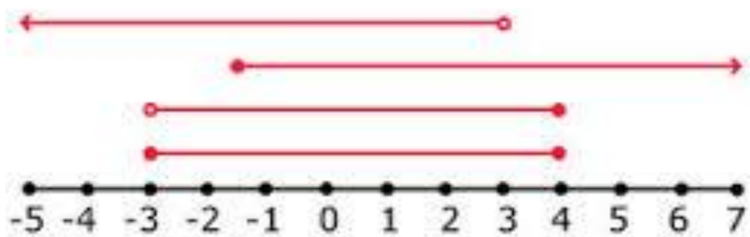
7.1 Ongelijkheden [1]



interval notatie	gewone notatie
$\langle \leftarrow ;3\rangle$	$x < 3$
$[-1,5;\rightarrow\rangle$	$x \geq -1,5$
$\langle -3;4]$	$-3 < x \leq 4$
$[-3;4]$	$-3 \leq x \leq 4$

In het plaatje hierboven zijn vier intervallen getekend.
Een open bolletje betekent dat dit getal niet bij het interval hoort.
Een gesloten bolletje betekent dat dit getal wel bij het interval hoort.

Bij het derde interval hoort -3 niet bij het interval maar 4 wel.

7.1 Ongelijkheden [2]

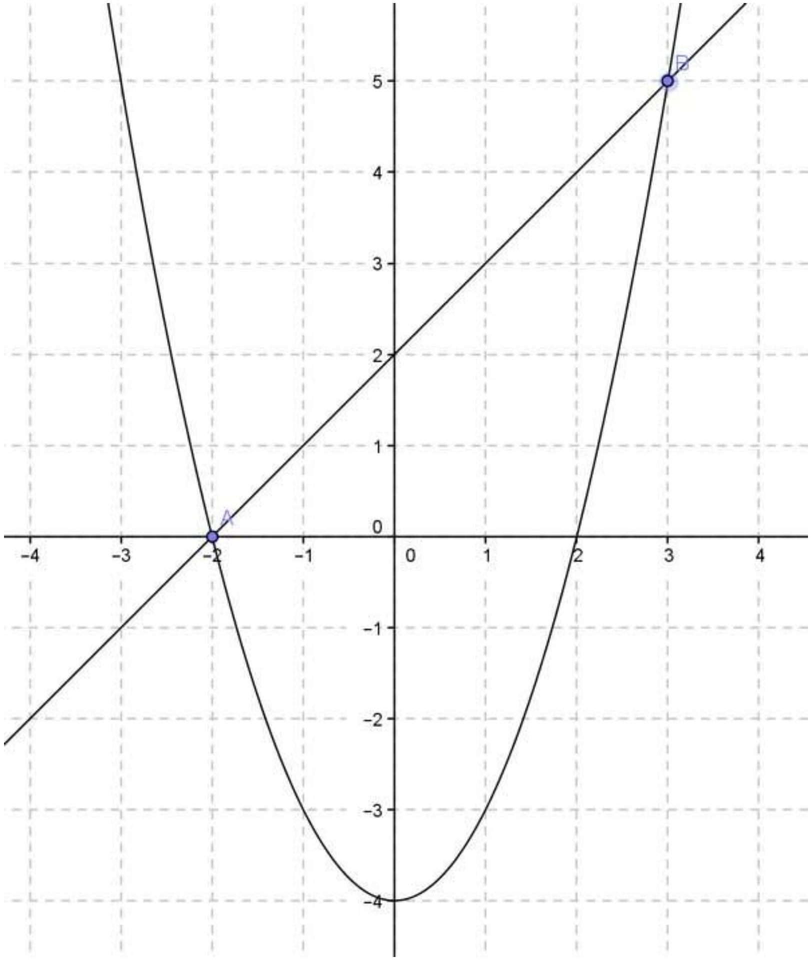
<u>Voorbeeld:</u>
Getekend zijn de grafieken van $f(x) = x^2 - 4$ en $g(x) = x + 2$. Los op $f(x) < g(x)$

<u>Stap 1:</u>
De grafieken snijden elkaar in de punten A(-2, 0) en B(3, 5).

<u>Stap 2:</u>
Teken een getallenlijn en geef aan waar de grafiek van f(x) onder die van g(x) ligt.

<u>Stap 3:</u>
Schrijf het antwoord op:

$f(x) < g(x)$ geeft $-2 < x < 3$.



7.2 Kwadratische ongelijkheden[1]

Er zijn vier manieren om een kwadratische vergelijking op te lossen:

1. **$ax^2 + c = 0$** (Herleid tot x^2 = getal)

<u>Voorbeeld 1:</u>

$3x^2 - 6 = 0$

$3x^2 = 6$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2} \lor x = -\sqrt{2}$

2. **$ax^2 + bx + c = 0$** (Linkerlid ontbinden in factoren)

<u>Voorbeeld 2:</u>

$x^2 - 6x - 7 = 0$

$(x + 1)(x - 7) = 0$

$x = -1 \lor x = 7$

7.2 Kwadratische ongelijkheden[1]

Er zijn vier soorten tweedegraadsvergelijkingen:

3. $ax^2 + bx + c = 0$ (Linkerlid niet te ontbinden, dan ABC-formule)

<u>Voorbeeld 3:</u>

$2x^2 - 5x - 7 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 81$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{81}}{2 \bullet 2} \vee x = \frac{5 - \sqrt{81}}{2 \bullet 2}$$

$$x = 3\frac{1}{2} \vee x = -1$$

7.2 Kwadratische ongelijkheden[1]

Er zijn vier soorten tweedegraadsvergelijkingen:

4. Kwadraatafsplitsen

Voorbeeld 4:

$x^2 + 10x - 13 = 0$

$(x + 5)^2 - 38 = 0$

$(x + 5)^2 = 38$

$x + 5 = \sqrt{38}$ of $x + 5 = -\sqrt{38}$

$x = -5 + \sqrt{38}$ of $x = -5 - \sqrt{38}$

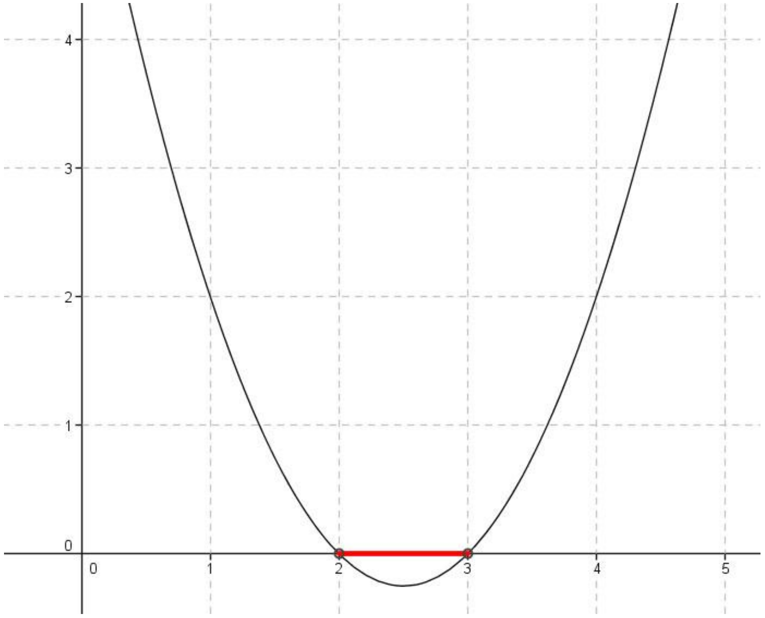
7.2 Kwadratische ongelijkheden[2]

Bij f(x) < 0 kijk je waar de grafiek van f onder de x-as ligt.

Bij de hier getekende grafiek is f(x) < 0 voor 2 < x < 3.

Bij f(x) > 0 kijk je waar de grafiek van f boven de x-as ligt.

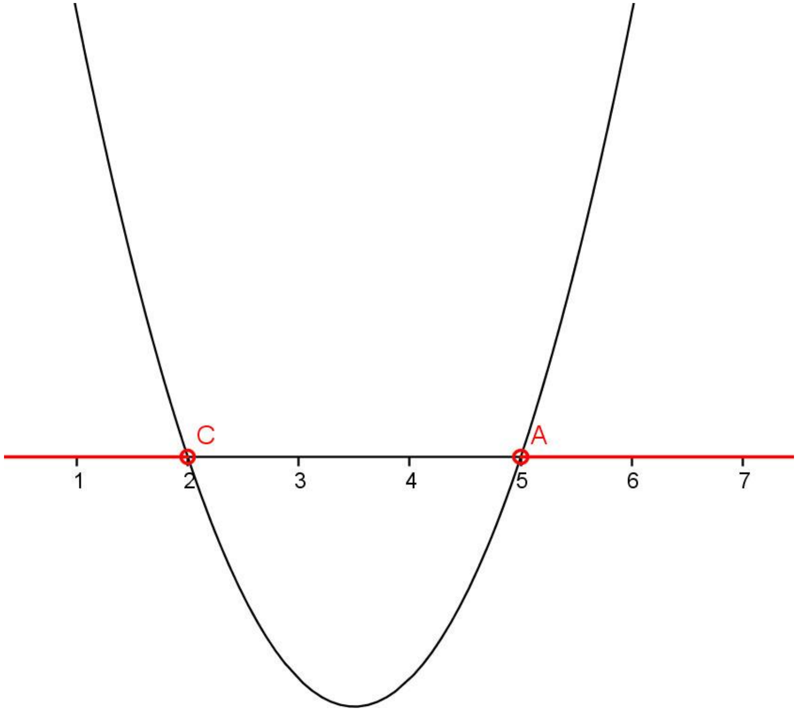
Bij de hier getekende grafiek is f(x) > 0 voor x < 2 of x >3.



7.2 Kwadratische ongelijkheden[3]

Voorbeeld 1:

Los op: $x^2 - 7x + 10 > 0$.



Stap 1:

Los de ongelijkheid $x^2 - 7x + 10 = 0$ op.

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x - 2)(x - 5) = 0$

$x - 2 = 0$ of $x - 5 = 0$

$x = 2$ of $x = 5$

Stap 2:

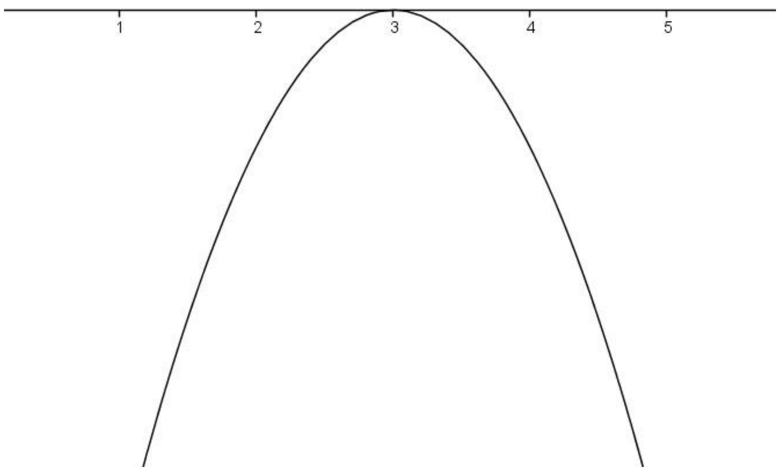
Teken een schets van de grafiek en geef aan wanneer deze groter dan 0 is.

Stap 3:

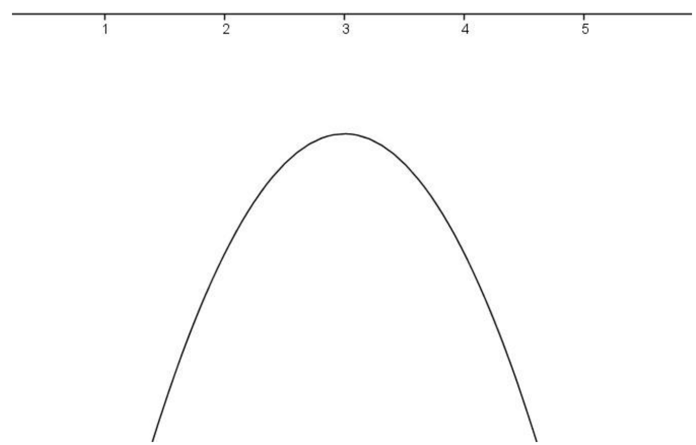
Geef het antwoord.

$x < 2$ of $x > 5$.

7.3 Bijzondere ongelijkheden [1]

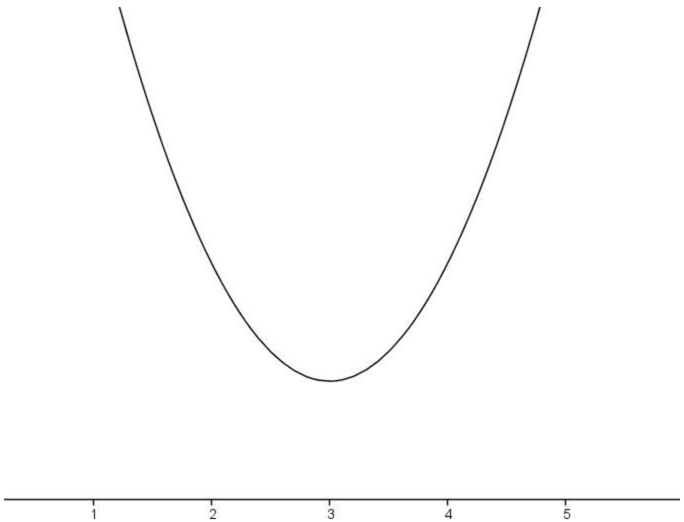


f(x) < 0 voor x ≠ 3;
f(x) > 0 voor geen enkele x.



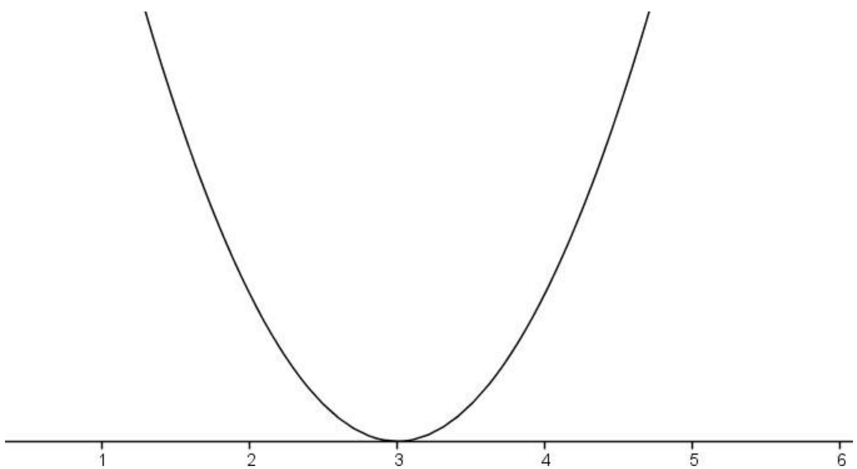
f(x) < 0 voor elke x;
f(x) > 0 voor geen enkele x.

7.3 Bijzondere ongelijkheden [1]



f(x) < 0 voor geen enkele x;
f(x) > 0 voor elke x.

f(x) < 0 voor geen enkele x;
f(x) > 0 voor x ≠ 3.

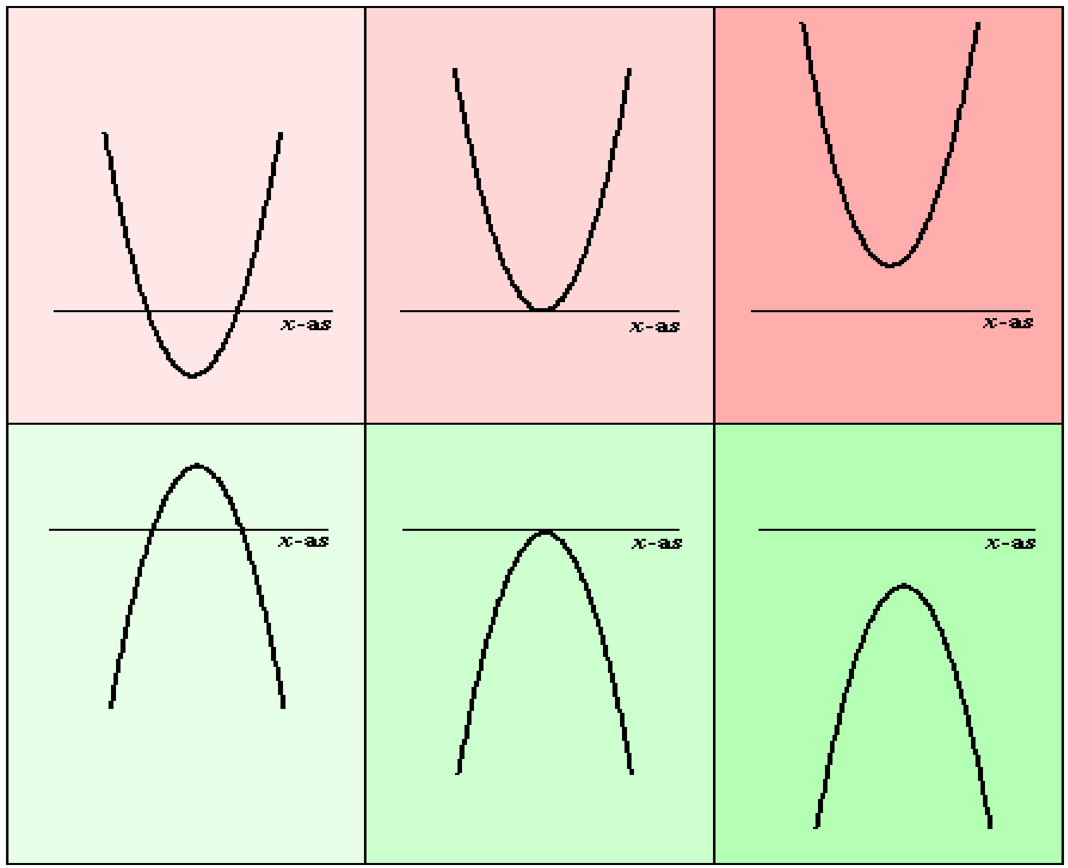


7.3 Bijzondere ongelijkheden [2]

$\mathbf{D > 0}$ $\mathbf{D = 0}$ $\mathbf{D < 0}$

$\boldsymbol{a > 0}$

$\boldsymbol{a < 0}$



$ax^2 + bx + c = 0$ 2 oplossingen 1 oplossing 0 oplossingen

7.3 Bijzondere ongelijkheden [2]

Los op: $x^2 - 5x > - 8$

Stap 1:
Schrijf de ongelijkheid in de vorm $f(x) > 0$.

$x^2 - 5x + 8 > 0$

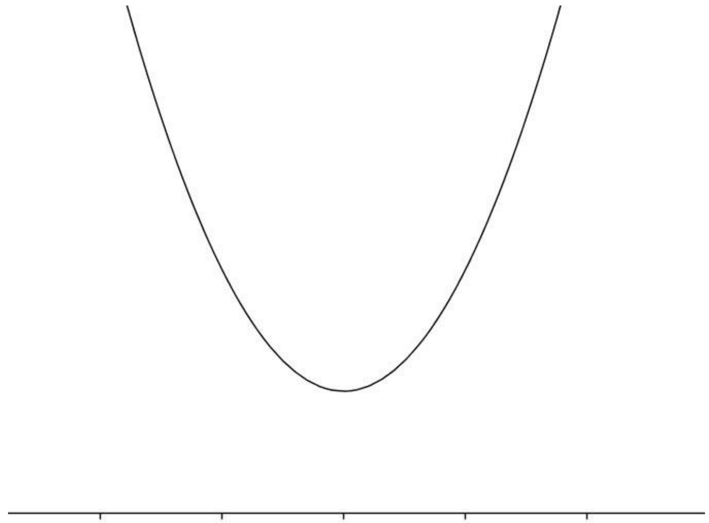
Stap 2:
Los de gelijkheid $f(x) = 0$ op.

$x^2 – 5x + 8 = 0$

$a = 1$, $b = -5$ en $c = 8$
$D = b^2 – 4ac = (-5)^2 – 4 \cdot 1 \cdot 8 = 25 – 32 = -7$

7.3 Bijzondere ongelijkheden [2]

Los op: $x^2 - 5x > -8$



Stap 3:
Maak een schets van de grafiek van f.

a >0 dus de grafiek van f is een dalparabool.
D $<$ 0 dus de grafiek van f snijdt de x-as niet.

Stap 4:
Geef de oplossing:

f(x) $>$ 0 voor elke x.

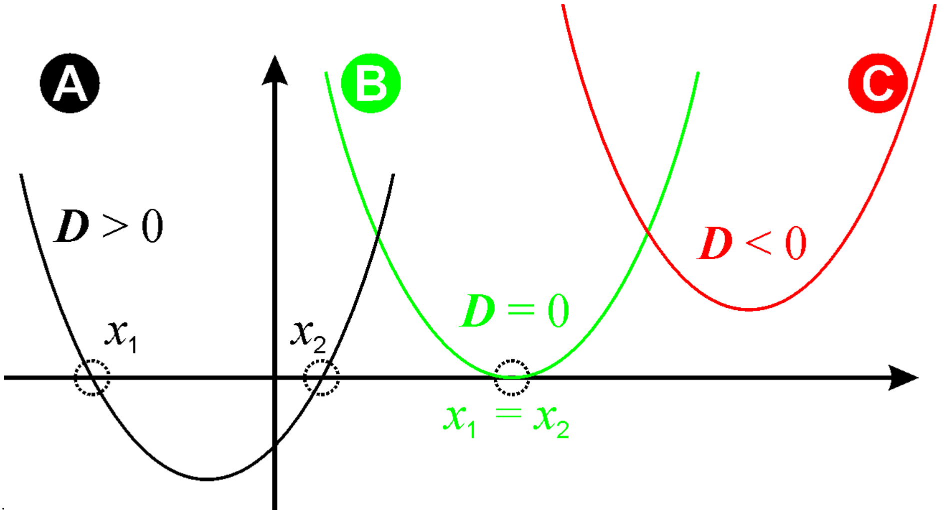
7.3 Bijzondere ongelijkheden [3]

Voorbeeld:
Gegeven is de vergelijking $2x^2 – 6x + p = 0$.
Bereken exact voor welke p deze vergelijking geen oplossingen heeft.

Stap 1:
$2x^2 – 6x + p = 0$

Stap 2:
a = 2   b = – 6   c = p
a > 0   => dalparabool

Stap 3:
Maak een situatieschets.
Er is sprake van situatie C:



Een dalparabaool en waarbij geen enkel punt op de x-as ligt.
Hieruit volgt dat er geen snijpunten met de x-as zijn en geldt: D < 0.

7.3 Bijzondere ongelijkheden [3]

<u>Voorbeeld:</u>

Gegeven is de vergelijking $2x^2 - 6x + p = 0$.

Bereken exact voor welke p deze vergelijking geen oplossingen heeft.

<u>Stap 4:</u>

$D < 0$

$b^2 - 4ac < 0$

$(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p < 0$

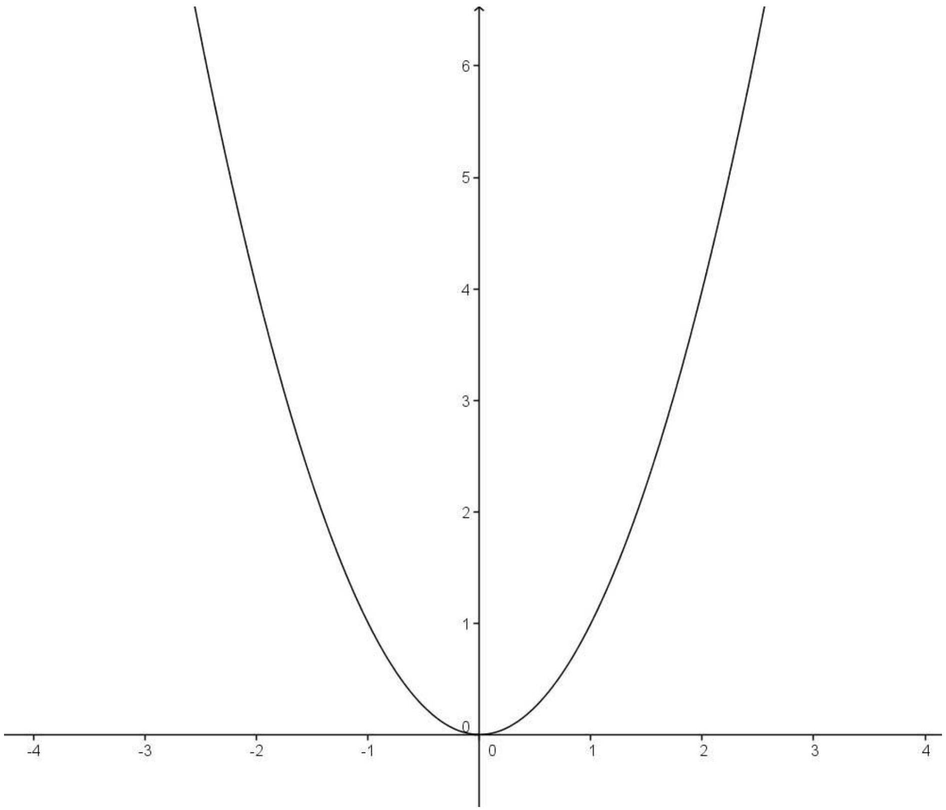
$36 - 8p < 0$

$-8p < -36$

$p > 4\frac{1}{2}$

[Bij delen door een negatief getal klapt het teken om!!!]

7.3 Bijzondere ongelijkheden [4]



- De functie $x^2 = p$ heeft twee oplossingen als $p > 0$;
- De functie $x^2 = p$ heeft één oplossing als $p = 0$;
- De functie $x^2 = p$ heeft geen oplossingen als $p < 0$;

7.3 Bijzondere ongelijkheden [4]

Voorbeeld 1:
Los op $x^2 > 9$.

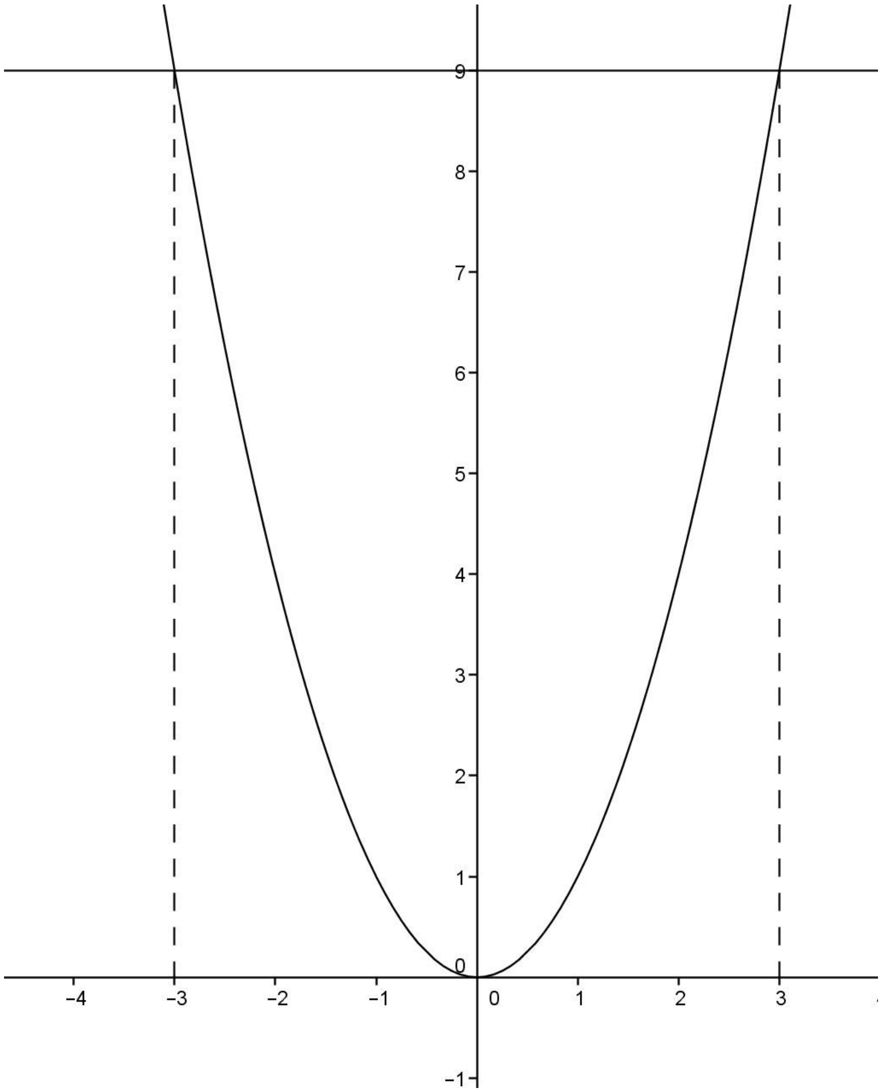
Uit de schets van $y = x^2$ volgt:

$x > \sqrt{9} = 3$ of
$x < -\sqrt{9} = -3$.

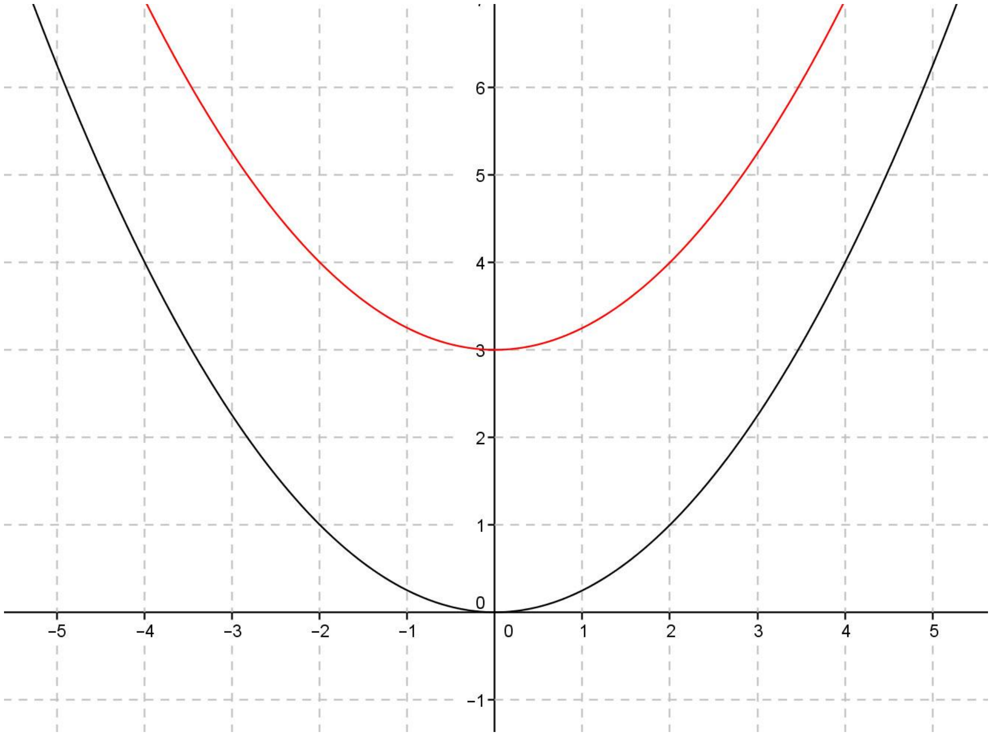
Voorbeeld 2:
Los op $x^2 < 9$.

Uit de schets van $y = x^2$ volgt:

$-3 < x < 3$.

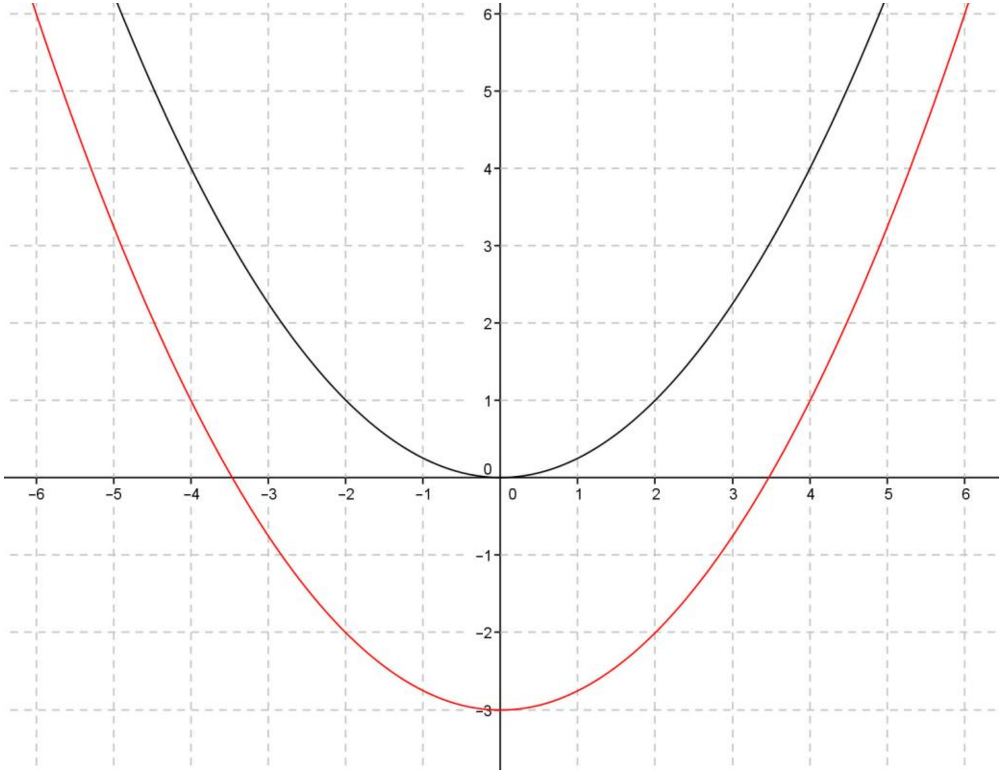


7.4 Parabolen verschuiven [1]



- De zwarte grafiek is $f(x) = 0{,}25x^2$.
- De rode grafiek is $g(x) = 0{,}25x^2 + 3$, een verticale verschuiving van 3 omhoog van $f(x)$.

7.4 Parabolen verschuiven [1]



- De zwarte grafiek is f(x) = $0{,}25x^2$.
- De rode grafiek is g(x) = $0{,}25x^2 - 3$, een verticale verschuiving van 3 omlaag van f(x).

7.4 Parabolen verschuiven [2]

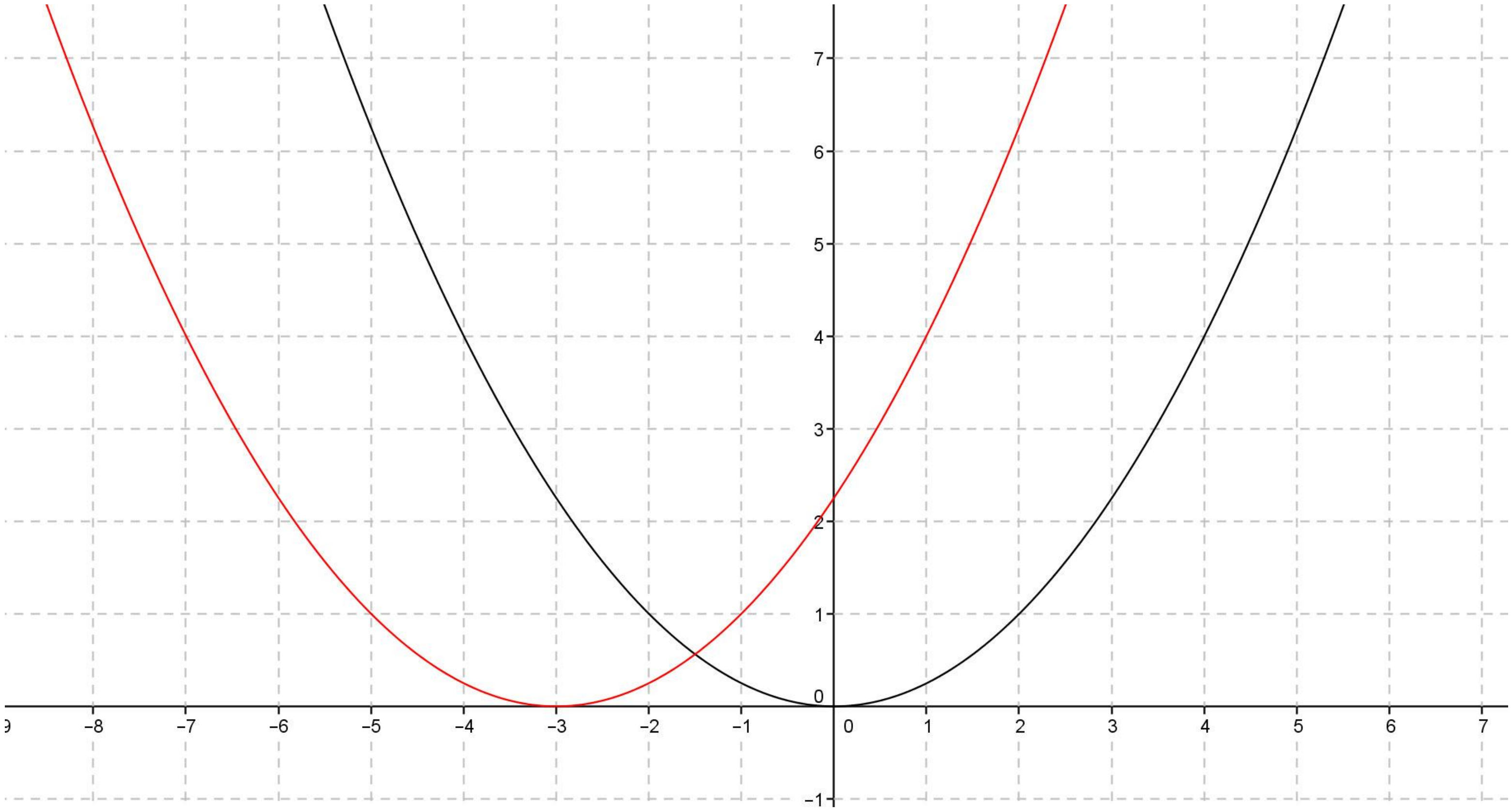
Gegeven zijn de functies f(x) = $0{,}25x^2$ en g(x) = $0{,}25(x+3)^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
g(x)	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25

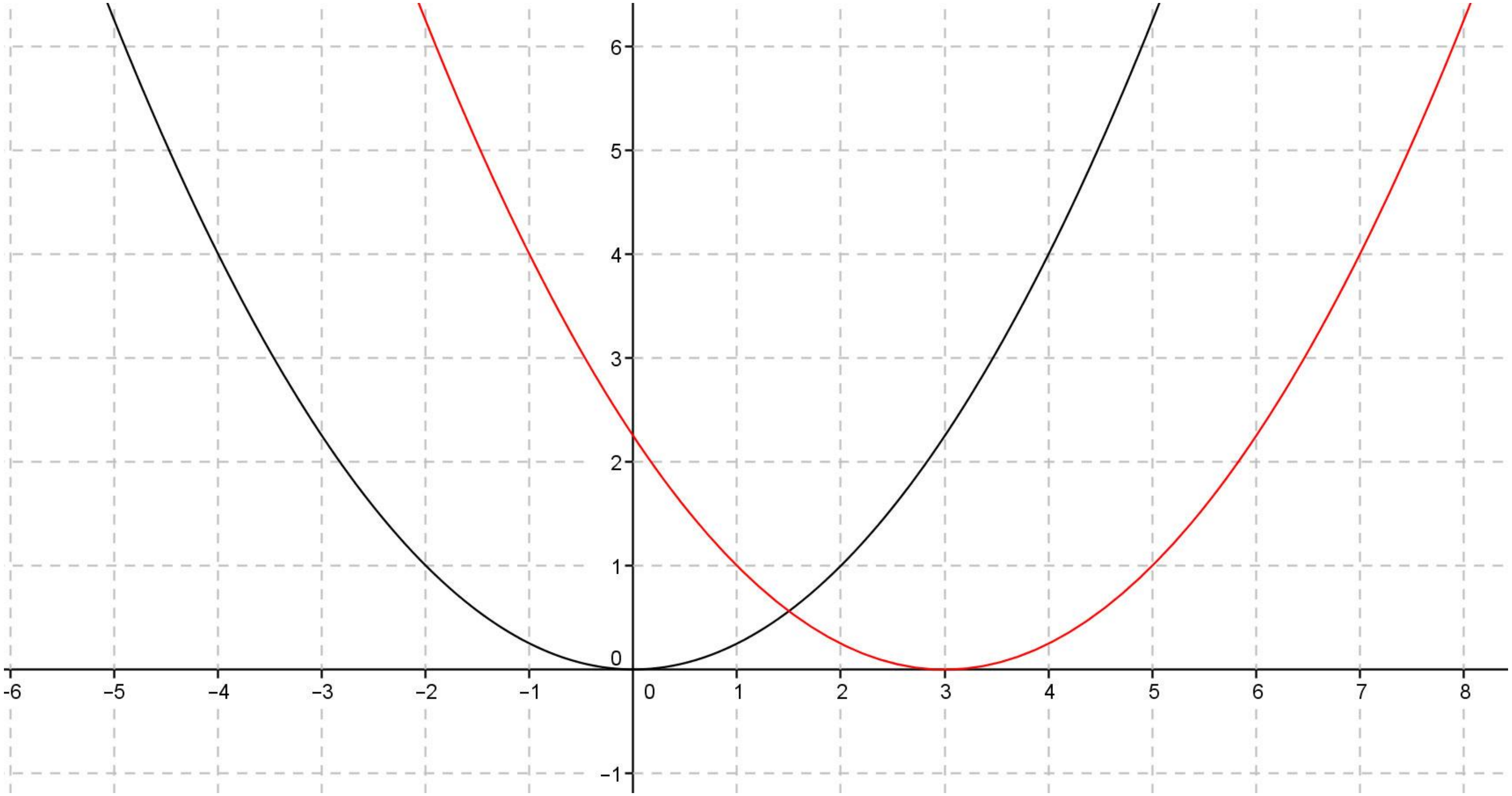
Uit de beide tabellen volgt, dat er een verband is tussen de functies van f(x) en g(x). Ga je vanuit een punt van de grafiek van f(x) 3 naar links, dan krijg je een punt van de grafiek van g(x). Door de grafiek van f(x) dus 3 naar links te verschuiven, ontstaat de grafiek van g.

7.4 Parabolen verschuiven [2]



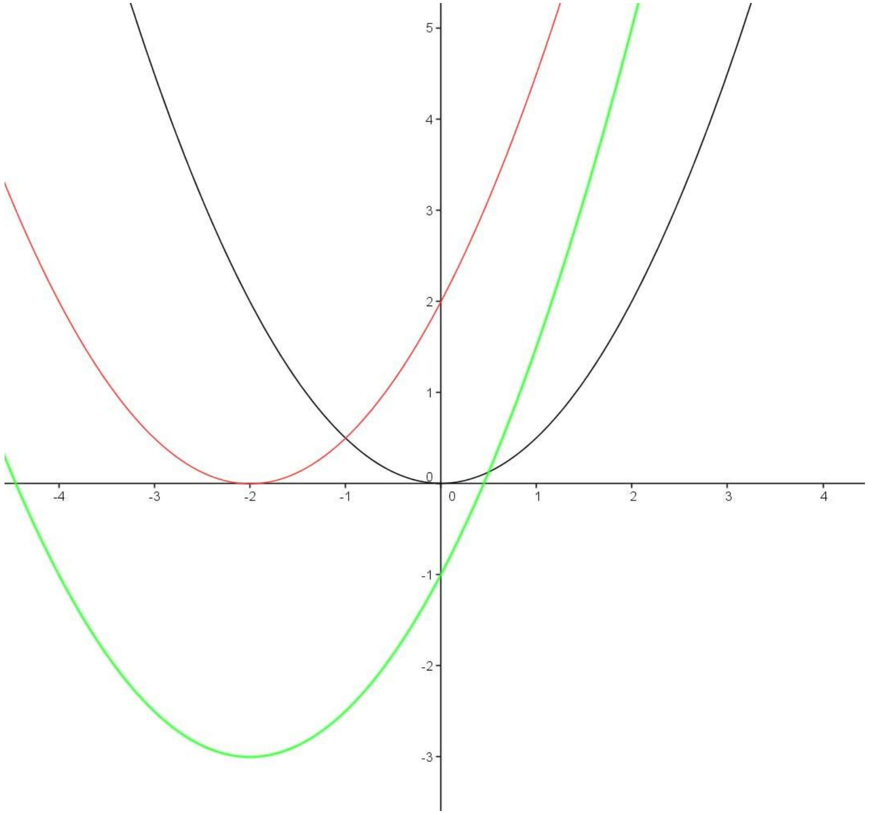
- De zwarte grafiek is $f(x) = 0{,}25x^2$.
- De rode grafiek is $g(x) = 0{,}25(x+3)^2$, een horizontale verschuiving van 3 naar links van f(x).

7.4 Parabolen verschuiven [2]



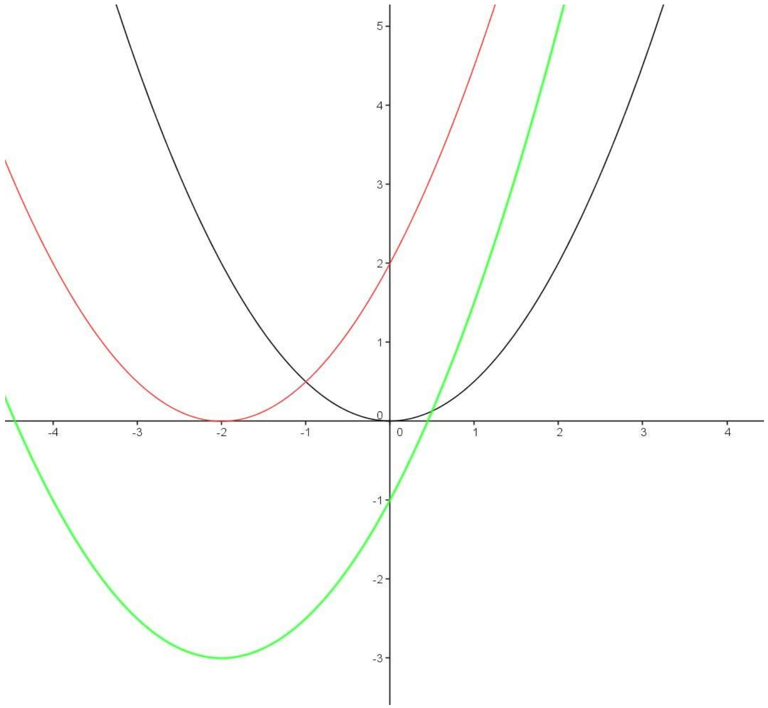
- De zwarte grafiek is $f(x) = 0{,}25x^2$.
- De rode grafiek is $g(x) = 0{,}25(x-3)^2$, een horizontale verschuiving van 3 naar rechts van f(x).

7.4 Parabolen verschuiven [3]



- De zwarte grafiek is $f(x) = 0,5x^2$.
- De rode grafiek is $g(x) = 0,5(x+2)^2$ dus een horizontale verschuiving van 2 naar links van f(x).
- De groene grafiek is $h(x) = 0,5(x+2)^2 – 3$ dus een verticale verschuiving van 3 naar beneden van g(x).

7.4 Parabolen verschuiven [3]



- De zwarte grafiek is $f(x) = 0{,}5x^2$. Het minimum is (0, 0).
- De rode grafiek is $g(x) = 0{,}5(x+2)^2$ dus een horizontale verschuiving van 2 naar links van f(x). Het minimum wordt (-2, 0).
- De groene grafiek is $h(x) = 0{,}5(x+2)^2 – 3$ dus een verticale verschuiving van 3 naar beneden van g(x). Het minimum wordt (-2, -3).

7.4 Parabolen verschuiven [4]

Voorbeeld:
Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van $g(x) = x^2 + 10x - 13$

Kwadraat afsplitsen geeft:
$x^2 + 10x - 13 =$
$(x + 5)^2 - 25 - 13 =$
$(x + 5)^2 - 38$

De grafiek van $f(x) = x^2$ heeft een minimum bij (0,0).
De grafiek van g(x) ontstaat uit de grafiek van f(x) door deze 5 naar links te verschuiven en 38 naar beneden. Er is een minimum in het punt (-5, -38).

7.4 Parabolen verschuiven [5]

Voorbeeld:
Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van $g(x) = 3x^2 + 12x + 11$

Kwadraat afsplitsen geeft:
$3x^2 + 12x + 11 =$
$3(x^2 + 4x) + 11 =$ Schrijf in de vorm $(x^2 + bx)$
$3((x + 2)^2 – 4) + 11 =$ Splits het kwadraat af
$3(x + 2)^2 – 12 + 11 =$ Werk de buitenste haakjes weg
$3(x + 2)^2 - 1$

De grafiek van $f(x) = 3x^2$ heeft een minimum bij (0,0).
De grafiek van g(x) ontstaat uit de grafiek van f(x) door deze 2 naar links te verschuiven en 1 naar beneden. Er is een minimum in het punt (-2, -1).

7.5 De top van een parabool [1]

Voorbeeld:
Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van $f(x) = x^2 + 8x - 12$.

Stap 1:
Bereken de x-coördinaat van de top met de formule: $x_{top} = -\frac{b}{2a}$

$a = 1$, $b = 8$ en $c = -12$

$$x_{top} = -\frac{8}{2 \bullet 1} = -4$$

Stap 2:
Bereken de y-coördinaat van de top door x_{top} in te vullen in $f(x)$.

$y_{top} = f(x_{top}) = (-4)^2 + 8 \cdot -4 - 12 = 16 - 32 - 12 = -28$.

De coördinaten van de top zijn nu: $(-4, -28)$.

7.5 De top van een parabool [2]

<u>Voorbeeld:</u>
Bereken voor welke p de y-coördinaat van de top van de grafiek van
$f(x) = 3x^2 + px + 2$ gelijk is aan 2.

<u>Stap 1:</u>
Bereken x_{top}

$$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2 \bullet 3} = -\frac{1}{6}p$$

<u>Stap 2:</u>
Bereken y_{top} .

$$y_{top} = f(x_{top}) = 3 \bullet \left(-\frac{1}{6}p\right)^2 + p \bullet \left(-\frac{1}{6}p\right) + 2$$

$$= 3 \bullet \frac{1}{36}p^2 - \frac{1}{6}p^2 + 2$$

$$= \frac{3}{36}p^2 - \frac{1}{6}p^2 + 2$$

7.5 De top van een parabool [2]

Voorbeeld:

Bereken voor welke p de y-coördinaat van de top van de grafiek van
$f(x) = 3x^2 + px + 2$ gelijk is aan 2.

Stap 3:

Er geldt $y_{top} = f(x_{top}) = 2$

$$\frac{3}{36}p^2 - \frac{1}{6}p^2 + 2 = 2$$

$$\frac{1}{12}p^2 - \frac{1}{6}p^2 = 0$$

$$\frac{1}{12}p^2 - \frac{2}{12}p^2 = 0$$

$$-\frac{1}{12}p^2 = 0$$

$$p = 0$$

De functie wordt nu: $f(x) = 3x^2 + 2$