

3.1 Kwadratische functies[1]

Voorbeeld 1:

$$y = x^2 - 6$$

Invullen van $x = 2$ geeft $y = 2^2 - 6 = -2$

In dit voorbeeld is:

- 2 het **origineel**;
- -2 het **beeld** (of de **functiewaarde**)
- $y = x^2 - 6$ de **formule**.

Een **functie** voegt aan elk origineel het bijbehorende beeld toe.

Als we de functie uit het voorbeeld als naam de letter f geven kan deze ook genoteerd worden als: $f(x) = 3x + 6$

Invullen van 2 geeft als uitkomst -2: $f(2) = -2$

3.1 Kwadratische functies[1]

Voorbeeld 2:

$f(x) = x^2 - 3x + 6$. Bereken $f(-3)$

$$y = x^2 - 3x + 6$$

Invullen van $x = -3$ geeft

$$y = (-3)^2 - 3 \cdot -3 + 6$$

$$y = 9 + 9 + 6$$

$$y = 24$$

Voorbeeld 3:

Onderzoek of het punt $A(3, 7)$ op de grafiek van f ligt.

Invullen van $(3, 7)$ in de formule van f geeft:

$$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 6 = 9 - 9 + 6 = 6 \neq 7$$

Het punt $A(3, 7)$ ligt niet op de grafiek van f .

3.1 Kwadratische functies[2]

De algemene vorm van een kwadratische functie f heeft de vorm:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ met } a \neq 0$$

Als a een positief getal is, krijg je een **dalparabool**.

Als a een negatief getal is, krijg je een **bergparabool**.

3.1 Kwadratische formules [2]

Voorbeeld:

Teken de grafiek van de kwadratische functie $y = 0.5x^2$

Stap 1:

Maak een tabel en reken daarin een aantal waarden van deze functie uit.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Let op:

- In deze tabel staat op de bovenste rij steeds het getal dat je in de formule invult (de x);
- In deze tabel staat op de onderste rij steeds het getal dat je er uit de formule komt (de y);
- Bij deze kwadratische functie is $a > 0$. De grafiek is nu een dalparabool;
- Als je het punt (1; 0,5) berekend hebt, weet je wat de top is (0,0) en kun je met behulp van symmetrie de y-waarden bij $x = 2$ en 3 vinden;
- Gebruik bij ingewikkelde kwadratische functies je rekenmachine.

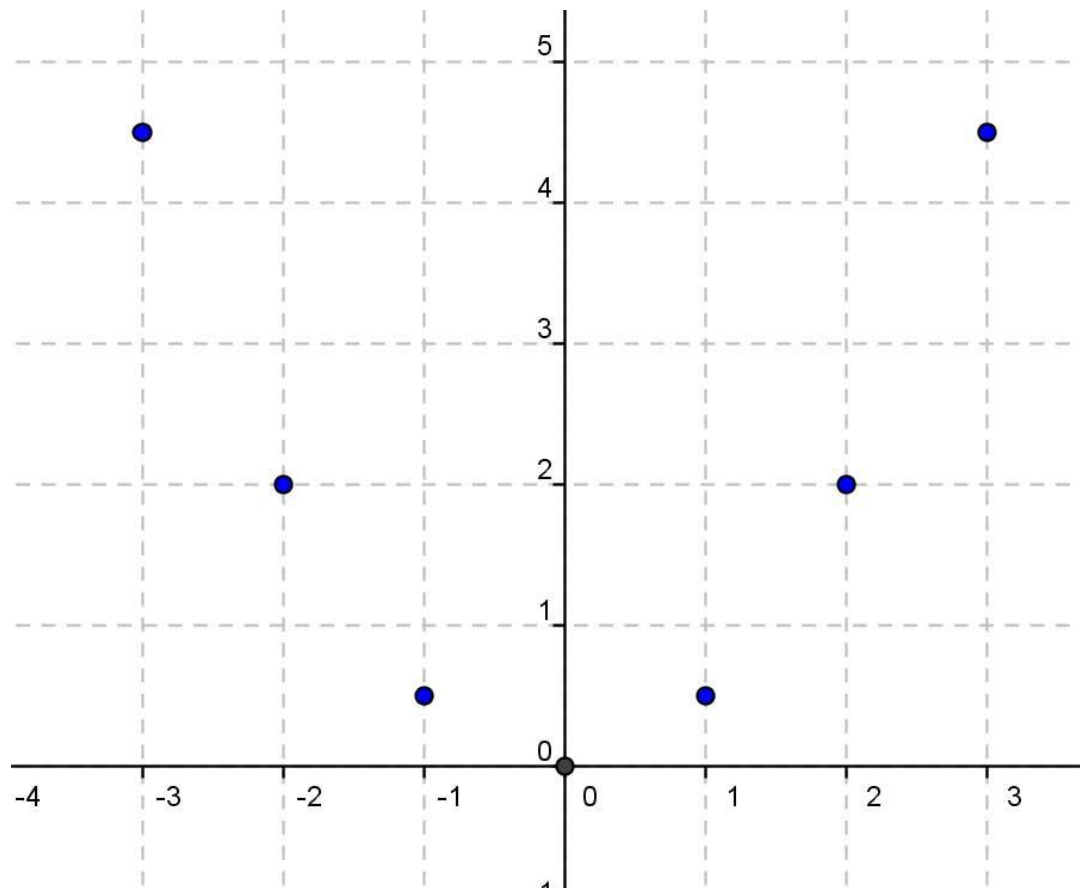
3.1 Kwadratische formules [2]

Voorbeeld:

Teken de grafiek van de kwadratische functie $y = 0.5x^2$

Stap 2:

Zet de punten uit de tabel in een grafiek.



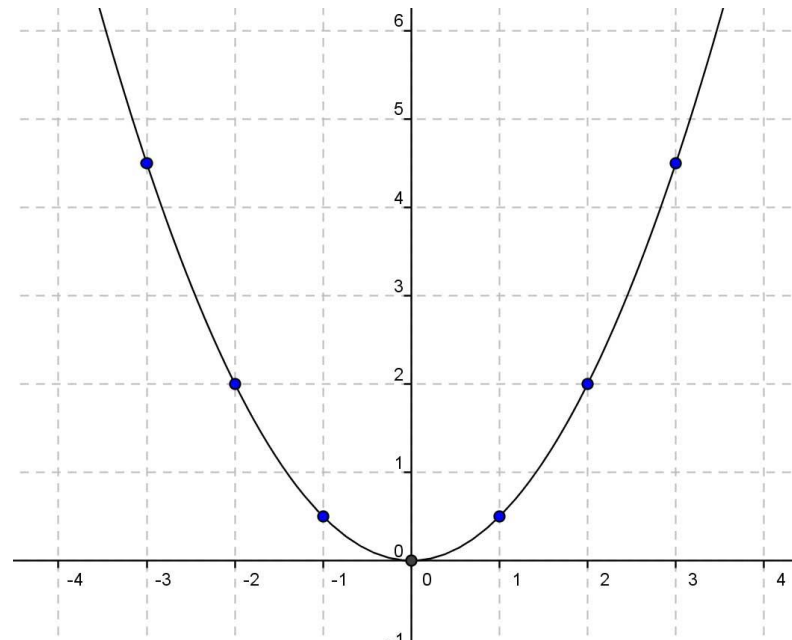
3.1 Kwadratische formules [2]

Voorbeeld:

Teken de grafiek van de kwadratische functie $y = 0.5x^2$

Stap 3:

Teken door de punten een vloeiende kromme.



3.1 Kwadratische formules [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 - 4x + 5$

Bereken de coördinaten van de top.

Stap 1:

Noteer de waarden voor a, b en c.

$$a = -1, b = -4 \text{ en } c = 5$$

Stap 2:

$a < 0$, de grafiek van de functie is een bergparabool. De top is een maximum.

Stap 3:

Bereken de x-coördinaat van de top met de formule: $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot -1} = -\frac{-4}{-2} = -2$$

3.1 Kwadratische formules [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 - 4x + 5$

Bereken de coördinaten van de top.

Stap 4:

Bereken de y-coördinaat van de top.

$$y_{\text{top}} = -x^2 - 4x + 5 \quad x_{\text{top}} = -2 \text{ invullen}$$

$$y_{\text{top}} = -(-2)^2 - 4 \cdot -2 + 5$$

$$y_{\text{top}} = -4 + 8 + 5$$

$$y_{\text{top}} = 9$$

Stap 5:

De coördinaten van de top (een maximum) zijn gelijk aan $(-2, 9)$

3.2 Kwadratische vergelijkingen [1]

Herhaling:

Manieren om te ontbinden in factoren:

- 1) Haal de gemeenschappelijke factor buiten haakjes;
- 2) De product-som-methode;
- 3) Het verschil van twee kwadraten: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Of gebruik een combinatie van deze manieren:

Voorbeeld 1:

Ontbind $x^3 + 2x^2 - 8x$ in factoren

$$x^3 + 2x^2 - 8x =$$

$$x(x^2 + 2x - 8) =$$

$$x(x - 2)(x + 4)$$

Tabel van -8		
Product van -8		Som
-1	8	7
1	-8	-7
-2	4	2
2	-4	-2

3.2 Kwadratische vergelijkingen [1]

Er geldt:

Als het product van twee factoren nul is, dan is de ene factor nul of de andere factor is nul.

$$A \cdot B = 0 \text{ geeft } A = 0 \vee B = 0$$

Voorbeeld 2:

$$\text{Los op: } (x - 5)(2x + 5) = 0$$

$$(x - 5)(2x + 5) = 0$$

$$x - 5 = 0 \vee 2x + 5 = 0$$

$$x = 5 \quad \vee \quad 2x = -5$$

$$x = 5 \quad \vee \quad x = -2\frac{1}{2}$$

$$[A \cdot B = 0 \text{ geeft } A = 0 \vee B = 0]$$

3.2 Kwadratische vergelijkingen [1]

Let op:

Als je een vergelijking op gaat lossen, moet je er voor zorgen dat de rechterkant van de vergelijking gelijk aan nul is.

Voorbeeld 3:

Los op: $(x - 3)(x + 4) = 8$

$$(x - 3)(x + 4) = 8$$

$$x^2 + 4x - 3x - 12 = 8$$

$$x^2 + x - 12 = 8$$

$$\quad \quad \quad -8 \quad -8$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$(x - 4)(x + 5) = 0$$

$$x - 4 = 0 \vee x + 5 = 0$$

$$x = 4 \quad \vee \quad x = -5$$

[Haakjes wegwerken]

[Maak rechterkant gelijk aan 0]

[Product-som methode]

[$A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$]

3.2 Kwadratische vergelijkingen [2]

Let op:

Als je een vergelijking op gaat lossen, vermenigvuldig (of deel) dan de linker – en rechterkant met een getal, zodat je een “mooie” vergelijking krijgt om op te lossen.

Voorbeeld 1:

Los op: $\frac{1}{7}x^2 + \frac{9}{7}x + 2 = 0$

$$\frac{1}{7}x^2 + \frac{9}{7}x + 2 = 0$$

$$x^2 + 9x + 14 = 0$$

$$(x + 2)(x + 7) = 0$$

$$x + 2 = 0 \vee x + 7 = 0$$

$$x = -2 \quad \vee \quad x = -7$$

Tabel van 14		
Product van 14		Som
1	14	15
-1	-14	-15
2	7	9
-2	-7	-9

3.2 Kwadratische vergelijkingen [2]

Let op:

Als je een vergelijking op gaat lossen, vermenigvuldig (of deel) dan de linker – en rechterkant met een getal, zodat je een “mooie” vergelijking krijgt om op te lossen.

Voorbeeld 2:

$$\text{Los op: } \frac{1}{7}x^2 + \frac{9}{7}x + 2 = 0$$

$$\frac{1}{7}x^2 + \frac{9}{7}x + 2 = 0$$

$$x^2 + 9x + 14 = 0$$

$$(x + 2)(x + 7) = 0$$

$$x + 2 = 0 \vee x + 7 = 0$$

$$x = -2 \quad \vee \quad x = -7$$

3.2 Kwadratische vergelijkingen [2]

Let op:

Je mag pas gaan ontbinden in factoren als aan de rechterkant van het = teken het getal 0 staat. Staan er haakjes aan de linkerkant en is het rechterdeel van de vergelijking geen nul, werk deze haakjes dan eerst weg.

Voorbeeld 2:

$$\text{Los op: } (2x - 1)^2 = 12x - 11$$

$$(2x - 1)^2 = 12x - 11$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 12x - 11$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x - 1 = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 3$$

3.3 Snijpunten van grafieken [1]

Voorbeeld :

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 5x - 24$.

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as en de y -as..

Bij het snijpunt met de x -as is de y -coördinaat 0. De x -coördinaat volgt uit $f(x) = 0$

$$f(x) = 0$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0$$

$$x - 3 = 0 \vee x + 8 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -8$$

De snijpunten met de x -as zijn $(-8, 0)$ en $(3, 0)$

3.3 Snijpunten van grafieken [1]

Voorbeeld :

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 5x - 24$.

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as en de y -as..

Bij het snijpunt met de y -as is de x -coördinaat 0. De y -coördinaat volgt uit $f(0)$

$$f(0) = 0^2 + 5 \cdot 0 - 24 = -24$$

De snijpunten met de y -as zijn $(0, -24)$.

3.3 Snijpunten van grafieken [2]

Voorbeeld :

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + 14x + 37$ en $g(x) = x - 5$

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de beide grafieken.

Stap 1:

Stel de twee functies aan elkaar gelijk en los de ontstane vergelijking op.

$$x^2 + 14x + 37 = x - 5$$

$$x^2 + 13x + 42 = 0$$

$$(x + 7)(x + 6) = 0$$

$$x + 7 = 0 \vee x + 6 = 0$$

$$x = -7 \vee x = -6$$

3.3 Snijpunten van grafieken [2]

Voorbeeld :

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + 14x + 37$ en $g(x) = x - 5$

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de beide grafieken.

Stap 2:

Vul de gevonden x-coördinaten in één van de twee functies in om de bijbehorende y-coördinaten te vinden.

$$g(-6) = -6 - 5 = -11$$

Dit geeft het snijpunt $(-6, -11)$

$$g(-7) = -7 - 5 = -12$$

Dit geeft het snijpunt $(-7, -12)$

3.4 De *abc*-formule [1]

Kwadratische vergelijkingen die niet opgelost kunnen worden door ze in factoren te ontbinden, kunnen opgelost worden met de *abc*-formule:

Voorbeeld :

Los op $2x^2 - 5x - 3 = 0$ [Bereken de nulpunten van deze functie met de x-as]

Stap 1:

Schrijf de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$.

De rechterkant van de vergelijking moet gelijk zijn aan 0.

Stap 2:

$a = 2$, $b = -5$ en $c = -3$.

Stap 3:

Bereken $D = b^2 - 4ac$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3$

$D = 25 + 24$

$D = 49$

3.4 De *abc*-formule [1]

Kwadratische vergelijkingen die niet opgelost kunnen worden door ze in factoren te ontbinden, kunnen opgelost worden met de *abc*-formule:

Voorbeeld :

Los op $2x^2 - 5x - 3 = 0$ [Bereken de nulpunten van deze functie met de *x*-as]

Stap 4:

De oplossingen zijn: $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

$$x = \frac{- -5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} \vee x = \frac{- -5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{5 - 7}{4} \vee x = \frac{5 + 7}{4}$$

$$x = -\frac{1}{2} \vee x = 3$$

3.4 De *abc*-formule [2]

Kwadratische vergelijkingen die niet opgelost kunnen worden door ze in factoren te ontbinden, kunnen opgelost worden met de *abc*-formule:

Voorbeeld :

Los exact op $x^2 = 4x - 1$

Stap 1:

Schrijf de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$. ($x^2 - 4x + 1$)

De rechterkant van de vergelijking moet gelijk zijn aan 0.

Stap 2:

$a = 1$, $b = -4$ en $c = 1$.

Stap 3:

Bereken $D = b^2 - 4ac$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$D = 16 - 4$$

$$D = 12$$

3.4 De *abc*-formule [2]

Kwadratische vergelijkingen die niet opgelost kunnen worden door ze in factoren te ontbinden, kunnen opgelost worden met de *abc*-formule:

Voorbeeld :

Los exact op $x^2 = 4x - 1$

Stap 4:

De oplossingen zijn: $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

$$x = \frac{- -4 - \sqrt{12}}{2 \cdot 1} \vee x = \frac{- -4 + \sqrt{12}}{2 \cdot 1}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} \vee x = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 2 - \sqrt{3} \vee x = 2 + \sqrt{3}$$

Als gevraagd wordt om de oplossing in twee decimalen te geven, reken je $\sqrt{12}$ met je rekenmachine uit.

3.4 De *abc*-formule [2]

Let op:

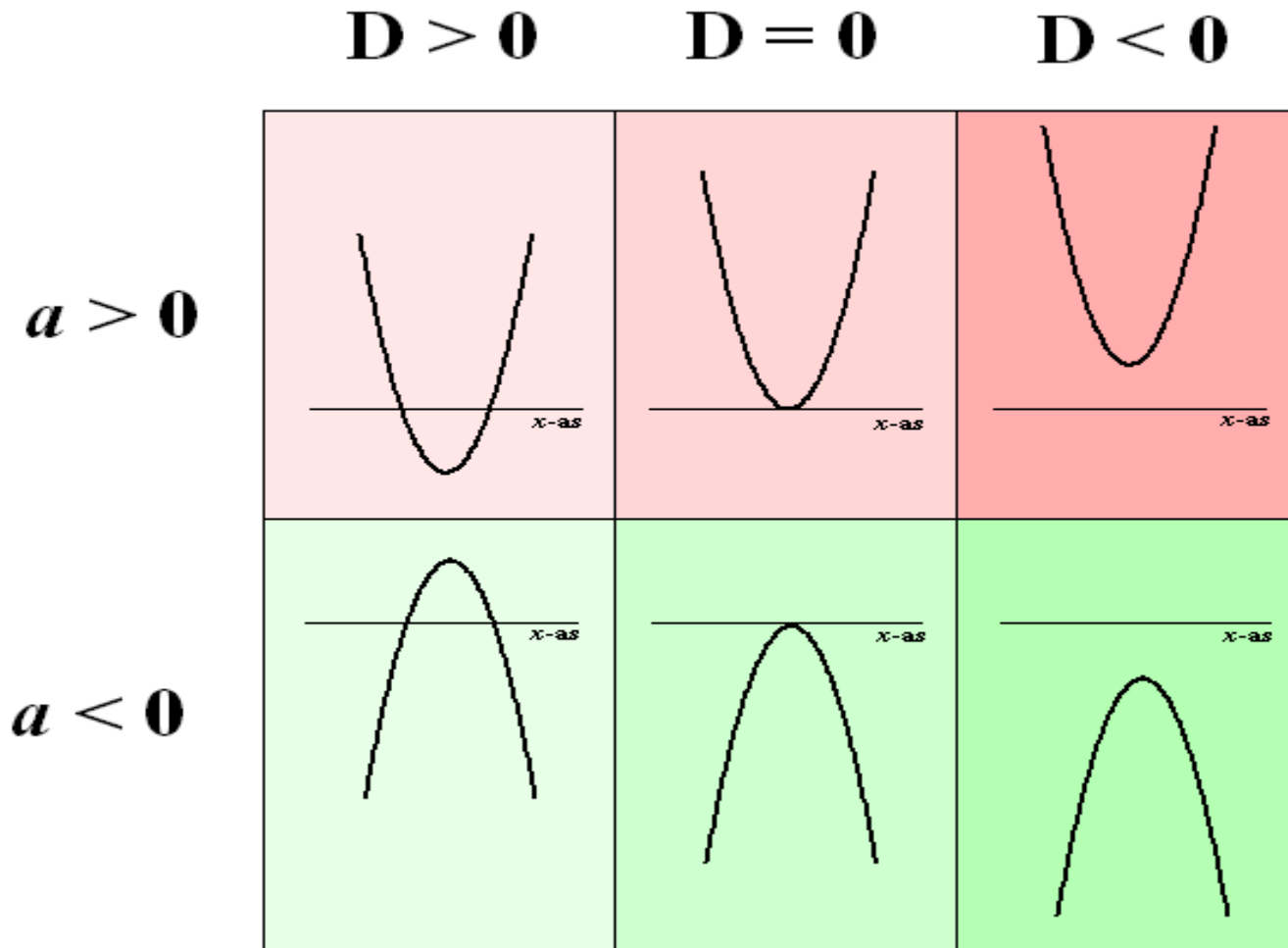
1. **Exact berekenen** betekent, dat je in het antwoord een breuk en/of wortel laat staan en dit niet afrondt;
2. **Oplossen in twee decimalen nauwkeurig** betekent, dat je je antwoord afrondt op twee decimalen nauwkeurig;
3. Bij de ABC-formule volgt uit de discriminant D het aantal oplossingen:
 $D < 0 \Rightarrow$ geen oplossingen;
 $D = 0 \Rightarrow$ één oplossing;
 $D > 0 \Rightarrow$ twee oplossingen.

Tot nu toe hadden alle opgaven een discriminant > 0 .

Bij een discriminant < 0 moet de wortel van een negatief getal genomen en zijn er geen oplossingen.

Bij een discriminant $= 0$ krijg je automatisch maar één oplossing.

3.4 De *abc*-formule [3]



3.4 De *abc*-formule [4]

Voorbeeld:

Gegeven is $y = 2x^2 - 6x + p$

Bereken exact voor welke p geen enkel punt van de grafiek van de parabool op de x -as ligt.

Stap 1:

$$2x^2 - 6x + p = 0$$

Stap 2:

$$a = 2 \quad b = -6 \quad c = p$$

$$a > 0 \Rightarrow \text{dalparabool}$$

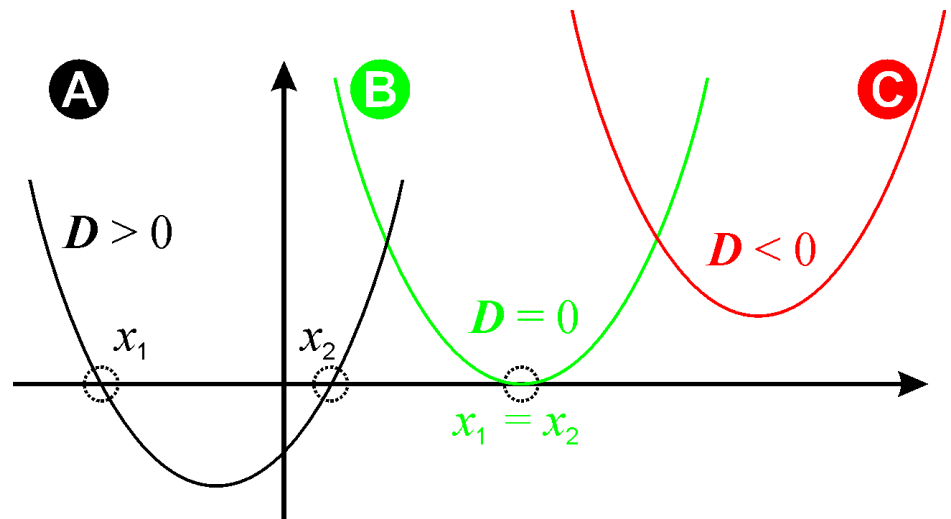
Stap 3:

Maak een situatieschets.

Er is sprake van situatie C:

Een dalparabool en waarbij geen enkel punt op de x -as ligt.

Hieruit volgt dat er geen snijpunten met de x -as zijn en geldt: $D < 0$.



3.4 De *abc*-formule [4]

Voorbeeld:

Gegeven is $y = 2x^2 - 6x + p$

Bereken exact voor welke p geen enkel punt van de grafiek van de parabool op de x -as ligt.

Stap 4:

$$D < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p < 0$$

$$36 - 8p < 0$$

$$-8p < -36$$

$$p > 4\frac{1}{2}$$

[Bij delen door een negatief getal
klapt het teken om!!!]

3.5 Verschillende oplossingsmethoden [1]

Er zijn vier soorten tweedegraadsvergelijkingen:

1. $ax^2 + bx = 0$ (Haal de x buiten de haakjes)

Voorbeeld 1:

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(x + 2) = 0$$

$$3x = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$x = 0 \vee x = -2$$

2. $ax^2 + c = 0$ (Herleid tot $x^2 = \text{getal}$)

Voorbeeld 2:

$$3x^2 - 6 = 0$$

$$3x^2 = 6$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

3.5 Verschillende oplossingsmethoden [1]

Er zijn vier soorten tweedegraadsvergelijkingen:

3. $ax^2 + bx + c = 0$ (Linkerlid ontbinden in factoren)

Voorbeeld 3:

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x + 1)(x - 7) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 7$$

4. $ax^2 + bx + c = 0$ (Linkerlid niet te ontbinden, dan ABC-formule)

Voorbeeld 4:

$$2x^2 - 5x - 7 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 81$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} \vee x = \frac{5 - \sqrt{81}}{2 \cdot 2}$$

$$x = 3\frac{1}{2} \vee x = -1$$