(D_1 \leq S_3, D_2 \leq S_6, D_1 + D_2 \leq S_4 + S_5 + S_7) = \int_{a=0}^{S_3} \int_{b=0}^{\min\{S_6, S_4 + S_5 + S_7 - a\}} f_A(a) f_B(b) db da =$$

$$\int_{a=0}^{S_3} f_A(a) F_B(\min\{S_6, S_4 + S_5 + S_7 - a\}) da = \int_{a=0}^{S_4 + S_5 + S_7 - S_6} f_A(a) F_B(S_6) da +$$

$$\int_{a=S_4 + S_5 + S_7 - S_6}^{S_3} f_A(a) F_B(S_4 + S_5 + S_7 - a) da = F_A(S_4 + S_5 + S_7 - S_6) F_B(S_6) +$$

$$\int_{a=S_4 + S_5 + S_7 - S_6}^{S_3} f_A(a) F_B(S_4 + S_5 + S_7 - a) da$$

De integraal, die bij het Flexible Product Model FO moet worden uitgerekend is bijna gelijk aan die van het Commonality Model CO. Het enige verschil zijn de andere bovengrenzen. De berekening van ASL gebeurt nu op dezelfde manier als bij het Commonality Model CO.

Exponentiële verdeling:

$$ASL = 1 - \exp(-\lambda S_6) - \exp(-\lambda S_3) - ([S_3 + S_6 - S_4 - S_5 - S_7] \lambda - 1) \exp(-\lambda(S_4 + S_5 + S_7))$$

Erlang verdeling:

$$ASL = F(S_4 + S_5 + S_7 - S_6) F(S_6) +$$

$$0.5 \lambda^3 \int_{a=S_4 + S_5 + S_7 - S_6}^{S_3} (e^{-\lambda a} * a^2 - e^{-2\lambda a} * a^2 - e^{-2\lambda a} * a^3 \lambda - e^{-2\lambda a} * 0.5 * a^4 \lambda^2) da$$

Normale verdeling:

$$ASL = F(S_4 + S_5 + S_7 - S_6)F(S_6) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a=S_4+S_5+S_7-S_6}^{S_3} \exp\{-0.5(\frac{a-\mu}{\sigma})^2\} * (\frac{1}{1 + \exp\{-\sqrt{\pi}(\beta_1 k^5 + \beta_2 k^3 + \beta_3 k)\}}) da$$

Appendix D: Matlabprogramma's bij hoofdstuk 3 en 4

De programma's voor de reproductie van figuur 21 t/m 23 kunnen gevonden worden in appendix D van Van der Zanden (2001) onder figuur 53 t/m 55.

function fig24 = fig24(b,c)

% Relatie tussen beta en alfa voor het Double Commonality Model en Flexible Product Model met
% ongecorreleerde vraag

```
i=1;
for beta2=100:250
    beta = beta2/250;
for alfa2=250:450
    alfa= alfa2/250;

if (beta < 1 - ((2*c - alfa*c)^2)/(8*c^2)) & (beta < 0.5)
    TFO = 2*b*sqrt(beta)*sqrt(4*c^2 - 0.5*(2*c - alfa*c)^2);
    TDO = 2*b*c*alfa*sqrt(2*beta);

else if (beta < 1 - ((2*c - alfa*c)^2)/(8*c^2)) & (beta >= 0.5)
    TFO = 2*b*sqrt(beta)*sqrt(4*c^2 - 0.5*(2*c - alfa*c)^2);
    TDO = 2*b*c*alfa*(2-sqrt(2*(1-beta)));

else if (beta >= 1 - ((2*c - alfa*c)^2)/(8*c^2)) & (beta < 0.5)
    TFO = 4*c*b - (2*c - alfa*c)*b*sqrt(2*(1-beta));
    TDO = 2*b*c*alfa*sqrt(2*beta);

else if (beta >= 1 - ((2*c - alfa*c)^2)/(8*c^2)) & (beta >= 0.5)
    TFO = 4*c*b - (2*c - alfa*c)*b*sqrt(2*(1-beta));
    TDO = 2*b*c*alfa*(2-sqrt(2*(1-beta)));

end
end
end
end
if TFO <= TDO
    gelijk(i,1) = [beta];
    gelijk(i,2) = [alfa];
    i=i+1;
end
end
end
plot(gelijk(:,2),gelijk(:,1),'w.')
xlabel('alfa')
ylabel('beta')
```

D.1 Het Basis Model BO

function fig26a = fig26a

```
r = exprnd(250,1,10000);
s = exppdf(r,250);
plot(r,s, '.')
axis([0 1500 0 0.004])
title('verdeling E(250)')
ylabel('dichtheid')
```

function fig26b = fig26b


```

r = gamrnd(3,83.33,1,10000);
s = gampdf(r,3,83.33);
plot(r,s, '.')
title('verdeling gamma(3,0.012)')
ylabel('dichtheid')

```

function fig26c = fig26c

```

r = normrnd(250,144.34,1,10000);
s = normpdf(r,250,144.34);
plot(r,s, '.')
title('verdeling N(250,144.34)')
ylabel('dichtheid')

```

function fig26d = fig26d

```

r = exprnd(250,1,10000);
s = exppdf(r,250);
plot(r,s, '.')
axis([500 1500 0 0.001])
title('verdeling E(250)')
ylabel('dichtheid')

```

function fig26e = fig26e

```

r = gamrnd(3,83.33,1,10000);
s = gampdf(r,3,83.33);
plot(r,s, '.')
axis([500 1500 0 0.001])
title('verdeling gamma(3,0.012)')
ylabel('dichtheid')

```

function fig26f = fig26f

```

r = normrnd(250,144.34,1,10000);
s = normpdf(r,250,144.34);
plot(r,s, '.')
axis([500 1500 0 0.001])
title('verdeling N(250,144.34)')
ylabel('dichtheid')

```

function unibas = unibas(a,b,c,d,beta,e,f)

```

% Berekend de minimale kosten van het Basis Model met een uniforme vraagverdeling
% a,b = parameters van de vraag van product 1
% c,d = parameters van de vraag van product 2
% beta = waarde van ASL
% e = kosten van de componenten 3 en 4
% f = kosten van de componenten 5 en 6

i=1;
hulp1 = 10000*beta;

for x = hulp1:10000
    asl(1,i) = x/10000;
    asl(2,i) = hulp1/x;
    i = i+1;
end

```

```
hulp2 = length(asl);
```

```
for j=1:hulp2
```

```
    s3(j) = unifinv(asl(1,j),a,b);
```

```
    s6(j) = unifinv(asl(2,j),c,d);
```

```
    kosten(j) = s3(j)*e + s6(j)*f;
```

```
end
```

```
kosten=kosten';
```

```
[y,k] = min(kosten);
```

```
disp('minimale kosten')
```

```
disp(kosten(k))
```

```
disp('hoeveelheid s3')
```

```
disp(s3(k))
```

```
disp('hoeveelheid s6')
```

```
disp(s6(k))
```

```
function exbas = exbas(a,b,beta,e,f)
```

```
% Berekend de minimale kosten van het Basis Model met een exponentiele vraagverdeling
```

```
i=1;
```

```
hulp1 = 10000*beta;
```

```
for x = hulp1:10000
```

```
    asl(1,i) = x/10000;
```

```
    asl(2,i) = hulp1/x;
```

```
    i = i+1;
```

```
end
```

```
hulp2 = length(asl);
```

```
for j=1:hulp2
```

```
    s3(j) = expinv(asl(1,j),a);
```

```
    s6(j) = expinv(asl(2,j),b);
```

```
    kosten(j) = s3(j)*e + s6(j)*f;
```

```
end
```

```
kosten=kosten';
```

```
[y,k] = min(kosten);
```

```
disp('minimale kosten')
```

```
disp(kosten(k))
```

```
disp('hoeveelheid s3')
```

```
disp(s3(k))
```

```
disp('hoeveelheid s6')
```

```
disp(s6(k))
```

```
function norbas = norbas(a,b,c,d,beta,e,f)
```

```
% Berekend de minimale kosten van het Basis Model met een normale vraagverdeling
```

```
i=1;
```

```
hulp1 = 10000*beta;
```

```
for x = hulp1:10000
```

```
    asl(1,i) = x/10000;
```

```
    asl(2,i) = hulp1/x;
```

```
    i = i+1;
```

```
end
```

```

hulp3 = length(asl);

for j=1:hulp3
    s3(j) = norminv(asl(1,j),a,b);
    s6(j) = norminv(asl(2,j),c,d);
    kosten(j) = s3(j)*e + s6(j)*f;
end

kosten=kosten';
[y,k] = min(kosten);
disp('minimale kosten')
disp(kosten(k))
disp('hoeveelheid s3')
disp(s3(k))
disp('hoeveelheid s6')
disp(s6(k))

function gabas = gabas(a,c,b,d,beta,e,f)

% Berekend de minimale kosten van het Basis Model met een gammaverdeling

i=1;
hulp1 = 10000*beta;
hulp2 = hulp1+1;

for x = hulp2:9999;
    asl(1,i) = x/10000;
    asl(2,i) = hulp1/x;
    i = i+1;
end

hulp3 = length(asl);

for j=1:hulp3
    s3(j) = gaminv(asl(1,j),a,c);
    s6(j) = gaminv(asl(2,j),b,d);
    kosten(j) = s3(j)*e + s6(j)*f;
end

kosten=kosten';
[y,k] = min(kosten);
disp('minimale kosten')
disp(kosten(k))
disp('hoeveelheid s3')
disp(s3(k))
disp('hoeveelheid s6')
disp(s6(k))

```

D.2 Het Commonality Model CO

function unicom = unicom(a,beta,f,g,h,gro)

```

% a = parameter uniforme verdeling
% beta = waarde van ASL
% f = kosten van component 3
% g = kosten van component 6
% h = kosten van component 7
% gro = mate van nauwkeurigheid

```

```

m=1;

```



```

for j1=0:floor(a/gro)
    j = gro*j1;
    kosten(m,1) = Inf;
    kosten(m,2) = 0;
    kosten(m,3) = 0;
    kosten(m,4) = 0;
    kosten(m,5) = 0;
    for k1=0:floor(3*a/gro)
        k = gro*k1;
        for l1=0:floor(a/gro)
            l = gro*l1;
            if (j+l > k) & (j < k) & (l < k)
                kosten1(m,1) = f*j + g*l + h*k;
                kosten1(m,2) = j;
                kosten1(m,3) = l;
                kosten1(m,4) = k;
                kosten1(m,5) = (j*l - 0.5*(j+l-k)^2)/(a^2);
                if (beta <= kosten1(m,5)) & (kosten1(m,1) <= kosten(m,1))
                    for z=1:5
                        kosten(m,z) = kosten1(m,z);
                    end
                end
            end
        end
    end
    m=m+1;
end

```

```

[Y,J] = min(kosten(:,1));
s3 = kosten(J,2);
s6 = kosten(J,3);
s7 = kosten(J,4);

```

```

m=1;
for j=s3-gro:s3+gro
    for k=s7-gro:s7+gro
        for l=s6-gro:s6+gro
            kosten2(m,1) = Inf;
            kosten2(m,2) = 0;
            kosten2(m,3) = 0;
            kosten2(m,4) = 0;
            kosten2(m,5) = 0;
            if (j+l > k) & (j < k) & (l < k) & (j <= a) & (l <= a)
                kosten3(m,1) = f*j + g*l + h*k;
                kosten3(m,2) = j;
                kosten3(m,3) = l;
                kosten3(m,4) = k;
                kosten3(m,5) = (j*l - 0.5*(j+l-k)^2)/(a^2);
                if (beta <= kosten3(m,5))
                    for z=1:5
                        kosten2(m,z) = kosten3(m,z);
                    end
                end
            end
        end
    end
    m=m+1;
end
end

```

```

[Y,J] = min(kosten2(:,1));

```

```

disp('kosten')
disp(kosten2(J,1))
disp('service niveau')
disp(kosten2(J,5))
disp('voorraad component 3')
disp(kosten2(J,2))
disp('voorraad component 6')
disp(kosten2(J,3))
disp('voorraad component 7')
disp(kosten2(J,4))

```

function expcom = expcom(a,beta,f,g,h,gro)

```

% a = parameter exponentiele verdeling
% beta = waarde van ASL
% f = kosten van component 3
% g = kosten van component 6
% h = kosten van component 7
% gro = mate van nauwkeurigheid

```

```

b = 1/a;
m=1;

```

```

for j1=floor(a/gro):floor(10*a/gro)
    j = gro*j1;
    kosten(m,1) = Inf;
    kosten(m,2) = 0;
    kosten(m,3) = 0;
    kosten(m,4) = 0;
    kosten(m,5) = 0;
    for k1=floor(a/gro):floor(10*a/gro)
        k = gro*k1;
        for l1=floor(a/gro):floor(10*a/gro)
            l = gro*l1;
            if (j+l > k) & (j < k) & (l < k)
                kosten1(m,1) = f*j + g*l + h*k;
                kosten1(m,2) = j;
                kosten1(m,3) = l;
                kosten1(m,4) = k;
                kosten1(m,5) = 1 - exp(-b*j) - exp(-b*l) - ((j + l - k)*b-1)*exp(-b*k);
                if (beta <= kosten1(m,5)) & (kosten1(m,1) <= kosten(m,1))
                    for z=1:5
                        kosten(m,z) = kosten1(m,z);
                    end
                end
            end
        end
    end
    m=m+1;
end

```

```

[Y,J] = min(kosten(:,1));
s3 = kosten(J,2);
s6 = kosten(J,3);
s7 = kosten(J,4);

```

```

m=1;
for j=s3-gro:s3+gro
    for k=s7-gro:s7+gro
        for l=s6-gro:s6+gro

```

```

kosten2(m,1) = Inf;
kosten2(m,2) = 0;
kosten2(m,3) = 0;
kosten2(m,4) = 0;
kosten2(m,5) = 0;
if (j+l > k) & (j < k) & (l < k)
    kosten3(m,1) = f*j + g*l + h*k;
    kosten3(m,2) = j;
    kosten3(m,3) = l;
    kosten3(m,4) = k;
    kosten3(m,5) = 1 - exp(-b*j) - exp(-b*l) - ((j + l - k)*b-1)*exp(-b*k);
    if (beta <= kosten3(m,5))
        for z=1:5
            kosten2(m,z) = kosten3(m,z);
        end
    end
end
end
m=m+1;
end
end
end

```

```

[Y,J] = min(kosten2(:,1));
disp('kosten')
disp(kosten2(J,1))
disp('service niveau')
disp(kosten2(J,5))
disp('voorraad component 3')
disp(kosten2(J,2))
disp('voorraad component 6')
disp(kosten2(J,3))
disp('voorraad component 7')
disp(kosten2(J,4))

```

function norcom = norcom(c,d,beta,f,g,h,gro)

```

% c,d = parameters normale verdeling
% beta = waarde van ASL
% f = kosten van component 3
% g = kosten van component 6
% h = kosten van component 7
% gro = mate van nauwkeurigheid

```

```

global a;
global b;
global k;
a = c;
b = d;

```

```

m=1;
for j1=floor(a/gro):floor(3*a/gro)
    j = gro*j1;
    kosten(m,1) = Inf;
    kosten(m,2) = Inf;
    kosten(m,3) = Inf;
    kosten(m,4) = Inf;
    kosten(m,5) = Inf;
    for k1=floor(a/gro):floor(5*a/gro)
        k = gro*k1;
        for l1=floor(a/gro):floor(3*a/gro)

```



```

l = gro*l1;
if (j+l > k) & (j < k) & (l < k)
    kosten1(m,1) = f*j + g*l + h*k;
    kosten1(m,2) = j;
    kosten1(m,3) = l;
    kosten1(m,4) = k;
    kosten1(m,5) = normcdf(k-l,a,b)*normcdf(l,a,b) + (1./(sqrt(2*pi)))*quadg('pnorcom',k-l,j);
    if (beta <= kosten1(m,5)) & (kosten1(m,5) <= 1) & (kosten1(m,1) <= kosten(m,1))
        for z=1:5
            kosten(m,z) = kosten1(m,z);
        end
    end
end
end
end
m=m+1
end

[Y,J] = min(kosten(:,1))
s3 = kosten(J,2)
s6 = kosten(J,3)
s7 = kosten(J,4)

m=1;
for j=s3-gro:s3+gro
    for k=s7-gro:s7+gro
        for l=s6-gro:s6+gro
            kosten2(m,1) = Inf;
            kosten2(m,2) = 0;
            kosten2(m,3) = 0;
            kosten2(m,4) = 0;
            kosten2(m,5) = 0;
            if (j+l > k) & (j < k) & (l < k)
                kosten3(m,1) = f*j + g*l + h*k;
                kosten3(m,2) = j;
                kosten3(m,3) = l;
                kosten3(m,4) = k;
                kosten3(m,5) = normcdf(k-l,a,b)*normcdf(l,a,b) + (1./(sqrt(2*pi)))*quadg('pnorcom',k-l,j);
                if (beta <= kosten3(m,5)) & (kosten3(m,5) <= 1)
                    for z=1:5
                        kosten2(m,z) = kosten3(m,z);
                    end
                end
            end
        end
    end
    m=m+1;
end
end

[Y,J] = min(kosten2(:,1));
disp('kosten')
disp(kosten2(J,1))
disp('service niveau')
disp(kosten2(J,5))
disp('voorraad component 3')
disp(kosten2(J,2))
disp('voorraad component 6')
disp(kosten2(J,3))
disp('voorraad component 7')
disp(kosten2(J,4))

```

```
function out = pnorcom(x)
```

```
global a;
global b;
global k;
out = normpdf(x,a,b).*normcdf(k-x,a,b);
```

```
function gamcom = gamcom(a,d,beta,f,g,h,gro)
```

```
% a,d = parameters gammaverdeling
% beta = waarde van ASL
% f = kosten van component 3
% g = kosten van component 6
% h = kosten van component 7
% gro = mate van nauwkeurigheid
```

```
global b;
b = d;
c = 1/b;
mu = a/b;
```

```
m=1
for j1=floor(mu/gro):floor(5*mu/gro)
    j = gro*j1;
    kosten(m,1) = Inf;
    kosten(m,2) = 0;
    kosten(m,3) = 0;
    kosten(m,4) = 0;
    kosten(m,5) = 0;
    for k1=floor(mu/gro):floor(5*mu/gro)
        k = gro*k1;
        for l1=floor(mu/gro):floor(5*mu/gro)
            l = gro*l1;
            if (j+l > k) & (j < k) & (l < k)
                kosten1(m,1) = f*j + g*l + h*k;
                kosten1(m,2) = j;
                kosten1(m,3) = l;
                kosten1(m,4) = k;
                kosten1(m,5) = gamcdf(k-l,a,c)*gamcdf(l,a,c) + 0.5*b.^3*quadg('pgamcom',k-l,j);
                if (beta <= kosten1(m,5)) & (kosten1(m,1) <= kosten(m,1))
                    for z=1:5
                        kosten(m,z) = kosten1(m,z);
                    end
                end
            end
        end
    end
    m=m+1
end
```

```
[Y,J] = min(kosten(:,1));
s3 = kosten(J,2);
s6 = kosten(J,3);
s7 = kosten(J,4);
```

```
m=1
for j=s3-gro:s3+gro
    for k=s7-gro:s7+gro
        for l=s6-gro:s6+gro
```

```

kosten2(m,1) = Inf;
kosten2(m,2) = 0;
kosten2(m,3) = 0;
kosten2(m,4) = 0;
kosten2(m,5) = 0;
if (j+l > k) & (j < k) & (l < k)
    kosten3(m,1) = f*j + g*l + h*k;
    kosten3(m,2) = j;
    kosten3(m,3) = l;
    kosten3(m,4) = k;
    kosten3(m,5) = gamcdf(k-l,a,c)*gamcdf(l,a,c) + 0.5*b.^3*quadg('pgamcom',k-l,j);
    if (beta <= kosten3(m,5))
        for z=1:5
            kosten2(m,z) = kosten3(m,z);
        end
    end
end
m=m+1
end
end
end

```

```

[Y,J] = min(kosten2(:,1));
disp('kosten')
disp(kosten2(J,1))
disp('service niveau')
disp(kosten2(J,5))
disp('voorraad component 3')
disp(kosten2(J,2))
disp('voorraad component 6')
disp(kosten2(J,3))
disp('voorraad component 7')
disp(kosten2(J,4))

```

function out = pgamcom(x)

```

global b
out = x.^2.*exp(-b.*x)-(x.^2 + x.^3*b + x.^4*b.^2).*exp(-2*b*x);

```

D.3 Het Flexible Product Model FO

function unifpm = unifpm(b,beta,d,e,f,g,h,gro,s31,s32,s42,s52,s61,s62,s72)

```

% b = parameter uniforme verdeling
% beta = waarde van ASL
% d = kosten van component 3
% e = kosten van component 4
% f = kosten van component 5
% g = kosten van component 6
% h = kosten van component 7
% gro = mate van nauwkeurigheid
% s31,s32,s42,s52,s61,s71,s72 = grenzen van de te controleren oplossingen.
% Deze worden bepaald aan de hand van de oplossing van het Basis Model en het Commonality
% Model

```

```

o=1;
for j1=(s31/gro):floor(s32/gro)
    j = j1*gro;
    kosten(o,1) = Inf;
    kosten(o,2) = 0;

```



```

kosten(o,3) = 0;
kosten(o,4) = 0;
kosten(o,5) = 0;
kosten(o,6) = 0;
kosten(o,7) = 0;
for k1=0:floor(s42/gro)
    k = k1*gro;
    for l1=0:floor(s52/gro)
        l = l1*gro;
        for m1=floor(s61/gro):floor(s62/gro)
            m = m1*gro;
            for n1=0:floor(s72/gro)
                n = n1*gro;
                if (k <= j) & (l <= m) & (n+k >= j) & (n+l >= m) & (j+m-k-l-n >= 0)
                    kosten1(o,1) = d*j + e*k + f*l + g*m + h*n;
                    kosten1(o,2) = j;
                    kosten1(o,3) = k;
                    kosten1(o,4) = l;
                    kosten1(o,5) = m;
                    kosten1(o,6) = n;
                    kosten1(o,7) = (j*m - 0.5*(j+m-k-l-n)^2)/(b^2);
                    if (beta <= kosten1(o,7)) & (kosten1(o,1) <= kosten(o,1))
                        for z=1:7
                            kosten(o,z) = kosten1(o,z);
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
o=o+1;
end

```

```

[Y,J] = min(kosten(:,1));
disp('kosten')
disp(kosten(J,1))
disp('service niveau')
disp(kosten(J,7))
disp('voorraad component 3')
disp(kosten(J,2))
disp('voorraad component 4')
disp(kosten(J,3))
disp('voorraad component 5')
disp(kosten(J,4))
disp('voorraad component 6')
disp(kosten(J,5))
disp('voorraad component 7')
disp(kosten(J,6))

```

function expfpm = expfpm(a,beta,d,e,f,g,h,gro,s31,s32,s42,s52,s61,s62,s72)

```

% a = parameter exponentiele verdeling
% beta = waarde van ASL
% d = kosten van component 3
% e = kosten van component 4
% f = kosten van component 5
% g = kosten van component 6
% h = kosten van component 7
% gro = mate van nauwkeurigheid

```

```
% s31,s32,s42,s52,s61,s71,s72 = grenzen van de te controleren oplossingen.
% Deze worden bepaald aan de hand van de oplossing van het Basis Model en het Commonality
% Model
```

```
b=1/a;
o=1;
for j1=floor(s31/gro):floor(s32/gro)
    j = j1*gro;
    kosten(o,1) = Inf;
    kosten(o,2) = 0;
    kosten(o,3) = 0;
    kosten(o,4) = 0;
    kosten(o,5) = 0;
    kosten(o,6) = 0;
    kosten(o,7) = 0;
    for k1=0:floor(s42/gro)
        k = k1*gro;
        for l1=0:floor(s52/gro)
            l = l1*gro;
            for m1=floor(s61/gro):floor(s62/gro)
                m = m1*gro;
                for n1=0:floor(s72/gro)
                    n = n1*gro;
                    if (k <= j) & (l <= m) & (n+k >= j) & (n+l >= m) & (j+m-k-l-n >= 0)
                        kosten1(o,1) = d*j + e*k + f*l + g*m + h*n;
                        kosten1(o,2) = j;
                        kosten1(o,3) = k;
                        kosten1(o,4) = l;
                        kosten1(o,5) = m;
                        kosten1(o,6) = n;
                        kosten1(o,7) = 1 - exp(-b*j) - exp(-b*m) - ((j+m-k-l-n)*b-1)*exp(-b*(k+l+n));
                        if (beta <= kosten1(o,7)) & (kosten1(o,1) <= kosten(o,1))
                            for z=1:7
                                kosten(o,z) = kosten1(o,z);
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
    o=o+1;
end
```

```
[Y,J] = min(kosten(:,1));
disp('kosten')
disp(kosten(J,1))
disp('service niveau')
disp(kosten(J,7))
disp('voorraad component 3')
disp(kosten(J,2))
disp('voorraad component 4')
disp(kosten(J,3))
disp('voorraad component 5')
disp(kosten(J,4))
disp('voorraad component 6')
disp(kosten(J,5))
disp('voorraad component 7')
disp(kosten(J,6))
```

```
function gamfpm = gamfpm(a,z,beta,d,e,f,g,h,gro,s31,s32,s42,s52,s61,s62,s72)
```

```
% a,z = parameters gammaverdeling
% beta = waarde van ASL
% d = kosten van component 3
% e = kosten van component 4
% f = kosten van component 5
% g = kosten van component 6
% h = kosten van component 7
% gro = mate van nauwkeurigheid
% s31,s32,s42,s52,s61,s71,s72 = grenzen van de te controleren oplossingen.
% Deze worden bepaald aan de hand van de oplossing van het Basis Model en het Commonality
% Model
```

```
global b
```

```
b = z;
```

```
c = 1/b;
```

```
o=1
```

```
for j1=floor(s31/gro):floor(s32/gro)
```

```
    j = gro*j1;
```

```
    kosten(o,1) = Inf;
```

```
    kosten(o,2) = 0;
```

```
    kosten(o,3) = 0;
```

```
    kosten(o,4) = 0;
```

```
    kosten(o,5) = 0;
```

```
    kosten(o,6) = 0;
```

```
    kosten(o,7) = 0;
```

```
    for k1=0:floor(s42/gro)
```

```
        k = k1*gro;
```

```
        for l1=0:floor(s52/gro)
```

```
            l = l1*gro;
```

```
            for m1=floor(s61/gro):floor(s62/gro)
```

```
                m = m1*gro;
```

```
                for n1=0:floor(s72/gro)
```

```
                    n = n1*gro;
```

```
                    if (k <= j) & (l <= m) & (n+k >= j) & (n+l >= m) & (j+m-k-l-n >= 0)
```

```
                        kosten1(o,1) = d*j + e*k + f*l + g*m + h*n;
```

```
                        kosten1(o,2) = j;
```

```
                        kosten1(o,3) = k;
```

```
                        kosten1(o,4) = l;
```

```
                        kosten1(o,5) = m;
```

```
                        kosten1(o,6) = n;
```

```
                        kosten1(o,7) = gamcdf(k+l+n-m,a,c)*gammcdf(m,a,c) + 0.5*b^3*quadg('pgamfpm',k+l+n-m,j);
```

```
                        if (beta <= kosten1(o,7)) & (kosten1(o,1) <= kosten(o,1))
```

```
                            for z=1:7
```

```
                                kosten(o,z) = kosten1(o,z);
```

```
                            end
```

```
                        end
```

```
                    end
```

```
                end
```

```
            end
```

```
        end
```

```
    end
```

```
o=o+1
```

```
end
```

```
[Y,J] = min(kosten(:,1));
```

```
disp('kosten')
```

```
disp(kosten(J,1))
```



```

disp('service niveau')
disp(kosten(J,7))
disp('voorraad component 3')
disp(kosten(J,2))
disp('voorraad component 4')
disp(kosten(J,3))
disp('voorraad component 5')
disp(kosten(J,4))
disp('voorraad component 6')
disp(kosten(J,5))
disp('voorraad component 7')
disp(kosten(J,6))

```

function out = pgamfpm(x)

```

global b
out = x.^2.*exp(-b.*x)-(x.^2 + x.^3*b + x.^4*b.^2).*exp(-2*b*x);

```

function norfpm = norfpm(A,B,beta,d,e,f,g,h,gro,s31,s32,s41,s42,s51,s52,s61,s62,s71,s72)

```

% A,B = parameter normale verdeling
% beta = waarde van ASL
% d = kosten van component 3
% e = kosten van component 4
% f = kosten van component 5
% g = kosten van component 6
% h = kosten van component 7
% gro = mate van nauwkeurigheid
% s31,s32,s42,s52,s61,s71,s72 = grenzen van de te controleren oplossingen.
% Deze worden bepaald aan de hand van de oplossing van het Basis Model en het Commonality
% Model

```

```

global a;
global b;
global k;
global l;
global n;
a = A;
b = B;

```

```

o=1;
for j1 = floor(s31/gro):floor(s32/gro)
    j = j1*gro;
    kosten(o,1) = Inf;
    kosten(o,2) = 0;
    kosten(o,3) = 0;
    kosten(o,4) = 0;
    kosten(o,5) = 0;
    kosten(o,6) = 0;
    kosten(o,7) = 0;
    for k1=floor(s41/gro):floor(s42/gro)
        k = k1*gro;
        for l1=floor(s42/gro):floor(s52/gro)
            l = l1*gro;
            for m1=floor(s61/gro):floor(s62/gro)
                m = m1*gro;
                for n1=floor(s71/gro):floor(s72/gro)
                    n = n1*gro;
                    if (k <= j) & (l <= m) & (n+k >= j) & (n+l >= m) & (j+m-k-l-n >= 0)
                        kosten1(o,1) = d*j + e*k + f*l + g*m + h*n;
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```



```
plot(r,s, '.')  
title('verdeling gamma(6,0.012)')  
ylabel('dichtheid')
```

function fig27c = fig27c

```
r = normrnd(500,204.12,1,10000);  
s = normpdf(r,500,204.12);  
plot(r,s, '.')  
title('verdeling N(500,204.12)')  
ylabel('dichtheid')
```


Appendix E: Modelberekeningen bij hoofdstuk 5

E.1 Het Commonality Model COI

Voor de individuele serviceniveaus gelden de volgende twee voorwaarden:

$$P(D_1 \leq S_3) - (1 - q)p = SL_1 \text{ en } P(D_2 \leq S_6) - q \cdot p = SL_2 \quad (1)$$

Uit (1) volgt nu:

$$q = \frac{P(D_2 \leq S_6) - SL_2}{p} = \frac{SL_1 - P(D_1 \leq S_3) + p}{p} \quad (2)$$

Uit bovenstaande vergelijkingen moeten nu $P(D_1 \leq S_3)$, $P(D_2 \leq S_6)$ en p bepaald worden:

$$P(D_1 \leq S_3) = \int_0^{S_3} \frac{1}{b_1} dD_1 = \left[\frac{D_1}{b_1} \right]_0^{S_3} = \frac{S_3}{b_1} \text{ en } P(D_2 \leq S_6) = \int_0^{S_6} \frac{1}{b_2} dD_2 = \left[\frac{D_2}{b_2} \right]_0^{S_6} = \frac{S_6}{b_2} \quad (3)$$

p = kans dat er voldoende van de specifieke componenten voor beide eindproducten aanwezig is, maar onvoldoende van de gezamenlijke component om aan de volledige vraag te kunnen voldoen. Met behulp Definitie 2.5.1 op bladzijde 73 van Van der Genugten (1986) volgt nu:

$$p = P([D_1 \leq S_3] \cap [D_2 \leq S_6] \cap [D_1 + D_2 > S_7]) = P([D_1 + D_2 > S_7] \mid ([D_1 \leq S_3] \cap [D_2 \leq S_6])) \cdot P(D_1 \leq S_3) \cdot P(D_2 \leq S_6). \quad (4)$$

Om $P([D_1 + D_2 > S_7] \mid ([D_1 \leq S_3] \cap [D_2 \leq S_6]))$ te bepalen moet eerst de conditionele verdeling van $(D_1 + D_2 \mid D_1 \leq S_3 \cap D_2 \leq S_6)$ berekend worden. Deze conditionele verdeling bestaat uit de convolutie van de volgende twee verdelingen:

$$(D_1 \mid D_1 \leq S_3 \cap D_2 \leq S_6) \text{ en } (D_2 \mid D_1 \leq S_3 \cap D_2 \leq S_6) \quad (5)$$

Aangezien de vraag van de beide eindproducten niet gecorreleerd is kan (5) vereenvoudigd worden tot:

$$(D_1 \mid D_1 \leq S_3) \text{ en } (D_2 \mid D_2 \leq S_6) \quad (6)$$

Om (4) te bepalen moeten dus de convoluties van de verdelingsfuncties $(D_1 \mid D_1 \leq S_3)$ en $(D_2 \mid D_2 \leq S_6)$ berekend worden. Eerst moeten de beide verdelingen zelf berekend worden:

$$P(D_1 \leq x \mid D_1 \leq S_3) = \frac{P(D_1 \leq x, D_1 \leq S_3)}{P(D_1 \leq S_3)} = \frac{\int_0^x \frac{1}{b_1} dx}{\int_0^{S_3} \frac{1}{b_1} dx} = \frac{\left[\frac{x}{b_1} \right]_0^x}{\left[\frac{x}{b_1} \right]_0^{S_3}} = \frac{\frac{x}{b_1}}{\frac{S_3}{b_1}} = \frac{x}{S_3} \quad (7)$$

Uit (7) volgt nu de dichtheid van $(D_1 \leq x \mid D_1 \leq S_3)$:

$$f_{D1}(x) = \frac{1}{S_3} \text{ als } 0 \leq x \leq S_3 \text{ en } 0 \text{ anders} \quad (8)^{36}$$

De afleiding van de dichtheid van de verdeling van $(D_2 \mid D_2 \leq S_6)$ gaat op identieke wijze:

$$f_{D2}(y) = \frac{1}{S_6} \text{ als } 0 \leq y \leq S_6 \text{ en } 0 \text{ anders} \quad (9)$$

Met behulp van (8) en (9) kan nu de dichtheid van de verdeling van $(D_1 + D_2 \mid D_1 \leq S_3 \cap D_2 \leq S_6)$ berekend worden. Deze manier van berekenen wordt gegeven door Van der Genugten (1986) in Voorbeeld 4.4.5 op bladzijde 203.

$X \sim U(0, S_3)$, $Y \sim U(0, S_6)$ en $Z = X + Y$.

De formule voor het berekenen van de dichtheidsfunctie van Z is nu:

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{D1}(x) f_{D2}(z - x) dx \quad (10)$$

waarbij $f_{D1}(x)$ de dichtheid is van X is en $f_{D2}(y)$ de dichtheid van Y is.

Uit (8) t/m (10) volgt nu:

$$f_{D1}(x) f_{D2}(z - x) = \frac{1}{S_3 S_6} \text{ als } 0 \leq x \leq S_3 \text{ en als } 0 \leq z - x \leq S_6. \quad (11)$$

De uitdrukking in (11) heeft nu een waarde $\frac{1}{S_3 S_6}$ als:³⁷

$$\begin{aligned} (a) \quad & 0 < z < S_3 && \text{en } 0 < x < z \\ (b) \quad & S_3 < z < S_6 && \text{en } 0 < x < S_3 \\ (c) \quad & S_6 < z < S_3 + S_6 && \text{en } z - S_6 < x < S_3 \end{aligned} \quad (12)$$

Met behulp van (12) en (10) volgt nu de dichtheidsfunctie van $(D_1 + D_2 \mid D_1 \leq S_3 \cap D_2 \leq S_6)$:

$$(a) \quad 0 < z < S_3 \quad \Rightarrow r(z) = \int_0^z \frac{1}{S_3 S_6} dx = \left[\frac{x}{S_3 S_6} \right]_0^z = \frac{z}{S_3 S_6}$$

³⁶ Uitdrukking (8) komt overeen met uitdrukking 14 op bladzijde 15 van Mirchandani en Mishra (2000). Doordat w_1 en w_2 allebei op één gezet zijn, zijn de volgende functies uit Mirchandani en Mishra (2000) aan elkaar gelijk: De dichtheid van D_1 (geconditioneerd naar S_3 , uitdrukking 14 op bladzijde 15 van Mirchandani en Mishra (2000)) en de dichtheid van de hoeveelheid van de gezamenlijke component die namens eindproduct 1 nodig is ($F_{RC1|RC1 \leq 11}$ op bladzijde 15 van Mirchandani en Mishra (2000)). Hieruit volgt nu dat van de gezamenlijke component S_7 maximaal $S_3 + S_6$ in voorraad kan zijn en minimaal het maximum van S_3 en S_6 .

³⁷ Bij verdere berekeningen wordt de aanname gemaakt dat $S_3 \leq S_6$. Deze aanname is in de berekening nodig maar heeft geen werkelijke waarde. Op basis van de naamgeving van de variabelen geldt dit bij elk willekeurig tweetal verdelingen.

$$(b) \quad S_3 < z < S_6 \quad \Rightarrow r(z) = \int_0^{S_3} \frac{1}{S_3 S_6} dx = \left[\frac{x}{S_3 S_6} \right]_0^{S_3} = \frac{1}{S_6} \quad (13)$$

$$(c) \quad S_6 < z < S_3 + S_6 \quad \Rightarrow r(z) = \int_{z-S_6}^{S_3} \frac{1}{S_3 S_6} dx = \left[\frac{x}{S_3 S_6} \right]_{z-S_6}^{S_3} = \frac{S_3 + S_6 - z}{S_3 S_6}$$

Met behulp van (4) en eigenschap 5.2.1 volgt nu:

$$\begin{aligned} P([D_1 + D_2 > S_7] \mid ([D_1 \leq S_3] \cap [D_2 \leq S_6])) &= \\ \int_{S_7}^{S_3+S_6} \frac{S_3 + S_6 - z}{S_3 S_6} dz &= \left[\frac{S_3 z + S_6 z - 0.5 z^2}{S_3 S_6} \right]_{S_7}^{S_3+S_6} = \\ \frac{S_3^2 + 2S_3 S_6 + S_6^2 - 2S_3 S_7 - 2S_6 S_7 + S_7^2}{2S_3 S_6} & \quad (14) \end{aligned}$$

Met (3) en (14) kan vervolgens (4) worden uitgerekend:

$$\begin{aligned} p &= P([D_1 + D_2 > S_7] \mid ([D_1 \leq S_3] \cap [D_2 \leq S_6])) * P(D_1 \leq S_3) * P(D_2 \leq S_6) = \\ &= \frac{S_3^2 + 2S_3 S_6 + S_6^2 - 2S_3 S_7 - 2S_6 S_7 + S_7^2}{2S_3 S_6} * \frac{S_3}{b_1} * \frac{S_6}{b_2} = \\ &= \frac{S_3^2 + 2S_3 S_6 + S_6^2 - 2S_3 S_7 - 2S_6 S_7 + S_7^2}{2b_1 b_2} = \frac{(S_3 + S_6 - S_7)^2}{2b_1 b_2} \quad (15) \end{aligned}$$

E.2 Berekeningen van het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$)

Range 1: ($S_3 = \beta_1 b_1$, $S_6 = \beta_2 b_2$)

$$\text{Min} \quad c_3 \beta_1 b_1 + c_6 \beta_2 b_2 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d.} \quad \beta_1 - (1-q) * \frac{(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_1 \text{ en } \beta_2 - q * \frac{(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \beta_1 b_1, S_6 = \beta_2 b_2 \\ 0 &\leq q \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

De voorwaarden voor q en S_7 zijn bij range 1 triviaal.

Uit de ondergrenzen van de ranges 2A en 2B volgt nu dat in range 1 moet gelden:

$$F_1 = F_2 = 0^{38} \text{ met } F_1 = \frac{c_7^2 b_2}{2b_1(c_3 + c_7)^2} \text{ en } F_2 = \frac{c_7^2 b_1}{2b_2(c_6 + c_7)^2}. \text{ Dit kan enkel als } c_7 \text{ gelijk}$$

is aan 0. Range 1 gaat nu over in range 2A of range 2B wanneer c_7 groter dan 0 wordt. Range 1 zal in range 2A (en niet in range 2B) overgaan als de kosten van range 2A lager zijn dan van range 2B. Uit de berekeningen bij de ranges 2A en 2B zal blijken dat voor de kosten van het Commonality Model COI geldt:

³⁸ De ondergrenzen van de ranges 2A en 2B worden berekend in Appendix E.2 onder het kopje "range 2A" en "range 2B"

$$T_{\text{COI(RANGE 2A)}} = (c_3 + c_7)b_1(F_1 + \beta_1) + (c_6 + c_7)\beta_2b_2 - \frac{c_7^2b_2}{c_3 + c_7}$$

$$T_{\text{COI(RANGE 2B)}} = (c_6 + c_7)b_2(F_2 + \beta_2) + (c_3 + c_7)\beta_1b_1 - \frac{c_7^2b_1}{c_6 + c_7}$$

Neem nu aan dat geldt: $F_1 > F_2$:

$$\begin{aligned} \frac{c_7^2b_2}{2b_1(c_3 + c_7)^2} &> \frac{c_7^2b_1}{2b_2(c_6 + c_7)^2} \Rightarrow b_2(c_6 + c_7) > b_1(c_3 + c_7) \Rightarrow \frac{-c_7^2b_2}{2(c_3 + c_7)} < \frac{-c_7^2b_1}{2(c_6 + c_7)} \Rightarrow \\ \frac{c_7^2b_2}{2(c_3 + c_7)} - \frac{c_7^2b_2}{c_3 + c_7} &< \frac{c_7^2b_1}{2(c_6 + c_7)} - \frac{c_7^2b_1}{c_6 + c_7} \Rightarrow (c_3 + c_7)b_1F_1 - \frac{c_7^2b_2}{c_3 + c_7} < (c_6 + c_7)b_2F_2 - \frac{c_7^2b_1}{c_6 + c_7} \end{aligned}$$

Hieruit volgt nu dat onder deze voorwaarde de kosten van range 2A kleiner zijn dan van range 2B. Als c_7 nu groter dan 0 wordt zal range 1 overgaan in range 2A. In het geval dat $F_1 < F_2$ is zijn de kosten van range 2B kleiner dan van range 2A. Als c_7 nu groter dan 0 wordt zal range 1 overgaan in range 2B.

Range 2A: ($\beta_1b_1 < S_3 < b_1$, $S_6 = \beta_2b_2$)

$$\text{Min } c_3S_3 + c_6\beta_2b_2 + c_7S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d. } \frac{S_3}{b_1} - (1-q) \cdot \frac{(S_3 + \beta_2b_2 - S_7)^2}{2b_1b_2} = \beta_1 \text{ en } \beta_2 - q \cdot \frac{(S_3 + \beta_2b_2 - S_7)^2}{2b_1b_2} = \beta_2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \beta_1b_1 &< S_3 < b_1, S_6 = \beta_2b_2 \\ 0 &\leq q \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Uit (2) volgt nu meteen dat q gelijk is aan 0.

Met behulp van Karush-Kuhn-Tucker (Qi en Jiang, 1997) kan het bovenstaande probleem nu worden opgelost. Voor range 2A zullen de Karush-Kuhn-Tucker voorwaarden volledig worden uitgeschreven. Bij andere ranges worden enkel het model en de oplossing gegeven. De K-K-T-functie wordt nu:

$$\ell = c_3S_3 + c_6\beta_2b_2 + c_7S_7 + u_1(\beta_1b_1 - S_3) + u_2(S_3 - b_1) + v_1\left(\frac{S_3}{b_1} - \frac{(S_3 + \beta_2b_2 - S_7)^2}{2b_1b_2} - \beta_1\right)$$

Door differentiëren en gebruikmaking van de K-K-T voorwaarden ontstaan nu de volgende functies :

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_3} = c_3 - u_1 + u_2 + v_1\left(\frac{1}{b_1} - \frac{S_3 + \beta_2b_2 - S_7}{b_1b_2}\right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S_7} = c_7 + v_1\left(\frac{S_3 + \beta_2b_2 - S_7}{b_1b_2}\right) = 0 \quad (5)$$

$$u_1, u_2 \geq 0 \quad (6)$$

$$\beta_1b_1 - S_3 < 0, S_3 - b_1 < 0 \quad (7)$$

$$u_1(\beta_1b_1 - S_3) = 0, u_2(S_3 - b_1) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{S_3}{b_1} - (1-q) * \frac{(S_3 + \beta_2 b_2 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_1 \quad (9)$$

$$\text{Uit (5) volgt nu: } v_1 = \frac{-c_7 b_1 b_2}{S_3 + \beta_2 b_2 - S_7} \quad (10)$$

$$(10) \text{ invullen in (4) geeft: } S_3 = \frac{c_7}{c_3 + c_7} b_2 - \beta_2 b_2 + S_7 \quad (11)$$

Invullen van (11) in (9) geeft nu de volgende oplossing voor S_3 en S_7 :

$$S_3 = b_1(F_1 + \beta_1) \text{ en } S_7 = b_1(F_1 + \beta_1) + \beta_2 b_2 - \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7} \quad (12)$$

Met behulp van (12) kunnen nu de kosten van het Commonality Model COI bij range 2A berekend worden:

$$T_{\text{COI}} = (c_3 + c_7)b_1(F_1 + \beta_1) + (c_6 + c_7)\beta_2 b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7} \quad (13)$$

Aan de voorwaarden voor q ($0 \leq q \leq 1$) is in range 2A automatisch voldaan.

Bij de voorwaarden voor S_7 geldt:

$$(1) S_7 = b_1(F_1 + \beta_1) + \beta_2 b_2 - \frac{c_7}{c_3 + c_7} b_2 < b_1(F_1 + \beta_1) + \beta_2 b_2 = S_3 + S_6$$

$$(2) \beta_2 \geq \frac{c_7}{c_3 + c_7} \Rightarrow \beta_2 b_2 - \frac{c_7}{c_3 + c_7} b_2 \geq 0 \Rightarrow b_1(F_1 + \beta_1) + \beta_2 b_2 - \frac{c_7}{c_3 + c_7} b_2 \geq b_1(F_1 + \beta_1) \Rightarrow S_7 \geq S_3$$

1) Volgt uit eigenschap 5.2.1. (Indien eigenschap 5.2.1 niet geldt kan $S_7 \geq S_3$ niet bewezen worden.

$$(3) \beta_1 \geq \frac{c_7 b_2}{b_1(c_3 + c_7)} * (1 - \frac{c_7}{2(c_3 + c_7)}) \Rightarrow b_1(F_1 + \beta_1) - \frac{c_7}{c_3 + c_7} b_2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$b_1(F_1 + \beta_1) + \beta_2 b_2 - \frac{c_7}{c_3 + c_7} b_2 \geq \beta_2 b_2 \Rightarrow S_7 \geq S_6$$

1) Volgt uit eigenschap 5.2.1. (Indien eigenschap 5.2.1 niet geldt kan $S_7 \geq S_6$ niet bewezen worden.

Ondergrens van range 2A:

$$S_3 > \beta_1 b_1 \Rightarrow b_1(F_1 + \beta_1) > \beta_1 b_1 \Rightarrow F_1 > 0$$

Bovengrens bij overgang van range 2A naar range 3A:

$$S_3 < b_1 \Rightarrow b_1(F_1 + \beta_1) < b_1 \Rightarrow F_1 + \beta_1 < 1$$

Bovengrens bij overgang van range 2A naar range 3B:

Deze volgt uit de ondergrens van range 3B.

Range 2B: ($S_3 = \beta_1 b_1, \beta_2 b_2 < S_6 < b_2$)

$$\text{Min } c_3 \beta_1 b_1 + c_6 S_6 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d. } \beta_1 - (1-q) * \frac{(\beta_1 b_1 + S_6 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_1 \text{ en } \frac{S_6}{b_2} - q * \frac{(\beta_1 b_1 + S_6 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_2 \quad (2)$$

$$S_3 = \beta_1 b_1, \beta_2 b_2 < S_6 < b_2 \quad (3)$$

$$0 \leq q \leq 1$$

Uit (2) volgt nu onmiddellijk dat q gelijk is aan 1. De K-K-T-functie wordt nu:

$$\ell = c_3\beta_1b_1 + c_6S_6 + c_7S_7 + u_1(\beta_2b_2 - S_6) + u_2(S_6 - b_2) + v_1\left(\frac{S_6}{b_2} - \frac{(\beta_1b_1 + S_6 - S_7)^2}{2b_1b_2} - \beta_2\right)$$

Aan de voorwaarden voor q ($0 \leq q \leq 1$) is in range 2B automatisch voldaan. De kosten van het Commonality Model COI in range 2B zijn:

$$T_{COI} = (c_6 + c_7)b_2(F_2 + \beta_2) + (c_3 + c_7)\beta_1b_1 - \frac{c_7^2b_1}{c_6 + c_7}$$

Bij de voorwaarden voor S_7 geldt:

$$(1) S_7 = \beta_1b_1 + b_2(F_2 + \beta_2) - \frac{c_7}{c_6 + c_7}b_1 < \beta_1b_1 + b_2(F_2 + \beta_2) = S_3 + S_6$$

$$(2) \beta_2 \geq \frac{c_7b_1}{(c_3 + c_7)b_2} * (1 - \frac{c_7}{2(c_6 + c_7)}) \Rightarrow b_2(F_2 + \beta_2) - \frac{c_7}{c_6 + c_7}b_1 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\beta_1b_1 + b_2(F_2 + \beta_2) - \frac{c_7}{c_6 + c_7}b_1 \geq \beta_1b_1 \Rightarrow S_7 \geq S_3$$

1) Volgt uit eigenschap 5.2.1. (Indien eigenschap 5.2.1 niet geldt kan $S_7 \geq S_3$ niet bewezen worden.

$$(3) \beta_1 \geq \frac{c_7}{c_6 + c_7} \Rightarrow b_1\beta_1 - \frac{c_7}{c_6 + c_7}b_1 \geq 0 \Rightarrow \beta_1b_1 + b_2(F_2 + \beta_2) - \frac{c_7}{c_3 + c_7}b_2 \geq b_2(F_2 + \beta_2) \Rightarrow S_7 \geq S_6$$

1) Volgt uit eigenschap 5.2.1. (Indien eigenschap 5.2.1 niet geldt kan $S_7 \geq S_6$ niet bewezen worden.

Ondergrens van range 2B:

$$S_6 > \beta_2b_2 \Rightarrow b_2(F_2 + \beta_2) > \beta_2b_2 \Rightarrow F_2 > 0$$

Bovengrens bij overgang van range 2B naar range 3B:

Deze volgt uit de ondergrens van range 3B.

Bovengrens bij overgang van range 2B naar range 3C:

$$S_6 < b_2 \Rightarrow b_2(F_2 + \beta_2) < b_2 \Rightarrow F_2 + \beta_2 < 1$$

Range 3A: ($S_3 = b_1$, $S_6 = \beta_2b_2$)

$$\text{Min } c_3S_3 + c_6\beta_2b_2 + c_7S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d. } 1 - (1-q) * \frac{(b_1 + \beta_2b_2 - S_7)^2}{2b_1b_2} = \beta_1 \text{ en } \beta_2 - q * \frac{(b_1 + \beta_2b_2 - S_7)^2}{2b_1b_2} = \beta_2 \quad (2)$$

$$S_3 = b_1, S_6 = \beta_2b_2 \quad (3)$$

$$0 \leq q \leq 1$$

Uit de twee gelijkheden van (2) volgt nu de oplossing van deze range.

Aan de voorwaarden voor q ($0 \leq q \leq 1$) is in range 3A automatisch voldaan.

Bij de voorwaarden voor S_7 geldt:

$$(1) \quad S_7 = b_1 + \beta_2 b_2 - \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta_1)} < b_1 + \beta_2 b_2 = S_3 + S_6$$

$$(2) \quad \beta_2 \geq \frac{c_7}{c_3 + c_7} \Rightarrow \beta_2^2 b_2 \geq \left(\frac{c_7}{c_3 + c_7} \right)^2 b_2 = 2b_1 F_1 \geq 2b_1 (1 - \beta_1) \Rightarrow$$

$$\beta_2^2 b_2 \geq 2b_1 b_2 (1 - \beta_1) \Rightarrow \beta_2 b_2 - \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta_1)} \geq 0 \Rightarrow S_7 \geq S_3$$

1) Volgt uit eigenschap 5.2.1. (Indien eigenschap 5.2.1 niet geldt kan $S_7 \geq S_3$ niet bewezen worden.

$$(3) \quad \beta_1 \geq 1 - \frac{b_1}{2b_2} \Rightarrow b_1 \geq \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta_1)} \Rightarrow b_1 + \beta_2 b_2 - \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta_1)} \geq \beta_2 b_2 \Rightarrow$$

$$S_7 \geq S_6$$

1) Volgt uit eigenschap 5.2.1. (Indien eigenschap 5.2.1 niet geldt kan $S_7 \geq S_6$ niet bewezen worden.

Ondergrens bij overgang van range 3A uit range 2A:

Deze volgt uit de bovengrens van range 2A.

Bovengrens bij overgang van range 3A naar range 4A:

Deze volgt uit de ondergrens van range 4A.

Range 3B: ($\beta_1 b_1 < S_3 < b_1$, $\beta_2 b_2 < S_6 < b_2$)

$$\text{Min} \quad c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d.} \quad \frac{S_3}{b_1} - (1-q) \frac{(S_3 + S_6 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_1 \text{ en } 1 - q \frac{(S_3 + S_6 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_2 \quad (2)$$

$$\beta_1 b_1 < S_3 < b_1, \beta_2 b_2 < S_6 < b_2 \quad (3)$$

$$0 \leq q \leq 1$$

De oplossing van range 3B volgt uit het bovenstaande model. Range 3B heeft echter geen eenduidige oplossing doordat de variabele q onbepaald blijft:

$$S_3 = \beta_1 b_1 + (1-q) \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)^2}, S_6 = \beta_2 b_2 + q \frac{(c_7 b_2)^2}{2b_1 (c_3 + c_7)^2}, S_7 = S_3 + S_6 - \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7}$$

Range 3C: ($S_3 = \beta_1 b_1$, $S_6 = b_2$)

$$\text{Min} \quad c_3 \beta_1 b_1 + c_6 b_2 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d.} \quad \beta_1 - (1-q) \frac{(\beta_1 b_1 + b_2 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_1 \text{ en } 1 - q \frac{(\beta_1 b_1 + b_2 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_2 \quad (2)$$

$$S_3 = \beta_1 b_1, S_6 = b_2 \quad (3)$$

$$0 \leq q \leq 1$$

Uit de twee gelijkheden van (2) volgt nu de oplossing van range 3C.

Aan de voorwaarden voor q ($0 \leq q \leq 1$) is in range 3C automatisch voldaan.

Bij de voorwaarden voor S_7 geldt:

$$(1) \quad S_7 = \beta_1 b_1 + b_2 - \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta_2)} < \beta_1 b_1 + b_2 = S_3 + S_6$$

$$(2) \quad \beta_2 \geq 1 - \frac{b_2}{2b_1} \Rightarrow^1 b_2 \geq \sqrt{2b_1b_2(1-\beta_2)} \Rightarrow \beta_1b_1 + b_2 - \sqrt{2b_1b_2(1-\beta_2)} \geq \beta_1b_1 \Rightarrow$$

$$S_7 \geq S_3.$$

1) Volgt uit eigenschap 5.2.1. (Indien eigenschap 5.2.1 niet geldt kan $S_7 \geq S_3$ niet bewezen worden.

$$(3) \quad \beta_1 \geq \frac{c_7}{c_6 + c_7} \Rightarrow^1 \beta_1^2 b_1 \geq \left(\frac{c_7}{c_6 + c_7} \right)^2 b_1 = 2b_2 F_2 \geq 2b_2(1 - \beta_2) \Rightarrow$$

$$\beta_1^2 b_1 \geq 2b_1b_2(1 - \beta_2) \Rightarrow \beta_1b_1 - \sqrt{2b_1b_2(1-\beta_2)} \geq 0 \Rightarrow S_7 \geq S_6.$$

1) Volgt uit eigenschap 5.2.1. (Indien eigenschap 5.2.1 niet geldt kan $S_7 \geq S_3$ niet bewezen worden.

Ondergrens bij overgang van range 3C uit range 2B:

Deze volgt uit de bovengrens van range 2B.

Bovengrens bij overgang van range 3C naar range 4B:

Deze volgt uit de ondergrens van range 4B.

Range 4A: ($S_3 = b_1, \beta_2 b_2 < S_6 < b_2$)

$$\text{Min} \quad c_3 b_1 + c_6 S_6 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d.} \quad 1 - (1-q)^* \frac{(b_1 + S_6 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_1 \text{ en } \frac{S_6}{b_2} - q^* \frac{(b_1 + S_6 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_2 \quad (2)$$

$$S_3 = b_1, \beta_2 b_2 < S_6 < b_2 \quad (3)$$

$$0 \leq q \leq 1$$

Uit (2) volgt nu dat q geen 0 en 1 kan zijn. Dit is nodig bij het berekenen van de oplossing met behulp van Karush-Kuhn-Tucker. De K-K-T-functie wordt nu:

$$\begin{aligned} \ell = & c_3 b_1 + c_6 S_6 + c_7 S_7 + u_1(\beta_2 b_2 - S_6) + u_2(S_6 - b_2) \\ & + v_1(1 - (1-q)^* \frac{(b_1 + S_6 - S_7)^2}{2b_1 b_2} - \beta_1) + v_2(\frac{S_6}{b_2} - q^* \frac{(b_1 + S_6 - S_7)^2}{2b_1 b_2} - \beta_2) \end{aligned}$$

Bij de voorwaarden voor q geldt :

(1) Uit de voorwaarden van range 4A volgt: $1 < F_2 + \beta_1 \Rightarrow F_2 + \beta_1 - 1 > 0$.
Aangezien F_2 ook groter of gelijk aan 0 is geldt nu $q > 0$.

$$(2) \quad \beta_1 \leq 1 \Rightarrow F_2 + \beta_1 - 1 \leq F_2 \Rightarrow \frac{F_2 + \beta_1 - 1}{F_2} = q \leq 1$$

Bij de voorwaarden voor S_7 geldt:

$$(1) \quad S_7 = b_1 + b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) - \frac{c_7 b_1}{c_6 + c_7} < b_1 + b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) = S_3 + S_6$$

$$(2) \quad \frac{c_7 b_1}{c_6 + c_7} <^1 \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7} \leq^2 \beta_2 b_2 < b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) \Rightarrow$$

$$b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) - \frac{c_7 b_1}{c_6 + c_7} \geq 0 \Rightarrow S_7 \geq S_3$$

1) Volgt uit $F_1 > F_2$.

2) Volgt uit de voorwaarden voor β_2 .

$$(3) \quad 1 > \frac{c_7}{c_6 + c_7} \Rightarrow b_1 > \frac{c_7 b_1}{c_6 + c_7} \Rightarrow b_1 + b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) - \frac{c_7 b_1}{c_6 + c_7} > b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) \Rightarrow S_7 > S_6$$

Ondergrens bij overgang van range 4A uit range 3A:

$$S_6 > \beta_2 b_2 \Rightarrow b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) > b_2 \beta_2 \Rightarrow F_2 + \beta_1 > 1$$

Ondergrens bij overgang van range 4A uit range 3B:

Deze volgt uit de bovengrens van range 3B.

Bovengrens bij overgang van range 4A naar range 5 :

$$S_6 < b_2 \Rightarrow b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) < b_2 \Rightarrow F_2 + \beta_1 + \beta_2 < 2$$

Range 4B: ($\beta_1 b_1 < S_3 < b_1$, $S_6 = b_2$)

$$\text{Min} \quad c_3 S_3 + c_6 b_2 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d.} \quad \frac{S_3}{b_1} - (1-q) \frac{(S_3 + b_2 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_1 \text{ en } 1 - q \frac{(S_3 + b_2 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_2 \quad (2)$$

$$\beta_1 b_1 < S_3 < b_1, S_6 = b_2 \quad (3)$$

$$0 \leq q \leq 1$$

Uit (2) volgt nu dat q geen 0 en 1 kan zijn. Dit is nodig bij het berekenen van de oplossingen met behulp van Karush-Kuhn-Tucker. De K-K-T-functie wordt nu:

$$\begin{aligned} \ell = & c_3 S_3 + c_6 b_2 + c_7 S_7 + u_1(\beta_1 b_1 - S_3) + u_2(S_3 - b_1) \\ & + v_1\left(\frac{S_3}{b_1} - (1-q) \frac{(\beta_1 b_1 + b_2 - S_7)^2}{2b_1 b_2} - \beta_1\right) + v_2\left(1 - q \frac{(\beta_1 b_1 + b_2 - S_7)^2}{2b_1 b_2} - \beta_2\right) \end{aligned}$$

Bij de voorwaarden voor q geldt :

(1) Uit de voorwaarden van range 4B volgt: $1 \leq F_1 + \beta_2 \Rightarrow F_1 + \beta_2 - 1 \geq 0$.
Aangezien F_1 ook groter of gelijk aan 0 is geldt nu $q \geq 0$.

$$(2) \quad \beta_2 \leq 1 \Rightarrow F_1 + \beta_2 - 1 \leq F_1 \Rightarrow \frac{F_1 + \beta_2 - 1}{F_1} = q \leq 1$$

Bij de voorwaarden voor S_7 geldt:

$$(1) \quad S_7 = b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1) + b_2 - \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7} < b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1) + b_2 = S_3 + S_6$$

$$(2) \quad 1 > \frac{c_7}{c_3 + c_7} \Rightarrow b_2 > \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7} \Rightarrow b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1) + b_2 - \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7} > b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1) \Rightarrow S_7 > S_3$$

$$(3) \quad \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7} < \frac{c_7 b_1}{c_6 + c_7} \leq \beta_1 b_1 < b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1) \Rightarrow$$

$$b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1) - \frac{c_7 b_2}{c_3 + c_7} \geq 0 \Rightarrow S_7 \geq S_6$$

1) Volgt uit $F_2 > F_1$.

2) Volgt uit de voorwaarden voor β_2 .

Ondergrens bij overgang van range 4B uit range 3B:
Deze volgt uit de bovengrens van range 3B.

Ondergrens bij overgang van range 4B uit range 3C:
 $S_3 > \beta_1 b_1 \Rightarrow b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1) > b_1 \beta_1 \Rightarrow F_1 + \beta_2 > 1$

Bovengrens bij overgang van range 4B naar range 5:
 $S_3 < b_1 \Rightarrow b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1) < b_1 \Rightarrow F_1 + \beta_1 + \beta_2 < 2$

Range 5: ($S_3 = b_1$, $S_6 = b_2$)

$$\text{Min } c_3 b_1 + c_6 b_2 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{o.v.d. } 1 - (1-q) \frac{(b_1 + b_2 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_1 \text{ en } 1 - q \frac{(b_1 + b_2 - S_7)^2}{2b_1 b_2} = \beta_2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S_3 &= b_1, S_6 = b_2 \\ 0 &\leq q \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Oplossen van de gelijkheden uit (2) geeft de oplossing van range 5.

Bij de voorwaarden voor q geldt:

- (1) $\beta_2 \leq 1$ en $\beta_1 + \beta_2 \leq 2$. Hieruit volgt dat $q \geq 0$.
- (2) $\beta_1 \leq 1 \Rightarrow -\beta_1 \geq -1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \beta_1 \Rightarrow 1 - \beta_2 \leq 2 - \beta_1 - \beta_2 \Rightarrow q \leq 1$.

Bij de voorwaarden voor S_7 geldt:

$$(1) \quad S_7 = b_1 + b_2 - \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta_1 - \beta_2)} < b_1 + b_2 = S_3 + S_6$$

$$\begin{aligned} (2) \quad b_2 &> \frac{c_7^2 b_2}{(c_3 + c_7)^2} = 2b_1 F_1 \geq 1 \quad 2b_1(2 - \beta_1 - \beta_2) \Rightarrow b_2^2 \geq 2b_1 b_2 (2 - \beta_1 - \beta_2) \Rightarrow \\ b_2 &\geq \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta_1 - \beta_2)} \Rightarrow b_1 + b_2 - \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta_1 - \beta_2)} \geq b_1 \Rightarrow S_7 \geq b_1 = S_3 \\ 1) &\text{ Volgt uit de voorwaarden van range 5.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad b_1 &> \frac{c_7^2 b_1}{(c_6 + c_7)^2} = 2b_2 F_2 \geq 1 \quad 2b_2(2 - \beta_1 - \beta_2) \Rightarrow b_1^2 \geq 2b_1 b_2 (2 - \beta_1 - \beta_2) \Rightarrow \\ b_1 &\geq \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta_1 - \beta_2)} \Rightarrow b_1 + b_2 - \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta_1 - \beta_2)} \geq b_2 \Rightarrow S_7 \geq b_2 = S_6 \\ 1) &\text{ Volgt uit de voorwaarden van range 5.} \end{aligned}$$

Ondergrens bij overgang van range 5 uit range 4A:
Deze volgt uit de bovengrens van range 4A.

Ondergrens bij overgang van range 5 uit range 4B:
Deze volgt uit de bovengrens van range 4B.

E.3 Berekeningen van het Commonality Model COI ($F_1 = F_2$)

Range 1: Zelfde oplossing als bij het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$)

Range 2(A): Zelfde oplossing als bij het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$)

Range 2(B): De oplossingen voor S_3 , S_6 , S_7 en q blijven hetzelfde. Op basis van $F_1 = F_2$ geldt nu voor T_{COI} :

$$T_{COI(RANGE\ 2B)} = (c_6 + c_7) b_2(F_2 + \beta_2) + (c_3 + c_7) \beta_1 b_1 - \frac{c_7^2 b_1}{c_6 + c_7} =$$

$$(c_3 + c_7) \beta_1(b_1 + F_1) + (c_6 + c_7) \beta_2 b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7} = T_{COI(RANGE\ 2A)}$$

Uit het bovenstaande volgt dat de kosten van range 2A en range 2B aan elkaar gelijk zijn. Er is dus één range 2 waarbij er twee verschillende oplossingen zijn, die gelijke kosten hebben. Deze range 2 heeft nu de volgende onder- en bovengrenzen:

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow 2(A): & \quad F_1 > 0 \\ 2(A) \rightarrow 3A: & \quad F_1 + \beta_1 \leq 1 \\ 1 \rightarrow 2(B): & \quad F_2 = F_1 > 0 \\ 2(B) \Rightarrow 3C: & \quad F_2 + \beta_2 = F_1 + \beta_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Range 3A: De oplossingen voor S_3 , S_6 , S_7 en q blijven hetzelfde. Voor de boven- en ondergrenzen van range 3A geldt nu:

$$\begin{aligned} 2(A) \rightarrow 3A: & \quad F_1 + \beta_1 \geq 1 \\ 3A \rightarrow 4(A): & \quad F_2 + \beta_1 = F_1 + \beta_1 \leq 1 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat range 3A enkel bestaat als $F_1 + \beta_1 = 1$. Aangezien deze waarde al mogelijk is bij range 2(A) met gelijke kosten als bij range 3A kan range 3A nu vervallen.

Range 3B: De oplossingen voor S_3 , S_6 , S_7 blijven hetzelfde. Op basis van $F_1 = F_2$ geldt nu voor $T_{COI} = (c_3 + c_7) \beta_1(b_1 + F_1) + (c_6 + c_7) \beta_2 b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7}$. De

kosten van range 3B zijn nu gelijk aan die van range 2(A) en range 2(B). De variabele q kan in range 3B elke waarde tussen 0 en 1 aannemen. Als q de waarde 0 heeft is de oplossing van range 3B gelijk aan die van range 2(A). Heeft q de waarde 1 dan is de oplossing van range 3B gelijk aan die van range 2(B). Op basis van deze informatie kan range 3B dus als een onderdeel van range 2 beschouwd worden.

Range 3C: De oplossingen voor S_3 , S_6 , S_7 en q blijven hetzelfde. Voor de boven- en ondergrenzen van range 3(C) geldt nu:

$$\begin{aligned} 2(B) \rightarrow 3C: & \quad F_1 + \beta_2 \geq 1 \\ 3C \rightarrow 4(B): & \quad F_1 + \beta_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat range 3C enkel bestaat als $F_1 + \beta_2 = 1$. Aangezien deze waarde al mogelijk is bij range 2(B) met gelijke kosten als bij range 3C kan range 3C nu vervallen.

Range 4(A): De oplossingen voor S_3 , S_6 , S_7 en q blijven hetzelfde. Op basis van $F_1 = F_2$ geldt nu voor T_{COI} :

$$T_{\text{COI(RANGE 4A)}} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) - \frac{c_7^2 b_1}{c_6 + c_7} =$$

$$(c_3 + c_7) b_1(F_1 + \beta_1 + \beta_2 - 1) + (c_6 + c_7)b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7} = T_{\text{COI(RANGE 4B)}}$$

Range 4(B): Zelfde oplossing als bij het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$)

Uit het bovenstaande volgt dat de kosten van range 4(A) en range 4(B) aan elkaar gelijk zijn. Er is dus één range 4 waarbij er twee verschillende oplossingen zijn, die gelijke kosten hebben. Deze range 4 heeft nu de volgende onder- en bovengrenzen:

$$3A \rightarrow 4(A): F_1 + \beta_1 > 1$$

$$4(A) \rightarrow 5: F_2 + \beta_1 + \beta_2 = F_1 + \beta_1 + \beta_2 < 2$$

$$3C \rightarrow 4(B): F_1 + \beta_2 > 1$$

$$4(B) \Rightarrow 5: F_1 + \beta_1 + \beta_2 < 2$$

Range 5: Zelfde oplossing als bij het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$)

Met behulp van de bovenstaande gegevens zijn er bij het Commonality Model COI ($F_1 = F_2$) nu een viertal ranges:

Range 1: Zelfde oplossing als bij het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$)

Range 2: Deze bevat de ranges 2A, 2B en 3B van het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$).

Range 3: Deze bevat de ranges 4A en 4B van het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$).

Range 4: Deze bevat range 5 van het Commonality Model COI ($F_1 \neq F_2$).

Appendix F: Kostenberekeningen bij hoofdstuk 6

Eigenschap 6.1.1: De kosten van het Basis Model BO (T_{BO}) zijn altijd lager dan de kosten van het Basis Model BOI (T_{BOI}) als het geaggregeerde serviceniveau β van het Basis Model BO gelijk is aan de individuele serviceniveaus (β_1 en β_2) van het Basis Model BOI.

Range 1 bij BO en range 1 bij BOI:

$$S_{3|BO} = \sqrt{\beta b_1^2 \frac{b_2(c_5 + c_6)}{b_1(c_3 + c_4)}} >^1 \sqrt{\beta^2 b_1^2} = \beta b_1 = S_{3|BOI}$$

$$S_{6|BO} = \sqrt{\beta b_2^2 \frac{b_1(c_3 + c_4)}{b_2(c_5 + c_6)}} >^1 \sqrt{\beta^2 b_2^2} = \beta b_2 = S_{6|BOI}$$

1) Volgt uit de voorwaarde $\beta < \min\left(\frac{b_1(c_3 + c_4)}{b_2(c_5 + c_6)}, \frac{b_2(c_5 + c_6)}{b_1(c_3 + c_4)}\right)$ van range 1 bij BO.

Uit het bovenstaande volgt nu dat de kosten van het Basis Model BO groter zijn dan die van het Basis Model BOI.

Range 2A bij BO en range 1 bij BOI:

$$T_{BO} = b_1(c_3 + c_4) + \beta b_2(c_5 + c_6) > \beta b_1(c_3 + c_4) + \beta b_2(c_5 + c_6) = T_{BOI}$$

Range 2B bij BO en range 1 bij BOI:

$$T_{BO} = \beta b_1(c_3 + c_4) + b_2(c_5 + c_6) > \beta b_1(c_3 + c_4) + \beta b_2(c_5 + c_6) = T_{BOI}$$

Range 3 bij BO en range 1 bij BOI:

$$T_{BO} = b_1(c_3 + c_4) + b_2(c_5 + c_6) > \beta b_1(c_3 + c_4) + \beta b_2(c_5 + c_6) = T_{BOI}$$

Eigenschap 6.1.2: De kosten van het Commonality Model COI (T_{COI}) zijn altijd lager dan de kosten van het Commonality Model CO (T_{CO}) als het geaggregeerde serviceniveau β van het Commonality Model CO gelijk is aan de individuele serviceniveaus (β_1 en β_2) van het Commonality Model COI.

Range 1 bij CO en range 1 bij COI:

Bij Range 1 COI geldt dat c_7 gelijk is aan 0.

$$S_{3|CO} = \sqrt{\frac{\beta b_1 b_2 c_6}{c_3}} = \sqrt{\beta b_1} * \sqrt{\frac{b_1 b_2 c_6}{b_1 c_3}} >^1 \sqrt{\beta b_1} * \sqrt{\beta b_1} = \beta b_1 = S_{3|COI}$$

1) Uit de voorwaarden van range 1 CO volgt: $\beta < \frac{b_2 c_6}{b_1 c_3}$.

Op identieke wijze volgt dan: $S_{6|CO} > S_{6|COI}$. Hiermee is dan automatisch bewezen: $T_{CO} > T_{COI}$.

Range 1 bij CO en range 2A bij COI:

$$T_{CO} = 2a\sqrt{\beta b_1 b_2} = 2a\sqrt{\beta b_1 b_2} \frac{(c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2}{(c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2} >^1 \beta [(c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2] >$$

$$\beta[(c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2] - \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)} = (c_3 + c_7)b_1(F_1 + \beta) + (c_6 + c_7)\beta b_2 -$$

$$\frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7} = T_{COI} \quad \text{met } F_1 = \frac{c_7^2 b_2}{2b_1(c_3 + c_7)^2} \text{ en } F_2 = \frac{c_7^2 b_1}{2b_2(c_6 + c_7)^2}.$$

1) Een van de voorwaarden voor β bij range 1 CO is:

$$\beta < \min \left[\frac{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2}{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2}, \frac{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2}{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2} \right]. \text{ Hieruit volgt: } \beta < \frac{b_1(c_3 + c_7)}{b_2(c_6 + c_7)} - F_2.$$

Nu geldt dus ook: $\beta < 4 \frac{b_1(c_3 + c_7)}{b_2(c_6 + c_7)} - 4F_2$. Deze voorwaarde wordt nu gebruikt om het bewijs rond te krijgen.

Range 1 bij CO en range 2B bij COI:

Bewijs verloopt identiek als bij range 1 CO en range 2A COI.

Range 1 bij CO en range 3A bij COI:

In range 3A COI geldt: $F_1 > F_2$. Hieruit volgt: $\frac{(c_3 + c_7)b_1}{(c_6 + c_7)b_2} < 1$.

Verder volgt uit de voorwaarden van range 3A COI: $\beta + F_1 > 1$.

Uit de voorwaarden van range 1 CO volgt:

$$\beta < \frac{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2}{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2} = \frac{(c_3 + c_7)b_1}{(c_6 + c_7)b_2} - F_1 \Rightarrow \beta + F_1 < \frac{(c_3 + c_7)b_1}{(c_6 + c_7)b_2} < 1$$

Hieruit valt nu af te leiden dat deze combinatie van ranges niet mogelijk is. Een kostenanalyse is dan ook niet nodig.

1) Volgt uit het feit dat bij range 3A COI geldt: $F_1 > F_2$.

Range 1 bij CO en range 3C bij COI:

In range 3C COI geldt: $F_1 < F_2$. Hieruit volgt: $\frac{(c_6 + c_7)b_2}{(c_3 + c_7)b_1} < 1$.

Verder volgt uit de voorwaarden van range 3C COI: $\beta + F_2 > 1$.

Uit de voorwaarden van range 1 CO volgt:

$$\beta < \frac{b_2 \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2}{b_1 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2} = \frac{(c_6 + c_7)b_2}{(c_3 + c_7)b_1} - F_2 \Rightarrow \beta + F_2 < \frac{(c_6 + c_7)b_2}{(c_3 + c_7)b_1} < 1$$

Hieruit valt nu af te leiden dat deze combinatie van ranges niet mogelijk is. Een kostenanalyse is dan ook niet nodig.

1) Volgt uit het feit dat bij range 3C COI geldt: $F_1 < F_2$.

Range 1 bij CO en range 4A bij COI:

Aangezien range 4A COI de opvolger is van range 3A COI geldt nu:

Een van de voorwaarden bij range 1 CO is: $\beta + F_1 < 1$.

Een van de voorwaarden bij range 3A COI (en dus ook bij range 4A COI) is:

$\beta + F_1 > 1$.

Hieruit volgt dat deze combinatie van ranges niet mogelijk is en dus ook niet op kosten gecontroleerd hoeft te worden.

Range 1 bij CO en range 4B bij COI:

Aangezien range 4B COI de opvolger is van range 3C COI geldt nu:

Een van de voorwaarden bij range 1 CO is: $\beta + F_2 < 1$.

Een van de voorwaarden bij range 3C COI (en dus ook bij range 4B COI) is:

$$\beta + F_2 > 1.$$

Hieruit volgt dat deze combinatie van ranges niet mogelijk is en dus ook niet op kosten gecontroleerd hoeft te worden.

Range 1 bij CO en range 5 bij COI:

Aangezien range 5 COI de opvolger is van de ranges 4A COI en 4B COI volgt nu meteen dat de combinatie van range 1 CO en range 5 COI niet mogelijk is.

Range 2A bij CO en range 1 bij COI:³⁹

$$T_{CO} = c_3b_1 + c_6\beta b_2 >^1 = c_3\beta b_1 + c_6\beta b_2 = T_{COI}$$

1) Bij range 1 COI geldt dat c_7 gelijk is aan nul.

Range 2A bij CO en range 2A bij COI:

$$T_{CO} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)\beta b_2 - \frac{c_7^2 b_1}{2(c_6 + c_7)} >^1 (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)\beta b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)} >$$

$$(c_3 + c_7)\beta b_1 + (c_6 + c_7)\beta b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)} = (c_3 + c_7)b_1(F_1 + \beta) + (c_6 + c_7)\beta b_2 -$$

$$\frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7} = T_{COI}$$

1) Volgt uit $F_1 > F_2$.

Range 2A bij CO en range 2B bij COI:

$$T_{CO} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)\beta b_2 - \frac{c_7^2 b_1}{2(c_6 + c_7)} > (c_3 + c_7)\beta b_1 + (c_6 + c_7)\beta b_2 - \frac{c_7^2 b_1}{2(c_6 + c_7)} =$$

$$(c_3 + c_7)b_1\beta + (c_6 + c_7)b_2(F_2 + \beta) - \frac{c_7^2 b_1}{c_6 + c_7} = T_{COI}$$

Range 2A bij CO en range 3A bij COI:

Uit de voorwaarden van range 2A CO volgt:

$$\beta < 1 - \frac{c_7^2 b_1}{2b_2(c_6 + c_7)^2} \Rightarrow \beta < 1 - \frac{c_7^2 b_1}{8b_2(c_6 + c_7)^2} \Rightarrow (1 - \beta) > \frac{c_7^2 b_1}{8b_2(c_6 + c_7)^2}.$$

$$T_{CO} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)\beta b_2 - \frac{c_7^2 b_1}{2(c_6 + c_7)} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)\beta b_2 -$$

³⁹ De kostenfunctie van het Commonality Model CO wordt hier anders weergegeven dan in paragraaf 2.2. Deze alternatieve notatie wordt enkel in deze appendix gebruikt omdat het de berekeningen vereenvoudigt.

$$c_7 \sqrt{\frac{2c_7^2 b_1^2 b_2}{8b_2(c_6 + c_7)^2}} > (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)\beta b_2 - c_7 \sqrt{2b_1 b_2(1 - \beta)} = T_{COI}$$

Range 2A bij CO en range 3C bij COI:

Een van de voorwaarden bij range 2A CO is: $\beta + F_2 < 1$.

Een van de voorwaarden bij range 3C COI is: $\beta + F_2 > 1$.

Hieruit volgt dat deze combinatie van ranges niet mogelijk is en dus ook niet op kosten gecontroleerd hoeft te worden.

Range 2A bij CO en range 4A bij COI:

Een van de voorwaarden bij range 2A CO is: $\beta + F_2 < 1$.

Een van de voorwaarden bij range 4A COI is: $\beta + F_2 > 1$.

Hieruit volgt dat deze combinatie van ranges niet mogelijk is en dus ook niet op kosten gecontroleerd hoeft te worden.

Range 2A bij CO en range 4B bij COI:

Aangezien range 4B COI de opvolger is van range 3C COI geldt nu:

Een van de voorwaarden bij range 2A CO is: $\beta + F_2 < 1$.

Een van de voorwaarden bij range 3C COI (en dus ook bij range 4B COI) is:

$\beta + F_2 > 1$.

Hieruit volgt dat deze combinatie van ranges niet mogelijk is en dus ook niet op kosten gecontroleerd hoeft te worden.

Range 2A bij CO en range 5 bij COI:

Aangezien range 5 COI de opvolger is van de ranges 4A COI en 4B COI volgt nu meteen dat de combinatie van range 2A CO en range 5 COI niet mogelijk is.

Range 2B bij CO en range 1 bij COI:

$T_{CO} = c_3\beta b_1 + c_6b_2 >^1 c_3\beta b_1 + c_6\beta b_2 = T_{COI}$

1) Bij range 1 COI geldt dat c_7 gelijk is aan nul.

Range 2B bij CO en range 2A bij COI:

$$T_{CO} = (c_3 + c_7)\beta b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)} > (c_3 + c_7)\beta b_1 + (c_6 + c_7)\beta b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)} =$$

$$(c_3 + c_7)b_1(F_1 + \beta) + (c_6 + c_7)\beta b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7} = T_{COI}$$

Range 2B bij CO en range 2B bij COI:

$$T_{CO} = (c_3 + c_7)\beta b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)} >^1 (c_3 + c_7)\beta b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - \frac{c_7^2 b_1}{2(c_6 + c_7)} >$$

$$(c_3 + c_7)\beta b_1 + (c_6 + c_7)\beta b_2 - \frac{c_7^2 b_1}{2(c_6 + c_7)} = (c_3 + c_7)\beta b_1 + (c_6 + c_7)b_2(F_2 + \beta) -$$

$$\frac{c_7^2 b_1}{c_6 + c_7} = T_{COI}$$

1) Volgt uit $F_1 < F_2$.

Range 2B bij CO en range 3A bij COI:

Een van de voorwaarden bij range 2B CO is: $\beta + F_1 < 1$.

Een van de voorwaarden bij range 3A COI is: $\beta + F_1 > 1$.

Hieruit volgt dat deze combinatie van ranges niet mogelijk is en dus ook niet op kosten gecontroleerd hoeft te worden.

Range 2B bij CO en range 3C bij COI:

Uit de voorwaarden van range 2B CO volgt:

$$\beta < 1 - \frac{c_7^2 b_2}{2b_1(c_3 + c_7)^2} \Rightarrow \beta < 1 - \frac{c_7^2 b_2}{8b_1(c_3 + c_7)^2} \Rightarrow (1 - \beta) > \frac{c_7^2 b_2}{8b_1(c_3 + c_7)^2}.$$

$$T_{CO} = (c_3 + c_7)\beta b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)} = (c_3 + c_7)\beta b_1 + (c_6 + c_7)b_2 -$$

$$c_7 \sqrt{\frac{2c_7^2 b_1 b_2^2}{8b_1(c_3 + c_7)^2}} > (c_3 + c_7)\beta b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7 \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta)} = T_{COI}$$

Range 2B bij CO en range 4A bij COI:

Aangezien range 4A COI de opvolger is van range 3A COI geldt nu:

Een van de voorwaarden bij range 2B CO is: $\beta + F_1 < 1$.

Een van de voorwaarden bij range 3A COI (en dus ook bij range 4A COI) is:

$\beta + F_1 > 1$.

Hieruit volgt dat deze combinatie van ranges niet mogelijk is en dus ook niet op kosten gecontroleerd hoeft te worden.

Range 2B bij CO en range 4B bij COI:

Een van de voorwaarden bij range 2B CO is: $\beta + F_1 < 1$.

Een van de voorwaarden bij range 4B COI is: $\beta + F_1 > 1$.

Hieruit volgt dat deze combinatie van ranges niet mogelijk is en dus ook niet op kosten gecontroleerd hoeft te worden.

Range 2B bij CO en range 5 bij COI:

Aangezien range 5 COI de opvolger is van de ranges 4A COI en 4B COI volgt nu meteen dat de combinatie van range 2B CO en range 5 COI niet mogelijk is.

Range 3 bij CO en range 1 bij COI:

$$T_{CO} = c_3 b_1 + c_6 b_2 >^1 = c_3 \beta b_1 + c_6 \beta b_2 = T_{COI}$$

1) Bij range 1 COI geldt dat c_7 gelijk is aan nul.

Range 3 bij CO en range 2A bij COI:

$$T_{CO} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7 \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta)} > (c_3 + c_7)b_1(F_1 + \beta) + \beta b_2 -$$

$$c_7 \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta)} >^1 (c_3 + c_7)b_1(F_1 + \beta) + \beta b_2 - \frac{c_7^2 b_1}{c_6 + c_7} = T_{COI}$$

1) Volgt uit de voorwaarden voor β van range 3 CO.

Range 3 bij CO en range 2B bij COI:

Bewijs verloopt identiek als bij range 3 CO en range 2A COI.

Range 3 bij CO en range 3A bij COI:

$$T_{CO} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7\sqrt{2b_1b_2(1-\beta)} > (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)\beta b_2 - c_7\sqrt{2b_1b_2(1-\beta)} = T_{COI}$$

Range 3 bij CO en range 3C bij COI:

Bewijs verloopt identiek als bij range 3 CO en range 3A COI.

Range 3 bij CO en range 4A bij COI:

$$T_{CO} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7\sqrt{2b_1b_2(1-\beta)} > (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - \frac{c_7^2b_1}{c_6 + c_7} >^2$$

$$(c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2(F_2 + 2\beta - 1) - \frac{c_7^2b_1}{c_6 + c_7} = T_{COI}$$

- 1) Volgt uit de voorwaarden voor β van range 3 CO.
- 2) Volgt uit $S_6 < b_2$.

Range 3 bij CO en range 4B bij COI:

Bewijs verloopt identiek als bij range 3 CO en range 4A COI.

Range 3 bij CO en range 5 bij COI:

$$T_{CO} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7\sqrt{2b_1b_2(1-\beta)} > (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7\sqrt{2b_1b_2(2-2\beta)} = T_{COI}$$

Eigenschap 6.1.3: De kosten van het Commonality Model COI (T_{COI}) zijn lager dan die van het Basis Model BOI (T_{BOI}) als:

$$c_3 + c_7 > \max\left(\frac{c_7^2}{c_7 - c_5}, \frac{c_7^2b_2}{b_1(c_7 - c_4)}\right) \text{ en } c_6 + c_7 > \max\left(\frac{c_7^2}{c_7 - c_4}, \frac{c_7^2b_1}{b_2(c_7 - c_5)}\right) \text{ en } c_7 > 0$$

Range 1 bij BOI en range 1 bij COI:

Bij deze rangecombinatie geldt dat c_7 gelijk is aan 0. Deze waarde van c_7 wordt bij eigenschap 6.1.3. echter uitgesloten.

Range 1 bij BOI en range 2A bij COI:

Uit eigenschap 5.2.1 volgt:

$$\beta_1 + \beta_2 > 0.5 \Leftrightarrow (\beta_1 + \beta_2) \frac{c_7^2b_2}{c_3 + c_7} > \frac{c_7^2b_2}{2(c_3 + c_7)}.$$

Op basis van de voorwaarden van eigenschap 6.1.3. geldt nu:

$$\frac{c_7^2b_2}{2(c_3 + c_7)} < (\beta_1 + \beta_2) \frac{c_7^2b_2}{c_3 + c_7} < \beta_1b_1(c_7 - c_4) + \beta_2b_2(c_7 - c_5)$$

Hieruit volgt nu automatisch:

$$T_{COI} = (c_3 + c_7)\beta_1b_1 + (c_6 + c_7)\beta_2b_2 - \frac{c_7^2b_2}{2(c_3 + c_7)} > (c_3 + c_4)\beta_1b_1 + (c_5 + c_6)\beta_2b_2 = T_{BOI}$$

Range 1 bij BOI en range 2B bij COI:

Bewijs verloopt identiek als bij range 1 BOI en range 2B COI.

Range 1 bij BOI en range 3A bij COI:

$$T_{COI} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)\beta_2 b_2 - c_7 \sqrt{2b_1 b_2 (1 - \beta_1)} >^1 (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)\beta_2 b_2 -$$

$$c_7 \sqrt{2b_1 b_2 F_1} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)\beta_2 b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7} >^2 (c_3 + c_4)b_1 + (c_6 + c_7)\beta_2 b_2 >$$

$$(c_3 + c_4)\beta_1 b_1 + (c_5 + c_6)\beta_2 b_2 = T_{BOI}$$

- 1) Volgt uit de voorwaarden van range 3A COI.
- 2) Volgt uit de voorwaarden van eigenschap 6.1.3.

Range 1 bij BOI en range 3C bij COI:

Bewijs verloopt identiek als bij range 1 BOI en range 3A COI.

Range 1 bij BOI en range 4A bij COI:

$$T_{COI} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2(F_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1) - \frac{c_7^2 b_1}{c_6 + c_7} > (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 \beta_2 -$$

$$\frac{c_7^2 b_1}{c_6 + c_7} >^1 (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 \beta_2 - (c_7 - c_4)b_1 = (c_3 + c_4)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 \beta_2 > (c_3 +$$

$$c_4)\beta_1 b_1 + (c_5 + c_6)\beta_2 b_2 = T_{BOI}$$

- 1) Volgt uit de voorwaarden van eigenschap 6.1.3.

Range 1 bij BOI en range 4B bij COI:

Bewijs verloopt identiek als bij range 1 BOI en range 4A COI.

Range 1 bij BOI en range 5 bij COI:

$$T_{COI} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - c_7 \sqrt{2b_1 b_2 (2 - \beta_1 - \beta_2)} >^1 (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 -$$

$$c_7 \sqrt{2b_1 b_2 F_1} = (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - \frac{c_7^2 b_2}{c_3 + c_7} >^2 (c_3 + c_7)b_1 + (c_6 + c_7)b_2 - (c_7 - c_5)b_2$$

$$= (c_3 + c_7)b_1 + (c_5 + c_6)b_2 = (c_3 + c_4)\beta_1 b_1 + (c_5 + c_6)\beta_2 b_2 = T_{BOI}$$

- 1) Volgt uit de voorwaarden van range 5 COI.
- 2) Volgt uit de voorwaarden van eigenschap 6.1.3.

Bibliotheek K. U. Brabant



17 000 01486571 2