

# 6.0 Voorkennis

## Kruislings vermenigvuldigen:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC$$

## Voorbeeld:

$$\frac{50}{x-1} = 10$$

$$50 = 10(x-1)$$

$$50 = 10x - 10$$

$$-10x = -60$$

$$x = 6$$

# 6.0 Voorkennis

## Herhaling van rekenregels voor machten:

$$\begin{array}{llll} a^p \cdot a^q = a^{p+q} [1] & \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} [2] & a^0 = 1 \text{ als } a \neq 0 [5] & a^{-p} = \frac{1}{a^p} [6] \\ (a^p)^q = a^{pq} [3] & (ab)^p = a^p b^p [4] & a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} & a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} [8] \end{array}$$

## Voorbeeld 1:

Schrijf als macht van a:

$$\frac{1}{a^8} : a^{-3} = a^{-8} : a^{-3} = a^{-8-(-3)} = a^{-5}$$

## Voorbeeld 2:

Schrijf zonder negatieve exponenten:

$$\left(\frac{3}{7}a\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{7}a\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{243}a^3} = \frac{243}{27a^3}$$

# 6.1 Kwadratische formules [1]

## Voorbeeld 1:

Teken de grafiek van  $y = x^2 - 3x - 2$ ;

### Stap 1:

Vul bij de GR de formule in:

Y= | Y1=  $X^2 - 3X - 2$

### Stap 2:

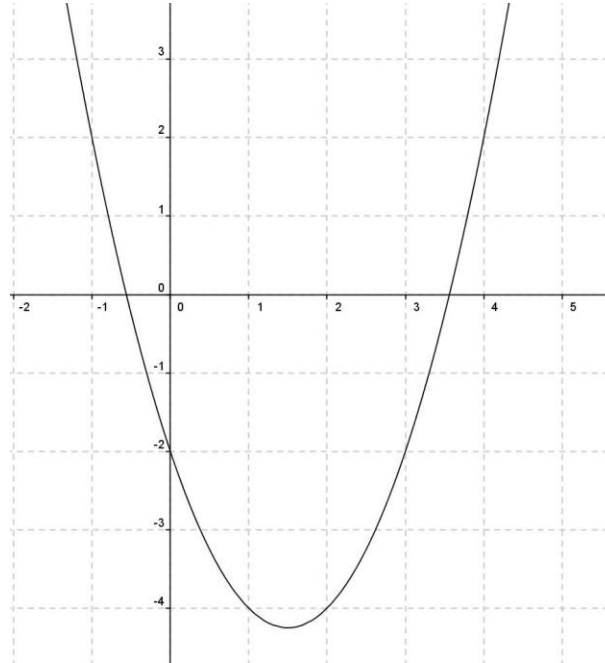
Maak een tabel met de GR:

| x | -1 | 0  | 1  | 2  | 3  | 4 |
|---|----|----|----|----|----|---|
| y | 2  | -2 | -4 | -4 | -2 | 2 |

# 6.1 Kwadratische formules [1]

## Stap 3:

Teken de grafiek van  $y = x^2 - 3x - 2$ ;



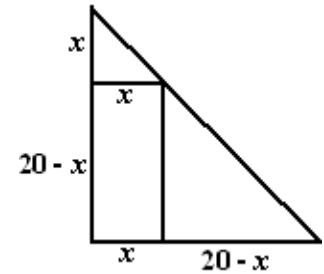
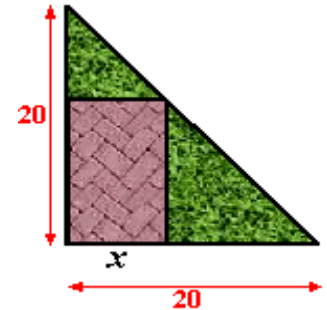
- Dit is de grafiek van de **tweedegraadsfunctie / kwadratische functie**:  
 $y = x^2 - 3x - 2$ ;
- De functie heeft een **top (minimum)** in het punt (1,5; -4,25); Dit is te berekenen met de optie MINIMUM op de GR;
- De grafiek van deze functie is een dalparabool.

# 6.1 Kwadratische formules [2]

## Voorbeeld:

Een grasveld heeft de vorm van een rechthoekige driehoek met twee zijden van 20. Er wordt een rechthoekig terras op aangelegd met breedte  $x$ .

Stel de formule op van de oppervlakte van dit terras en bereken de maximale oppervlakte van het terras.



Alle hoeken in de figuur zijn  $45^\circ$  of  $90^\circ$ .

Dat betekent dat alle driehoeken gelijkbenig zijn.

De lengtes zijn daarom zoals in de figuur hiernaast.

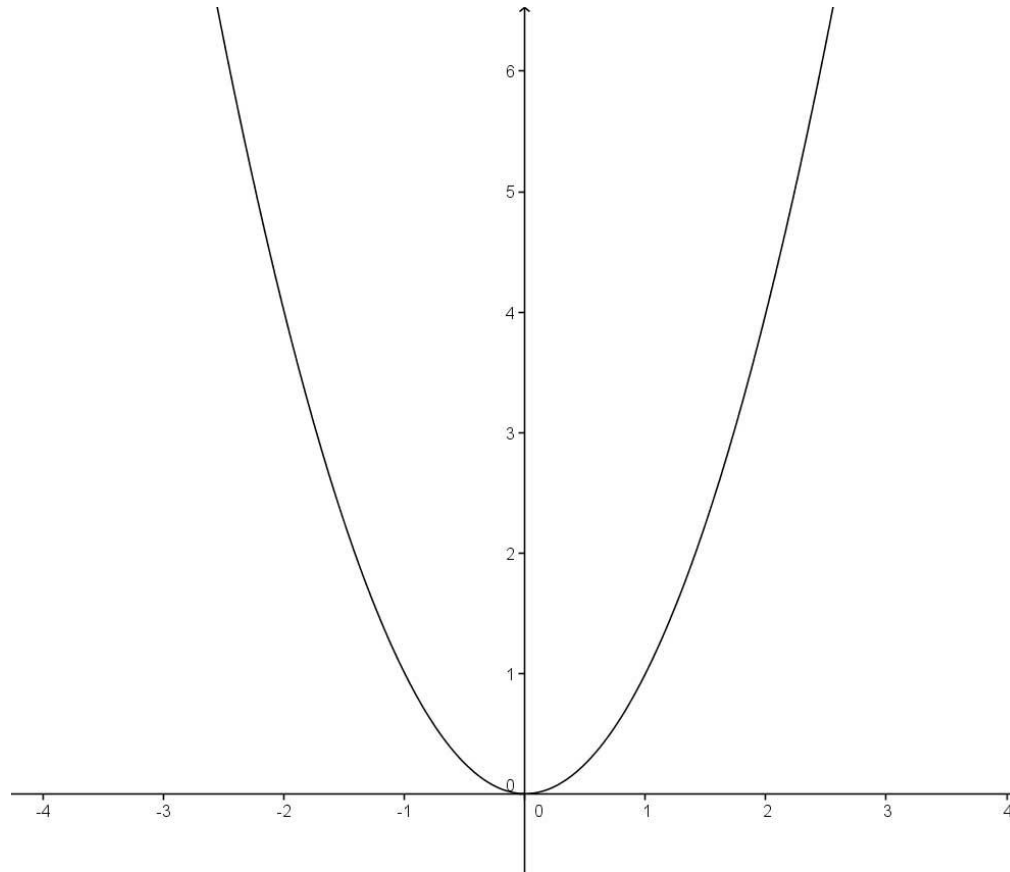
Oppervlakte terras is  $x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$

Voer in  $Y1 = 20X - X^2$

De optie MAXIMUM geeft  $x = 10$  en  $Y = 100$

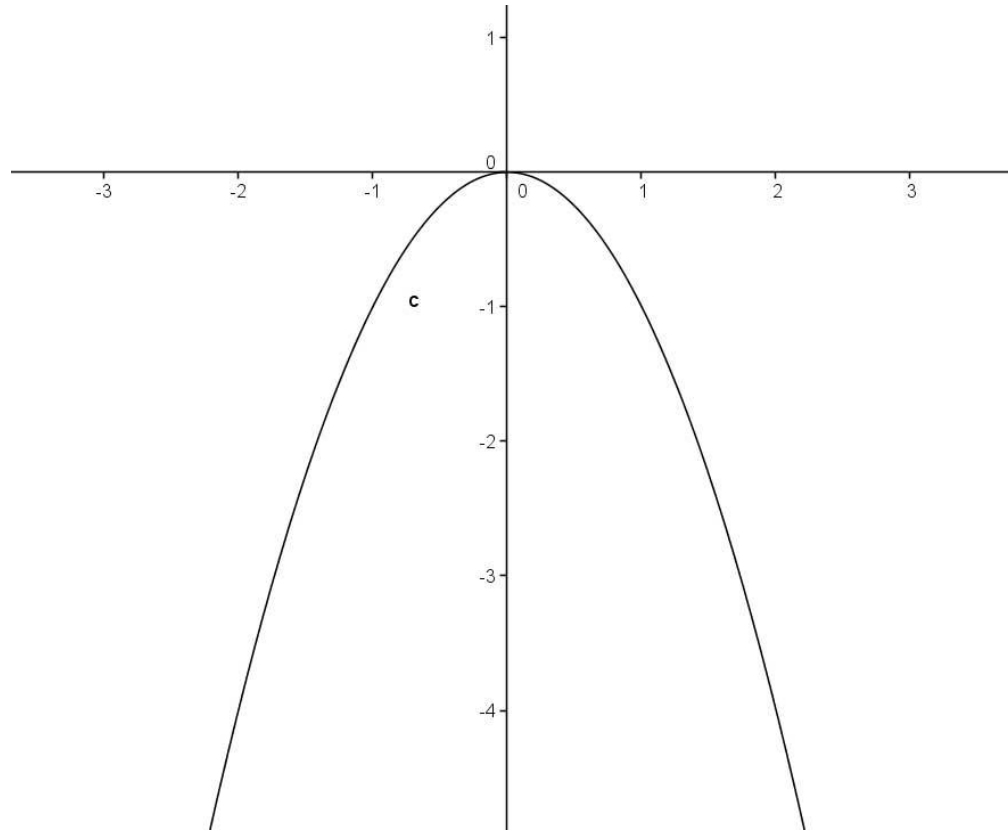
Het terras kan een **maximale oppervlakte van  $100 \text{ m}^2$**  hebben.

## 6.2 Grafieken veranderen [1]



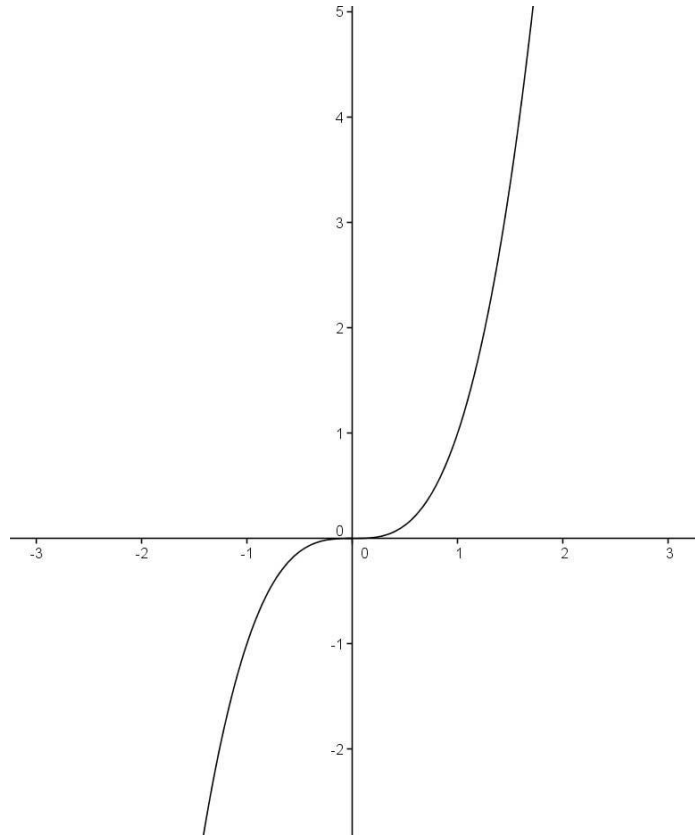
- Machtsfunctie  $f(x) = ax^n$  met  $a > 0$  en  $n$  even.
- Deze functie heeft een minimum als extreme waarde.
- Deze functie is symmetrisch in de lijn  $x = 0$ .

## 6.2 Grafieken veranderen [1]



- Machtsfunctie  $f(x) = ax^n$  met  $a < 0$  en  $n$  even.
- Deze functie heeft een maximum als extreme waarde.
- Deze functie is symmetrisch in de lijn  $x = 0$ .

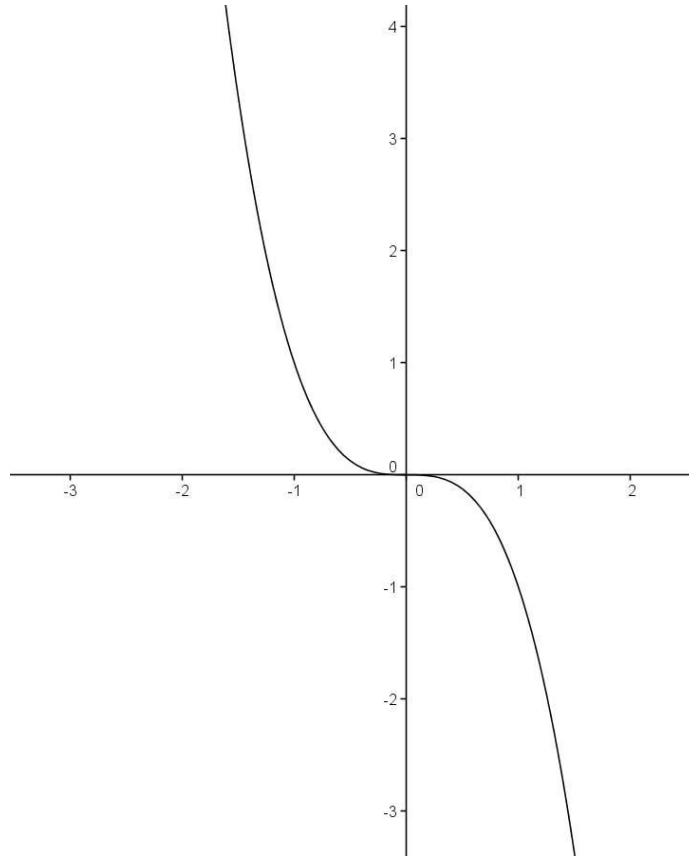
## 6.2 Grafieken veranderen [1]



- Machtsfunctie  $f(x) = ax^n$  met  $a > 0$  en  $n$  oneven.
- Deze functie heeft geen extreme waarde maar een **punt van symmetrie** in (0,0)

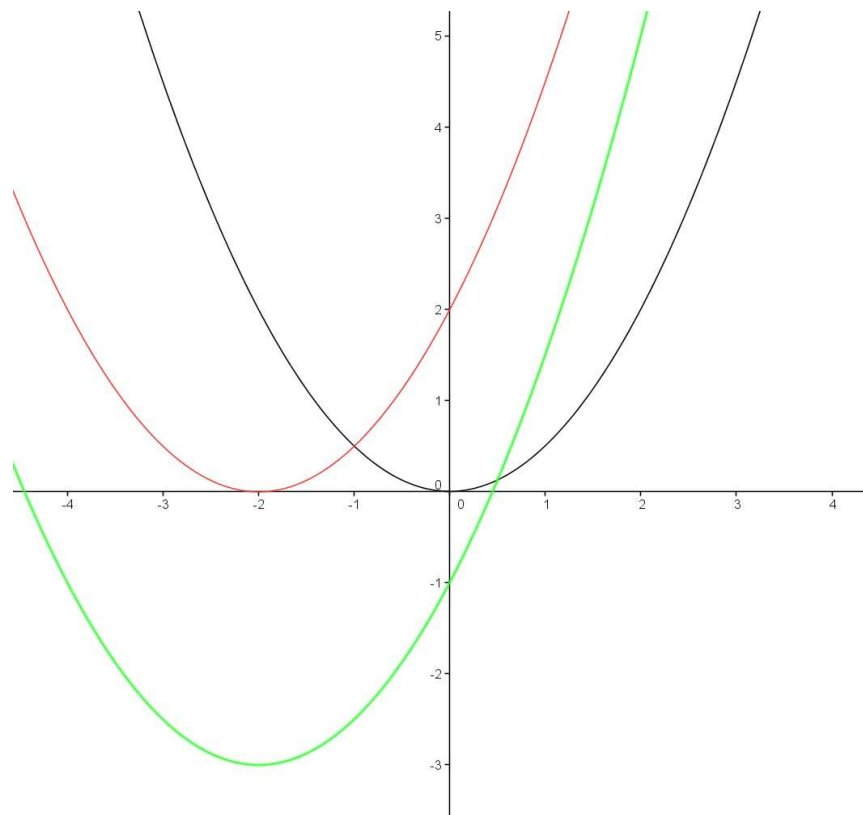


## 6.2 Grafieken veranderen [1]



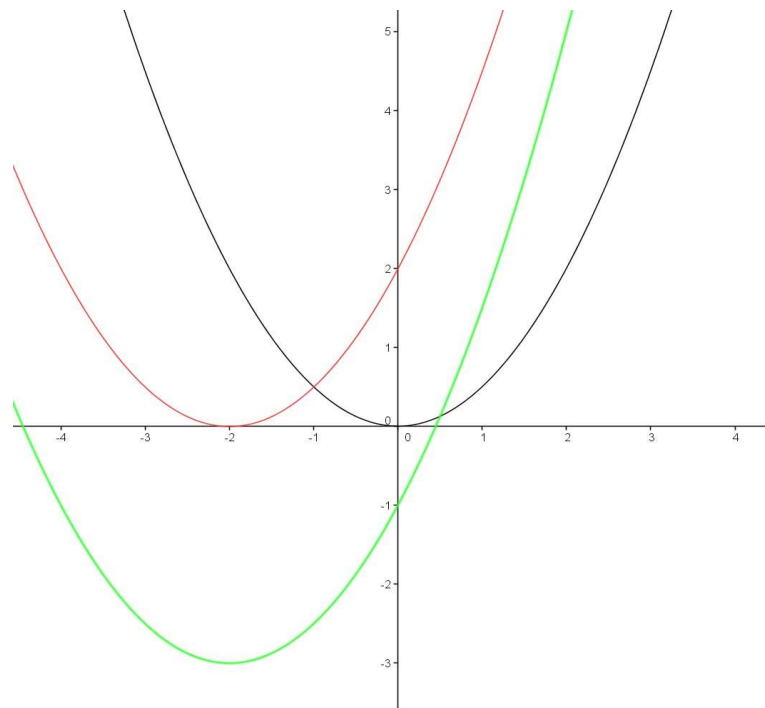
- Machtsfunctie  $f(x) = ax^n$  met  $a < 0$  en  $n$  oneven.
- Deze functie heeft geen extreme waarde maar een **punt van symmetrie** in  $(0,0)$

## 6.2 Grafieken veranderen [1]



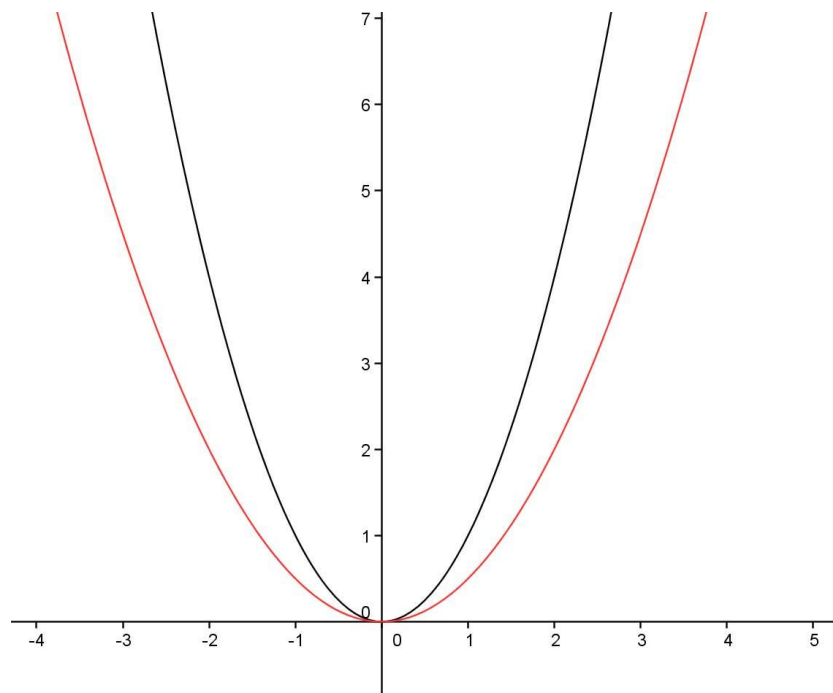
- De zwarte grafiek is  $f(x) = 0,5x^2$
- De rode grafiek is  $g(x) = 0,5(x + 2)^2$  dus een verschuiving van  $(-2,0)$  van  $f(x)$
- De groene grafiek is  $h(x) = 0,5(x + 2)^2 - 3$  dus een verschuiving van  $(0,-3)$  van  $g(x)$ .
- De rode en groene grafieken zijn **beeldgrafieken**.

## 6.2 Grafieken veranderen [2]



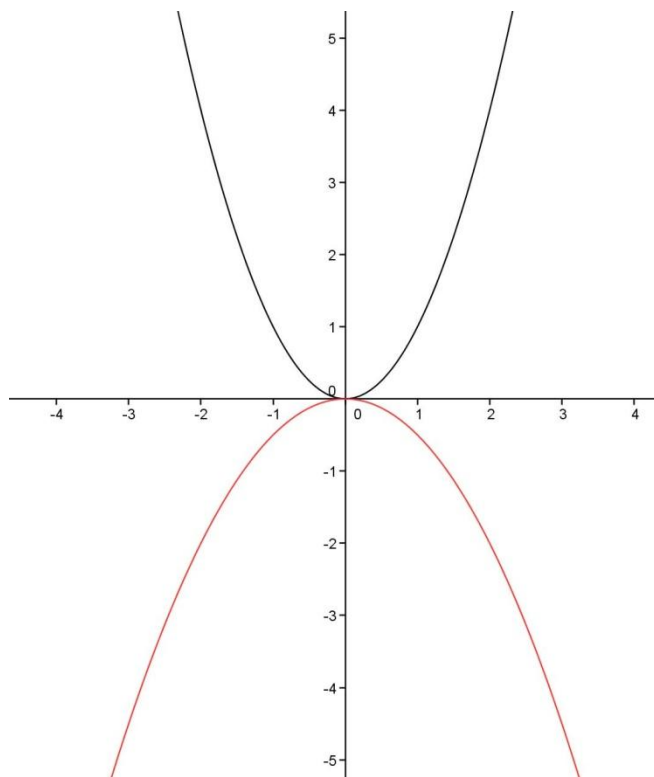
- De zwarte grafiek is  $f(x) = 0,5x^2$  met minimum  $(0,0)$ ;
- De rode grafiek is  $g(x) = 0,5(x+2)^2$  dus een verschuiving van  $(-2,0)$  van  $f(x)$   
Het minimum verschuift nu ook 2 naar links en wordt  $(-2,0)$
- De groene grafiek is  $h(x) = 0,5(x+2)^2 - 3$  dus een verschuiving van  $(0,-3)$  van  $g(x)$   
Het minimum verschuift nu ook 3 naar beneden en wordt  $(-2, -3)$

## 6.2 Grafieken veranderen [3]



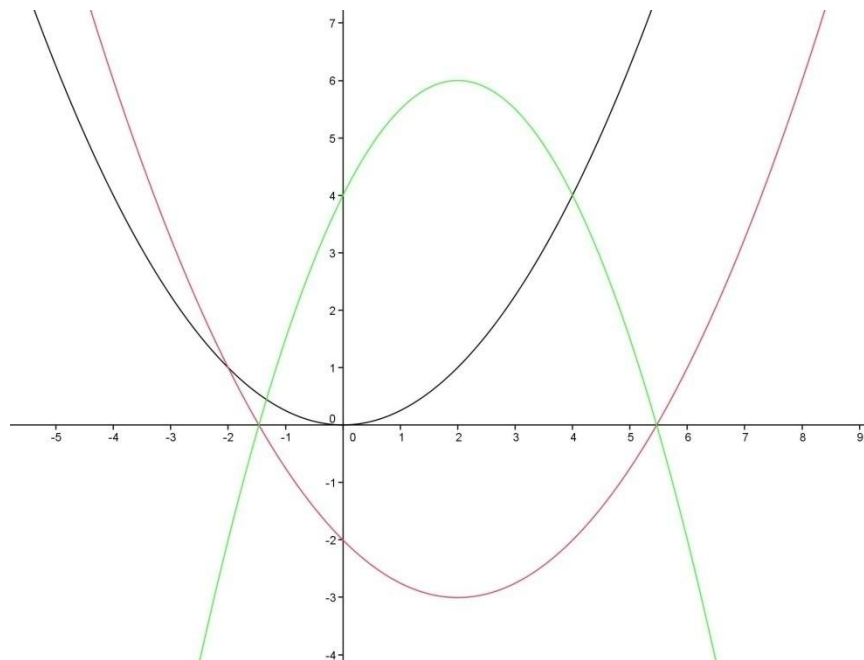
- De zwarte grafiek is  $f(x) = x^2$ ;
- De rode grafiek is  $g(x) = 0,5x^2$ . Dit is de grafiek van  $f(x)$  vermenigvuldigd t.o.v. de x-as met factor 0,5. Er is nu een **herschaling in verticale richting** met factor 0,5.
- Het punt (1,1) op de zwarte grafiek wordt (1; 0,5) op de rode grafiek;
- Het punt (2,4) op de zwarte grafiek wordt (2,2) op de rode grafiek.

## 6.2 Grafieken veranderen [3]



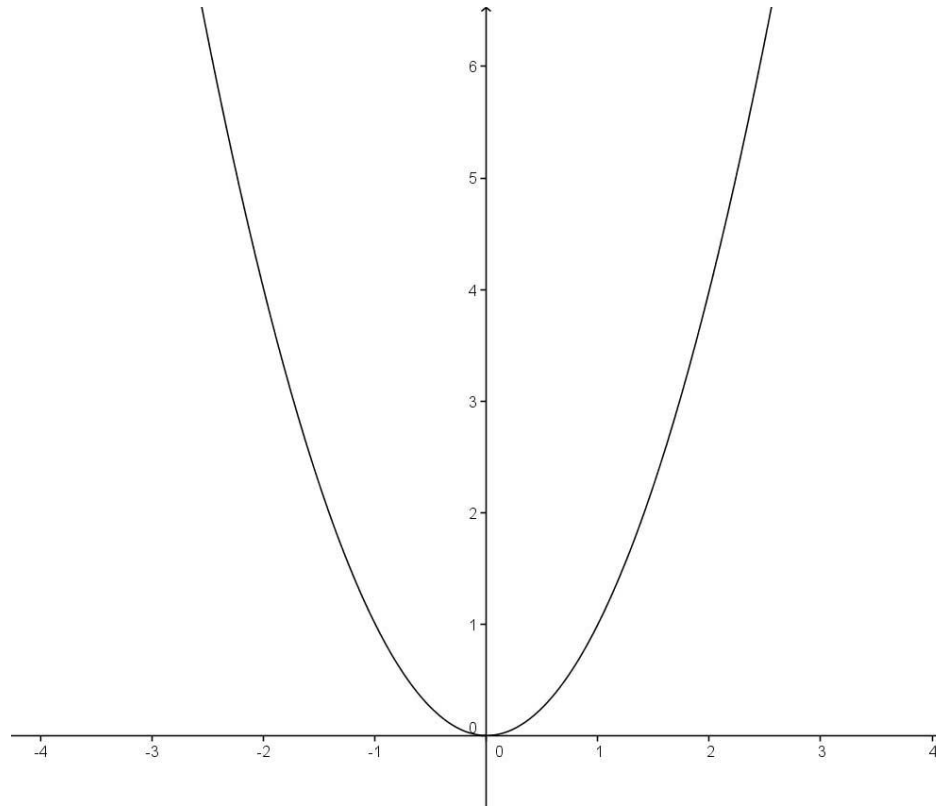
- De zwarte grafiek is  $f(x) = x^2$ ;
- De rode grafiek is  $g(x) = -0,5x^2$ . Dit is de grafiek van  $f(x)$  vermenigvuldigd t.o.v. de x-as met factor -0,5. Er is nu een **herschaling in verticale richting** met factor -0,5.
- Het punt (1,1) op de zwarte grafiek wordt (1; -0,5) op de rode grafiek;
- Het punt (2,4) op de zwarte grafiek wordt (2, -2) op de rode grafiek.

## 6.2 Grafieken veranderen [3]



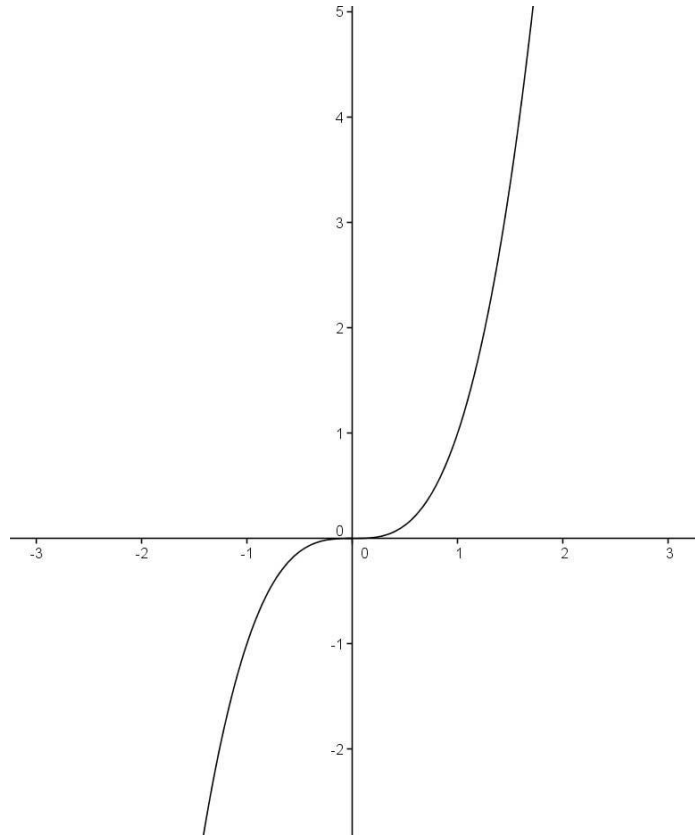
- De zwarte grafiek is  $f(x) = 0,25x^2$  met top (0,0);
- De rode grafiek is  $g(x) = 0,25(x - 2)^2 - 3$  met top (2, -3). Dit is de grafiek van  $f(x)$  die 2 naar rechts en 3 naar beneden is verschoven;
- De groene grafiek is  $h(x) = -2(0,25(x - 2)^2 - 3) = -0,5(x-2)^2 + 6$  met top (2, -6). Dit is de grafiek van  $g(x)$  die vermenigvuldigd is met -2 t.o.v. de x-as.

## 6.3 Rekenen met machten en wortels [1]



- Bij een **even** exponent  $n$  geldt:
- De functie  $x^n = p$  heeft twee oplossingen als  $p > 0$ :  $-\sqrt[n]{p}$  en  $\sqrt[n]{p}$
- De functie  $x^n = p$  heeft één oplossing als  $p = 0$ . De oplossing is gelijk aan 0.
- De functie  $x^n = p$  heeft geen oplossingen als  $p < 0$ ,

## 6.3 Rekenen met machten en wortels [1]



- Bij een **oneven** exponent  $n$  geldt:
- De functie  $x^n = p$  heeft altijd één oplossing:  $\sqrt[n]{p}$



## 6.3 Rekenen met machten en wortels [1]

### Voorbeeld 1:

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} \vee x = -\sqrt{9}$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

### Voorbeeld 2:

$$x^4 = -81$$

Geen oplossingen.

### Voorbeeld 3:

$$x^3 = 27$$

$$x = \sqrt[3]{27} = 3$$

### Voorbeeld 4:

$$x^3 = -27$$

$$x = \sqrt[3]{-27} = -3$$

**Let op:** Wortels die mooi uitkomen, moet je altijd herleiden.

## 6.3 Rekenen met machten en wortels [1]

### Voorbeeld 5:

Los de volgende vergelijking op en geef het antwoord in twee decimalen  
Nauwkeurig:

$$8x^6 + 20 = 92$$

[Alle losse getallen naar rechts]

$$8x^6 = 72$$

[Zorg dat er geen getal meer voor de x staat]

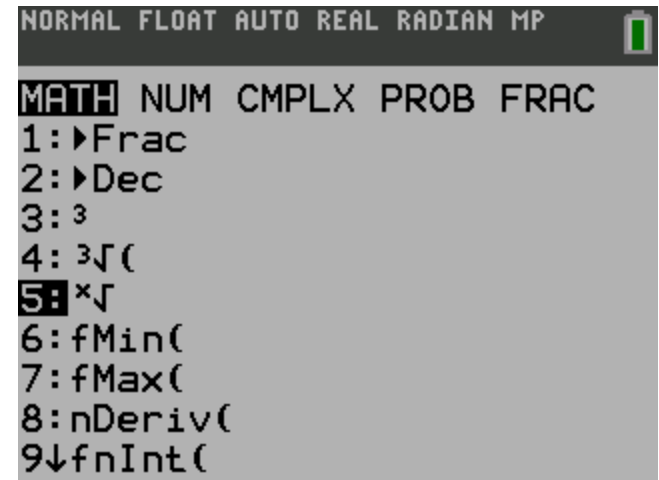
$$x^6 = 12$$

$$x = \sqrt[6]{12} \vee x = -\sqrt[6]{12}$$

$$x \approx 1,51 \vee x \approx -1,51$$

### Op de GR:

- Typ 6 in op je GR;
- MATH | 5:  $\sqrt[x]{\phantom{x}}$  | ENTER | 12 | ENTER



## 6.3 Rekenen met machten en wortels [2]

### Voorbeeld 1:

$$x^{1,60} = 9$$

$$\left(x^{1,60}\right)^{\frac{1}{1,60}} = 9^{\frac{1}{1,60}}$$

$$x = 9^{\frac{1}{1,60}} \approx 3,95$$

Links en rechts tot de macht  $\frac{1}{1,60}$

### Voorbeeld 2:

$$5x^{1,65} - 9 = 30$$

$$5x^{1,65} = 39$$

$$x^{1,65} = \frac{39}{5}$$

$$x = \left(\frac{39}{5}\right)^{\frac{1}{1,65}} \approx 3,47$$

Links en rechts tot de macht  $\frac{1}{1,65}$

**Let op:** Als de exponent een niet-geheel getal is, geef je enkel de positieve oplossing van x.

## 6.3 Rekenen met machten en wortels [3]

### **Voorbeeld:**

Los op:  $2\sqrt{3x-9} + 6 = 12$

$$2\sqrt{3x-9} + 6 = 12$$

$$2\sqrt{3x-9} = 6$$

$$\sqrt{3x-9} = 3$$

$$3x - 9 = 3^2$$

$$3x - 9 = 9$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

*o.k.*

### **Let op:**

- Neem pas het kwadraat als “links” enkel een wortel staat (Wortel vrijmaken);
- Controleer bij wortelvergelijkingen altijd de oplossing(en).

## 6.3 Rekenen met machten en wortels [4]

De volgende regel geldt:

Uit  $\sqrt{A} = B$  volgt  $A = B^2$  voor  $B \geq 0$ .

### **Voorbeeld 1:**

Maak  $x$  vrij bij:  $y = 2\sqrt{x-6}$

$$y = 2\sqrt{x-6}$$

$$2\sqrt{x-6} = y$$

$$4(x-6) = y^2$$

$$4x - 24 = y^2$$

$$4x = y^2 + 24$$

$$x = \frac{1}{4}y^2 + 6$$

Gebruik: Uit  $\sqrt{A} = B$  volgt  $A = B^2$

## 6.3 Rekenen met machten en wortels [4]

### Voorbeeld 2:

Maak  $x$  vrij bij  $K = 16(x - 2)^2$  met  $x \geq 2$ .

$$K = 16(x - 2)^2$$

$$16(x - 2)^2 = K$$

$$(x - 2)^2 = \frac{1}{16}K$$

$$x - 2 = \sqrt{\frac{1}{16}K}$$

$$x - 2 = \frac{1}{4}\sqrt{K}$$

$$x = 2 + \frac{1}{4}\sqrt{K}$$

$$x - 2 = -\sqrt{\frac{1}{4}K} \quad \text{kan niet, want } x \geq 2.$$

## 6.3 Rekenen met machten en wortels [4]

### Voorbeeld 3:

Schrijf  $y = 3x^{2,3}$  in de vorm  $x = ay^n$ .

$$3x^{2,3} = y$$

Delen door het getal voor  $x$ .

$$x^{2,3} = \frac{1}{3} y$$

$$x = \left(\frac{1}{3} y\right)^{\frac{1}{2,3}}$$

Gebruik:  $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2,3}} \left(y\right)^{\frac{1}{2,3}}$$

$$x = 0,62 y^{0,43}$$

Gebruik:  $(ab)^p = a^p b^p$  [4]

## 6.3 Rekenen met machten en wortels [4]

### **Voorbeeld 4:**

Schrijf  $y = 0,5 \cdot \sqrt[3]{x} - 7$  in de vorm  $x = \dots$

$$0,5 \cdot \sqrt[3]{x} - 7 = y$$

$$0,5 \cdot \sqrt[3]{x} = y + 7$$

$$\sqrt[3]{x} = 2y + 14$$

$$x = (2y + 14)^3$$

Losse getallen naar rechts

Delen door het getal voor de wortel

Links en rechts tot de macht 3 nemen.



## 6.4 Gebroken formules [1]

De formules  $y = \frac{1}{x}$  en  $y = 3 + \frac{5}{x-3}$  zijn **gebroken formules**.

Bij een gebroken formule staat de variabele in de noemer van de breuk.

### Voorbeeld 1:

$$\begin{aligned}\frac{5}{2x-1} &= \frac{3}{x} \\ 5 \cdot x &= 3 \cdot (2x-1) \\ 5x &= 6x-3 \\ -x &= -3 \\ x &= 3\end{aligned}$$

Hiernaast is een **gebroken vergelijking** opgelost.  
Dit oplossen kan door **kruislings vermenigvuldigen**.

**Algemeen:**  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  geeft  $AD = BC$

## 6.4 Gebroken formules [1]

### Voorbeeld 2:

$$\frac{5}{2x-1} = 3$$

$$\frac{5}{2x-1} = \frac{3}{1}$$

$$5 \cdot 1 = 3 \cdot (2x - 1)$$

$$5 = 6x - 3$$

$$-6x = -8$$

$$x = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$$

Met deze tussenstap kun je gebruik maken van kruislings vermenigvuldigen.

De regel  $\frac{A}{B} = C$  geeft  $A = BC$  kan ook gebruikt worden.

## 6.4 Gebroken formules [2]

Er zijn verschillende soorten breuken, die je tot één breuk kunt herleiden

$$1) \quad \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{D} + \frac{C}{D} \cdot \frac{B}{B} = \frac{AD + BC}{BD}$$

$$2) \quad A + \frac{B}{C} = A \cdot \frac{C}{C} + \frac{B}{C} = \frac{AC}{C} + \frac{B}{C} = \frac{AC + B}{C}$$

$$3) \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$4) \quad A \cdot \frac{B}{C} = \frac{AB}{C}$$

$$5) \quad \frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)} = A \cdot \frac{C}{B} = \frac{AC}{B}$$

Want delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde.

## 6.4 Gebroken formules [2]

### **Voorbeeld 1:**

Vereenvoudig

$$\frac{3}{x} \left( 2 - \frac{5}{x} \right) = \frac{6}{x} - \frac{15}{x^2} = \frac{6x}{x^2} - \frac{15}{x^2} = \frac{6x - 15}{x^2}$$

### **Voorbeeld 2:**

Schrijf zonder breuk in de noemer

$$y = \frac{4x}{\left( \frac{x+1}{x-1} \right)} = 4x \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{4x(x-1)}{x+1} \wedge x \neq 1$$

## 6.4 Gebroken formules [2]

### Voorbeeld 3:

Schrijf zonder breuk in de noemer

$$T = \frac{600a}{5b + \frac{a^2}{3b}} = \frac{600a \cdot 3b}{\left(5b + \frac{a^2}{3b}\right) \cdot 3b} = \frac{1800ab}{15b^2 + \frac{a^2}{3b} \cdot 3b} = \frac{1800ab}{15b + a^2} \quad \text{en } b \neq 0$$

## 6.4 Gebroken formules [3]

Bij breuken geldt de volgende regel:

$$\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{1} \Leftrightarrow A = BC \Leftrightarrow \frac{A}{C} = B$$

Je mag  $B$  en  $C$  dus verwisselen. (**Wisseleigenschap**)

### Voorbeeld 1:

Schrijf als functie van  $A$

$$A = 6 + \frac{500}{B+5}$$

$$A - 6 = \frac{500}{B+5}$$

$$B + 5 = \frac{500}{A - 6}$$

$$B = \frac{500}{A - 6} - 5$$

## 6.4 Gebroken formules [3]

### Voorbeeld 2:

Schrijf als functie van  $A$

$$A = \frac{B+6}{B-5}$$

Kruislings vermenigvuldigen

$$B+6 = A(B-5)$$

$$B+6 = AB-5A$$

$$B-AB = -6-5A$$

$$B(1-A) = -6-5A$$

$$B = \frac{-6-5A}{1-A}$$

# 6.5 Formules met machten [1]

## Definitie:

$P$  en  $Q$  zijn **evenredig** als er een getal  $a$  (**coëfficiënt**) bestaat zodanig dat  $P = aQ$

$y$  en  $x^n$  zijn dus **evenredig** als er een getal  $a$  bestaat zodanig dat  $y = ax^n$

## Voorbeeld:

De grafiek  $y = ax^{0,87}$  gaat door het punt  $P(20, 150)$

Bereken  $a$  in twee decimalen nauwkeurig:

$$y = ax^{0,87}$$

$$150 = a \cdot 20^{0,87}$$

$$150 = a \cdot 13,54...$$

$$a = \frac{150}{13,54...} \approx 11,07$$