

9.1 Centrummaten en verdelingen[1]

De onderstaande **frequentietabel** geeft aan hoeveel auto's er in een bepaald uur in een straat geteld zijn.

Aantal auto's per uur	15	16	17	18	19	20	21
frequentie	2	7	9	15	7	4	1

Het **waarnemingsgetal** 18 heeft de **frequentie** 15. Dit betekent dat het 15 keer is voorgekomen dat er in deze straat 18 auto's in een uur zijn geteld.

Je kunt het **gemiddelde** aantal auto's per uur nu als volgt berekenen:

1. Bereken de totale frequentie (het totaal aantal waarnemingen).
Totale frequentie = $2 + 7 + 9 + 15 + 7 + 4 + 1 = 45$
2. Vermenigvuldig elk waarnemingsgetal met de bijbehorende frequentie en tel dit op.
 $2 \times 15 + 7 \times 16 + 9 \times 17 + 15 \times 18 + 7 \times 19 + 4 \times 20 + 1 \times 21 = 799$
3. Deel de uitkomst van stap 2 door de uitkomst van stap 1
Het gemiddelde aantal auto's per uur is $799/45 \approx 17,8$

9.1 Centrummaten en verdelingen[1]

Voorbeeld:

Gegeven is de volgende rij getallen:

4 7 10 3 6 125 6 3 9

In deze rij zit één getal, dat erg afwijkt van de rest (het getal 125). Wanneer je nu het gemiddelde uit zou rekenen, zou dit erg vertekenen, door dit ene erg afwijkende getal.

Mediaan = Het middelste getal van alle waarnemingsgetallen nadat deze naar grootte zijn gerangschikt. Bij een even aantal waarnemingsgetallen is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen.

De getallen op volgorde zetten geeft; 3 3 4 6 6 7 9 10 125

Het middelste waarnemingsgetal is hier het 5^{de} getal. De mediaan is 6.

Modus = het waarnemingsgetal met de grootste frequentie. Zijn er twee of meer getallen met dezelfde grootste frequentie dan is er geen modus.

De getallen 3 en 6 komen allebei twee keer voor. Deze rij heeft dus geen modus.

9.1 Centrummaten en verdelingen[1]

Voorbeeld:

De onderstaande tabel geeft aan hoe vaak de kinderen uit groep 4 van een lagere school het afgelopen jaar naar het zwembad zijn gegaan.

aantal	0	1	2	3	4	5	6
frequentie	5	7	12	15	13	8	6

Bereken het gemiddelde, de modus en de mediaan (de **centrummaten**)

Berekenen gemiddelde:

$$\text{Totale frequentie} = 5 + 7 + 12 + 15 + 13 + 8 + 6 = 66$$

$$5 \times 0 + 7 \times 1 + 12 \times 2 + 15 \times 3 + 13 \times 4 + 8 \times 5 + 6 \times 6 = 204$$

$$\text{Gemiddelde} = 204/66 \approx 3,09$$

9.1 Centrummaten en verdelingen[1]

Voorbeeld:

De onderstaande tabel geeft aan hoe vaak de kinderen uit groep 4 van een lagere school het afgelopen jaar naar het zwembad zijn gegaan.

aantal	0	1	2	3	4	5	6
frequentie	5	7	12	15	13	8	6

Modus = 3 (Dit getal komt het meeste voor)

Mediaan:

Getallen 1 t/m 5: 0

Getallen 12 t/m 24: 2

Getallen 39 t/m 52: 4

Getallen 61 t/m 66: 6

Getallen 5 t/m 12: 1

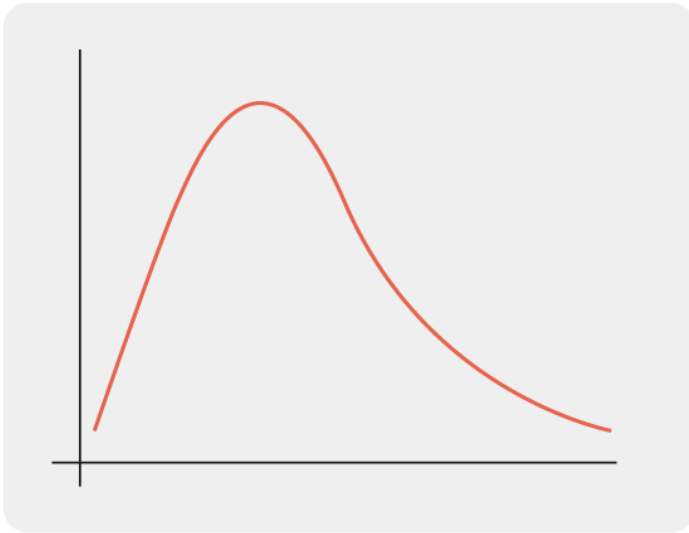
Getallen 24 t/m 39: 3

Getallen 52 t/m 60: 5

Er is een even aantal getallen. Het 33^{ste} getal is 3. het 34^{ste} getal is 3.

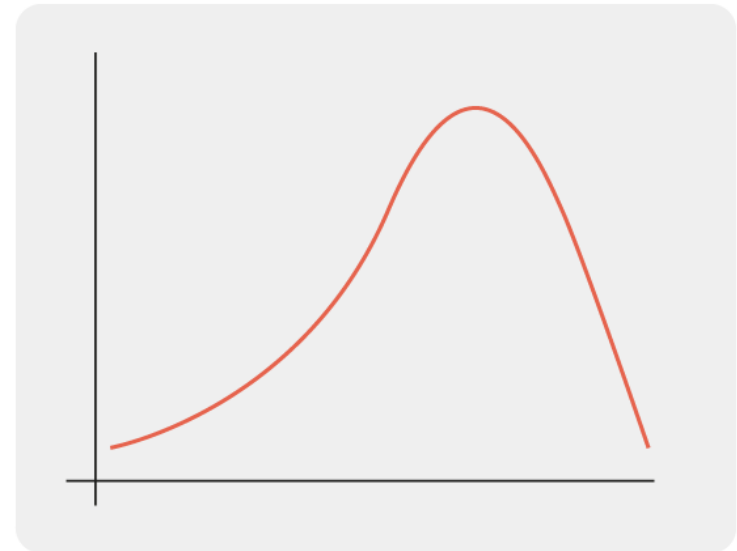
De mediaan is nu: $(3 + 3)/2 = 3$.

9.1 Centrummaten en verdelingen[2]



De meeste waarnemingen bevinden zich aan de linkerkant. Deze verdeling is **linksscheef**.

De meeste waarnemingen bevinden zich aan de rechterkant. Deze verdeling is **rechtsscheef**.



9.2 Spreiding en boxplot [1]

						gemiddelde	Mediaan
Bart	5,8	6,8	7,0	7,2	7,7	6,9	7,0
Marieke	4,5	6,0	7,0	8,0	9,0	6,9	7,0
Ruth	4,0	5,7	7,0	8,3	9,5	6,9	7,0

Het gemiddelde en de mediaan van de resultaten van deze drie leerlingen zijn gelijk. Bij Bart liggen de cijfers veel dichter bij elkaar dan bij Marieke en Ruth. Bij Bart is er weinig **spreiding**. Bij Marieke en Ruth is er meer **spreiding**.

Spreidingsbreedte = grootste getal – kleinste getal

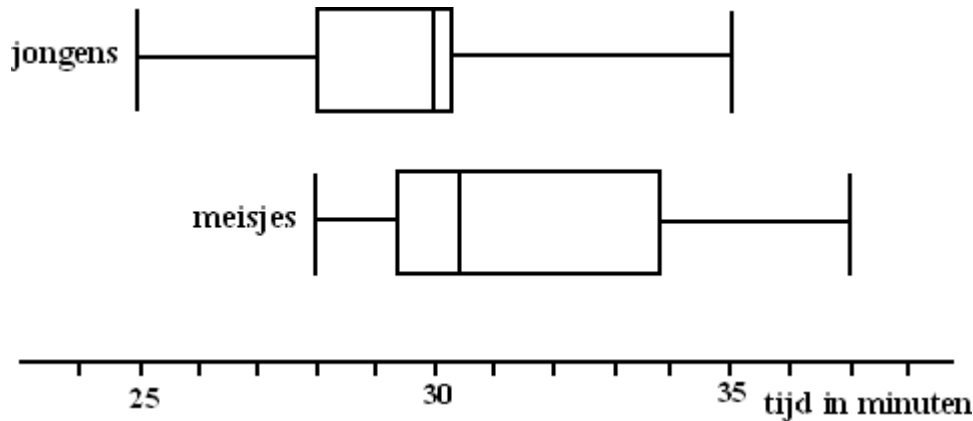
Spreidingsbreedte Bart = $7,7 - 5,8 = 1,9$

Spreidingsbreedte Marieke = $9,0 - 4,5 = 4,5$

Spreidingsbreedte Ruth = $9,5 - 4,0 = 5,5$

9.2 Spreiding en boxplot [2]

Gegevens kunnen ook worden weergegeven in een **boxplot**.

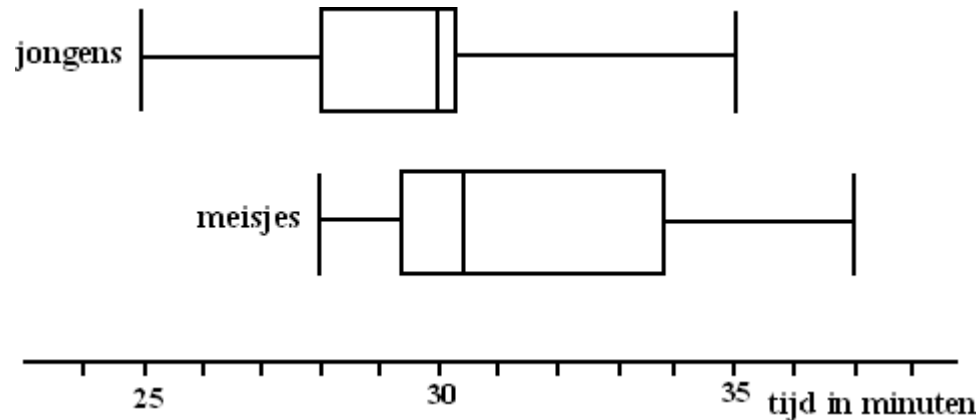


In dit boxplot is aangegeven:

- dat de kortste tijd om een afstand af te leggen voor een jongen 25 minuten is;
- dat 25% van de jongens tussen de 25 en 28 minuten nodig heeft;
- dat de volgende 25% van de jongens tussen de 28 en 30 minuten nodig heeft;
- dat de volgende 25% van de jongens tussen de 30 en 30,5 minuten nodig heeft;
- dat de langzaamste 25% van de jongens tussen de 30,5 en 35 minuten nodig heeft;
- dat de langste tijd om deze afstand af te leggen voor een jongen 35 minuten is.

9.2 Spreiding en boxplot [2]

Gegevens kunnen ook worden weergegeven in een **boxplot**.



In dit boxplot is aangegeven:

- De kleinste waarneming voor een meisje is 28 minuten;
- Het **eerste kwartiel** (Q_1) is 29,5 minuten;
- De mediaan is 30,5 minuten;
- Het **derde kwartiel** (Q_3) is 34 minuten;
- De grootste waarneming voor een meisje is 37 minuten.

Elke groep van dit boxplot bevat 25% van de waarnemingen.

9.2 Spreiding en boxplot [3]

Jaap heeft geen zin om de telefoon op te nemen en laat de telefoon altijd rinkelen. Hij houdt bij hoeveel keer de telefoon rinkelt voor men op hangt.

7, 3, 8, 6, 8, 5, 4, 5, 3, 6, 2, 6, 9, 1, 2, 7, 5, 8, 7, 6.

Maak een boxplot bij deze gegevens.

Stap 1:

Zet de getallen in volgorde van grootte:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9

Het kleinste getal is 1.

Het grootste getal is 9

Er zijn twintig getallen. Het 10^{de} en 11^{de} getal zijn 6, dus de mediaan is 6.

Stap 2:

Splits in twee even grote groepen:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6. Het 5^{de} en 6^{de} getal zijn 3 en 4. $Q_1 = 3,5$.

6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9. Het 5^{de} en 6^{de} getal zijn 7 en 7. $Q_3 = 7$.

9.2 Spreiding en boxplot [3]

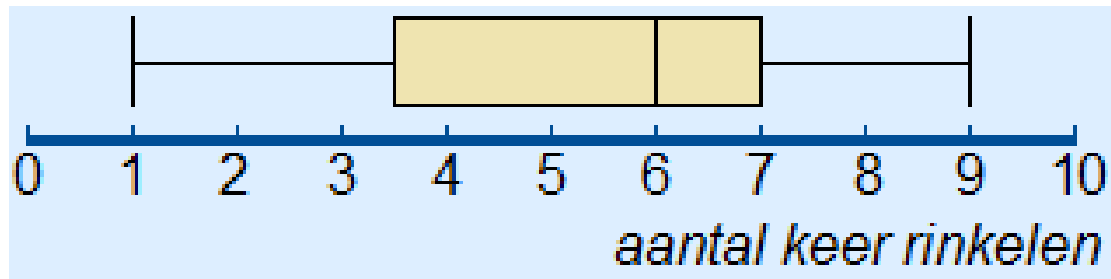
Jaap heeft geen zin om de telefoon op te nemen en laat de telefoon altijd rinkelen. Hij houdt bij hoeveel keer de telefoon rinkelt voor men op hangt.

7, 3, 8, 6, 8, 5, 4, 5, 3, 6, 2, 6, 9, 1, 2, 7, 5, 8, 7, 6.

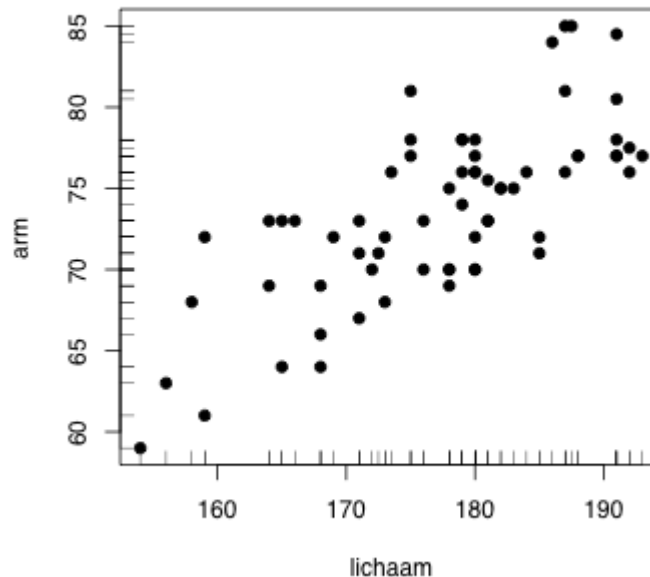
Maak een boxplot bij deze gegevens.

Stap 3:

Maak de boxplot:



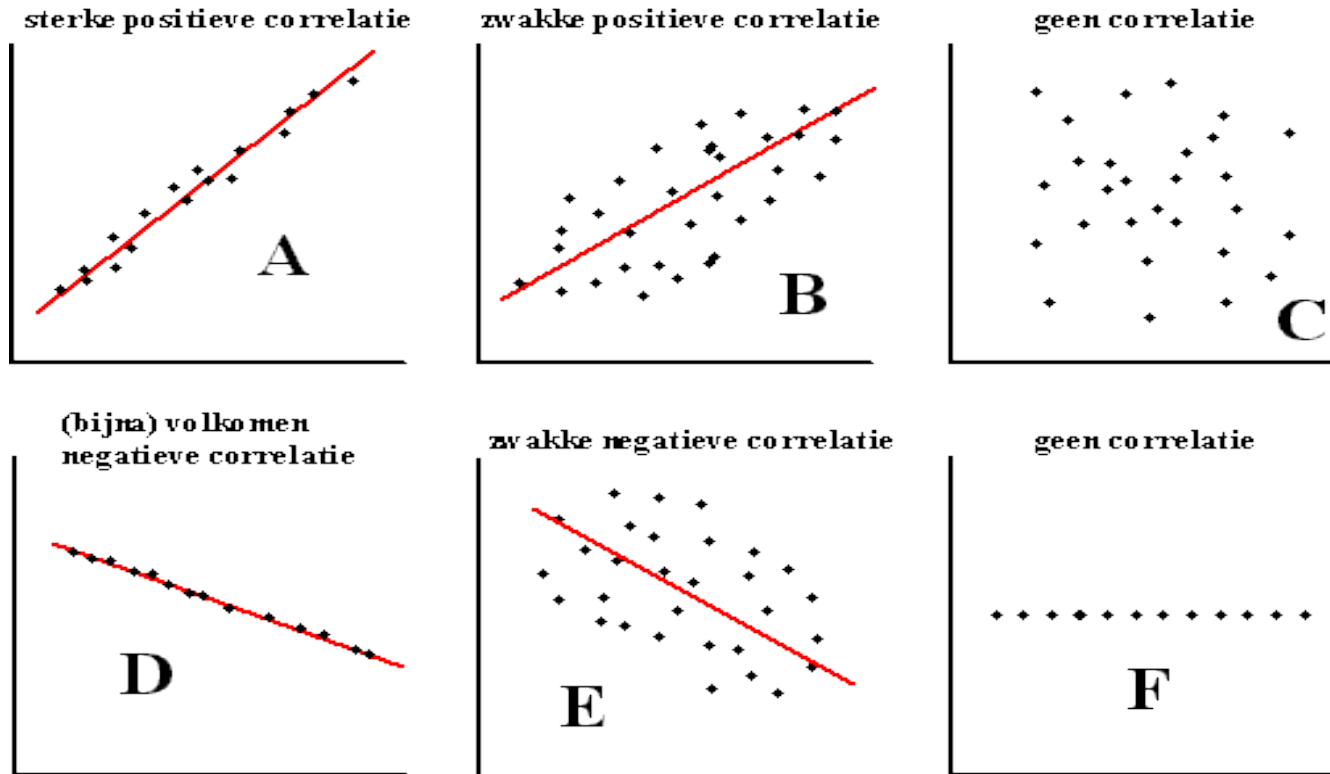
9.3 Spreidingsdiagrammen [1]



Dit plaatje is een **spreidingsdiagram**. Van een groep personen is onderzocht hoe lang ze zijn en wat de lengte van hun armen is.

De punten zijn de elementen (personen) van de onderzochte populatie. Elk element is op twee kenmerken (lichaamslengte en lengte armen) onderzocht.

9.3 Spreidingsdiagrammen [2]



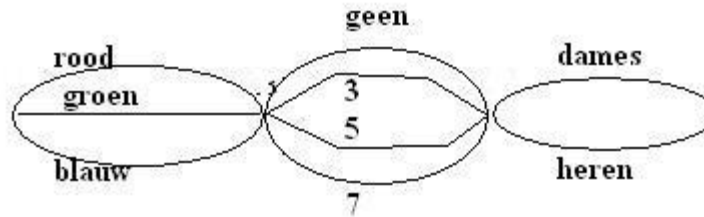
Er is sprake van **correlatie** als er een samenhang bestaat tussen twee rijen waarnemingsgetallen. De lijn die zo goed mogelijk bij de puntenwolk past is de **trendlijn**.

9.4 Tellen met en zonder herhaling [1]

Voorbeeld 1:

Bij een bepaald model fiets heeft de klant de volgende keuzes:

- De kleur van de fiets kan rood, groen of blauw zijn;
- De fiets kan geen, 3, 5 of 7 versnellingen hebben;
- De fiets kan een dames- of herenfiets zijn.



Het aantal mogelijke soorten van dit model is nu: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$

Definitie vermenigvuldigingsregel:

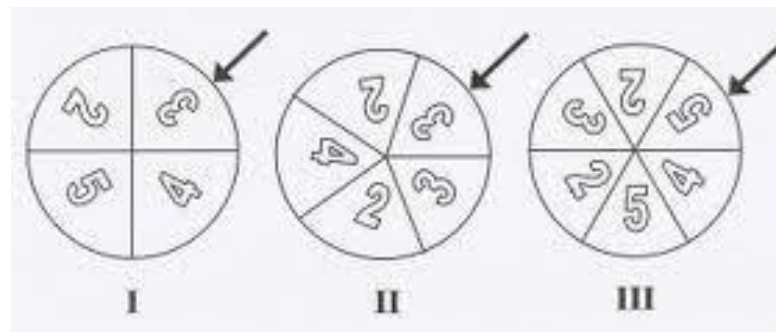
Bestaat een experiment uit drie handelingen, waarbij de eerste handeling op p manieren kan worden uitgevoerd, de tweede op q manieren en de derde op r manieren, dan zijn er voor het gehele experiment $p \cdot q \cdot r$ manieren.

9.4 Tellen met en zonder herhaling [1]

Voorbeeld 2:

Bereken het aantal uitkomsten met drie keer een 2.

$$(222) = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$



Voorbeeld 3:

Bereken het aantal uitkomsten waarbij alle getallen groter dan 3 zijn.

$$(>3>3>3) = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$$

9.4 Tellen met en zonder herhaling [2]

Voorbeeld 1:

Een bestuur bestaat uit 6 personen. Uit deze 6 personen wordt eerst een voorzitter, dan een secretaris en tot slot een penningmeester gekozen.

Bereken het aantal manieren om de functies te verdelen:

$$\text{Aantal} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Let op:

- Als je de voorzitter kiest, mag deze gekozen worden uit 6 personen;
- Als je de secretaris kiest, zijn er nog 5 personen over om uit te kiezen;
- Als je de penningmeester kiest, zijn er nog 4 personen over om uit te kiezen.

Er wordt nu gekozen **zonder herhaling**. Een persoon die eenmaal gekozen is, mag niet meer opnieuw gekozen worden.

9.4 Tellen met en zonder herhaling [2]

Voorbeeld 2:

Een internetwinkel die boeken verkoopt, geeft elk boek een unieke productcode.
De productcode bestaat uit 2 letters – 2 cijfers – 3 letters;
Alle cijfers mogen gebruikt worden;
Alle letters (behalve de I en de O mogen gebruikt worden);
Bereken het aantal mogelijke productcodes.

$$\text{Aantal} = 24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 796.262.400$$

Let op:

- Als je een letter of cijfer gekozen hebt, mag je deze de volgende keer weer opnieuw kiezen.

Er wordt nu gekozen **met herhaling**. Een letter of cijfer die eenmaal gekozen is, mag weer opnieuw gekozen worden.

9.4 Tellen met en zonder herhaling [3]

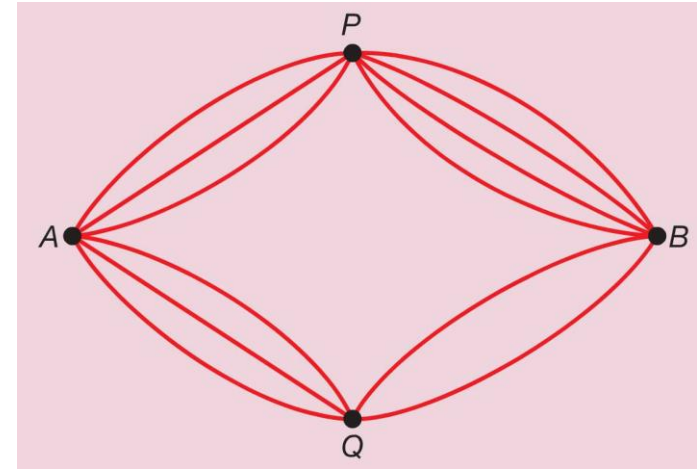
Voorbeeld 1:

Vanuit punt A kun je via P of Q naar punt B.

Als je via punt P gaat, zijn er $3 \cdot 4 = 12$ manieren.

Als je via punt Q gaat, zijn er $3 \cdot 2 = 6$ manieren.

In totaal zijn er dus $12 + 6 = 18$ manieren om van punt A naar punt B te gaan.

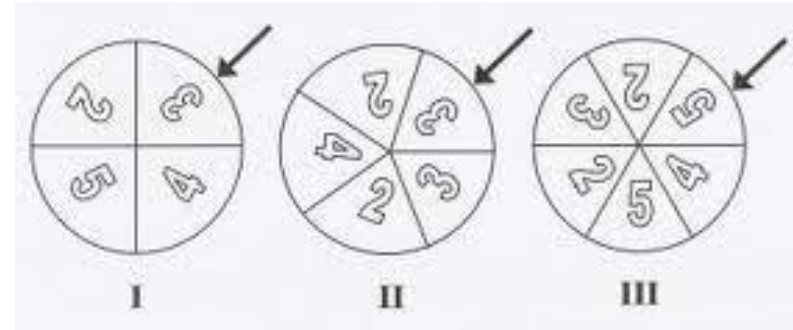


Definitie:

Kan handeling I op p manieren en handeling II op q manieren dan kan:

- Handeling 1 EN handeling II op $p \cdot q$ manieren (**vermenigvuldigingsregel**);
- Handeling 1 OF handeling II op $p + q$ manieren (**somregel**).

9.4 Tellen met en zonder herhaling [3]



Voorbeeld 2:

Bereken het aantal uitkomsten met twee keer het getal 2 en een keer het getal 4

$$(224) + (242) + (422) = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 2 + 2 + 4 = 8$$