

Voorkennis

Rekenregels voor wortels:

$$1) \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB} \quad \text{met } A \geq 0 \text{ en } B \geq 0$$

$$2) \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad \text{met } A \geq 0 \text{ en } B \geq 0$$

Voorbeeld 1:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

Voorbeeld 2:

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3}$$

Voorkennis

Voorbeeld 3:

$$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

Let op:

In de noemer mag geen wortelteken staan.

Voorbeeld 4:

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} = \text{k.n.}$$

Voorbeeld 5:

$$\sqrt{3} + \sqrt{27} = \sqrt{3} + \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Let op:

Probeer zoveel mogelijk buiten het wortelteken te halen.

Voorkennis

Herhaling merkwaardige producten:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Voorbeeld 1:

$$(5\sqrt{3} - \sqrt{6})^2 =$$

$$(5\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2 =$$

$$25 \cdot 3 - 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} + 6 =$$

$$75 - 10\sqrt{18} + 6 =$$

$$81 - 10\sqrt{9 \cdot 2} =$$

$$81 - 10 \cdot 3 \cdot 2 =$$

$$81 - 30\sqrt{2}$$

Voorkennis

Voorbeeld 2:

$$(3\sqrt{4} - \sqrt{7})(3\sqrt{4} + \sqrt{7}) =$$

$$(3\sqrt{4})^2 - (\sqrt{7})^2 =$$

$$9 \cdot 4 - 7 =$$

$$36 - 7 = 29$$

Voorbeeld 3:

$$(a\sqrt{6} - a)^2 =$$

$$a^2 \cdot 6 - 2a\sqrt{6} \cdot a + a^2 =$$

$$6a^2 - 2a^2\sqrt{6} + a^2 =$$

$$7a^2 - 2a^2\sqrt{6}$$

Voorkennis

Voorbeeld 4:

$$\frac{5}{7 - \sqrt{10}} =$$

$$\frac{5}{7 - \sqrt{10}} \cdot \frac{7 + \sqrt{10}}{7 + \sqrt{10}} =$$

$$\frac{35 + 5\sqrt{10}}{49 - 10} =$$

$$\frac{35 + 5\sqrt{10}}{39} =$$

$$\frac{35}{39} + \frac{5}{39}\sqrt{10}$$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 141/142):

Doel:

Je kunt met behulp van SOSCASTOA bij een rechthoekige driehoek

- ✓ de lengte van een zijde berekenen als de lengtes van de andere twee zijden van deze driehoek bekend zijn;
- ✓ het bovenstaande ook doen in een figuur die uit meerdere rechthoekige driehoek bestaat.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 2, 3, 4, 6, 7

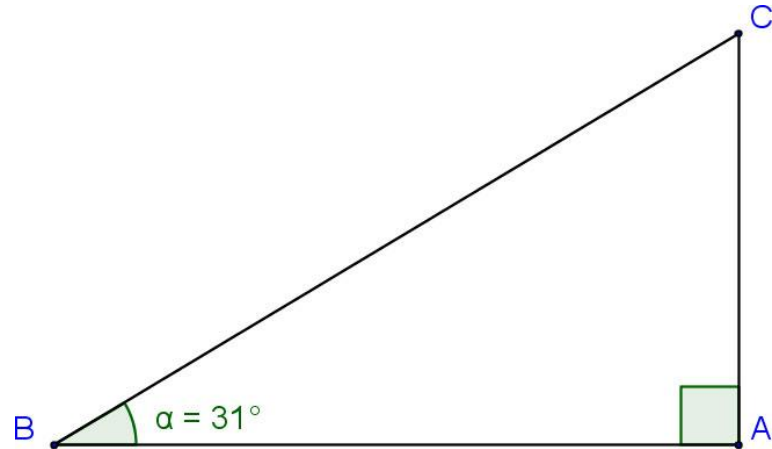
Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 141/142):

Voorbeeld 1:

Gegeven is de rechthoekige $\triangle ABC$
met $\angle B = 31^\circ$ en $AB = 10$ cm.

Bereken AC .

$$\tan(\angle B) = \frac{\text{overstaande rechthoekzijde}}{\text{aanliggende rechthoekzijde}} = \frac{AC}{AB}$$



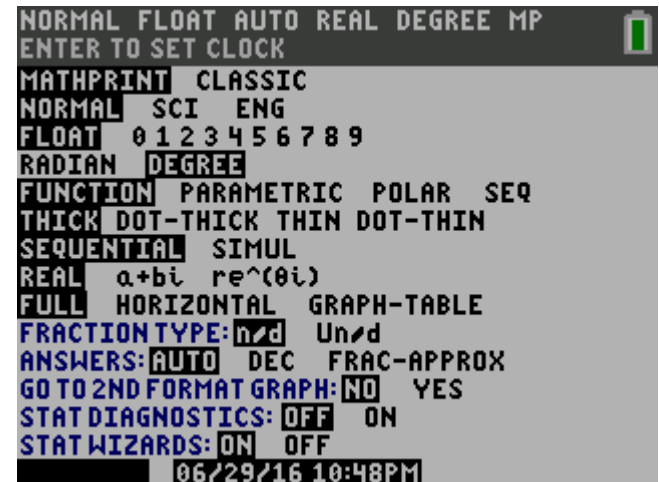
$$\tan(31^\circ) = \frac{AC}{10}$$

$$AC = 10 \cdot \tan(31^\circ) \approx 6,0 \text{ cm.}$$

Let op:

Stel je GR in op graden bij deze goniometrische berekeningen.

MODE en dan **DEGREE** i.p.v. **RADIAN** kiezen.



Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 141/142):

Voorbeeld 2:

Gegeven is $\triangle PQR$ met $\angle P = 22^\circ$, $\angle Q = 90^\circ$ en $PR = 4$.

Bereken RQ .

Maak voordat je gaat rekenen een schets van $\triangle PQR$.

Merk op dat RQ de overstaande rechthoekzijde is t.o.v. $\angle P$.

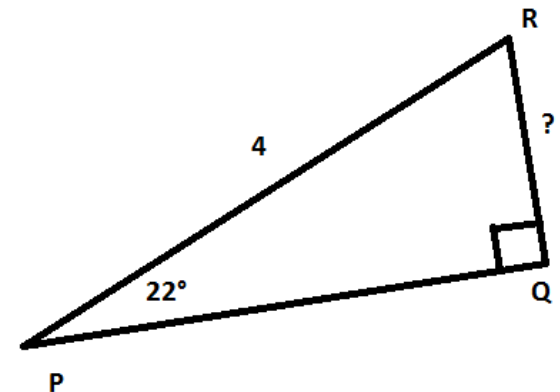
Merk op dat PR de schuine zijde is t.o.v. $\angle P$.

$$\sin(\angle P) = \frac{\text{overstaande rechthoekzijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{RQ}{PR}$$

$$\sin(22^\circ) = \frac{RQ}{4}$$

$$RQ = 4 \cdot \sin(22^\circ)$$

$$RQ \approx 1,5$$



Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 141/142):

Voorbeeld 3:

Gegeven is de $\triangle ABC$ met $\angle B = 25^\circ$, $\angle A = 90^\circ$ en $AB = 3$.

Bereken BC .

Maak voordat je gaat rekenen een schets van $\triangle ABC$.

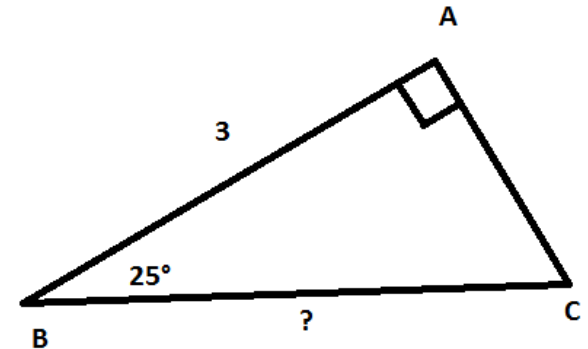
Merk op dat AB de aanliggende rechthoekzijde is t.o.v. $\angle B$.

Merk op dat BC de schuine zijde is t.o.v. $\angle B$.

$$\cos(\angle B) = \frac{\text{aanliggende rechthoekzijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin(25^\circ) = \frac{3}{BC}$$

$$BC = \frac{3}{\sin(25^\circ)} \approx 3,3$$



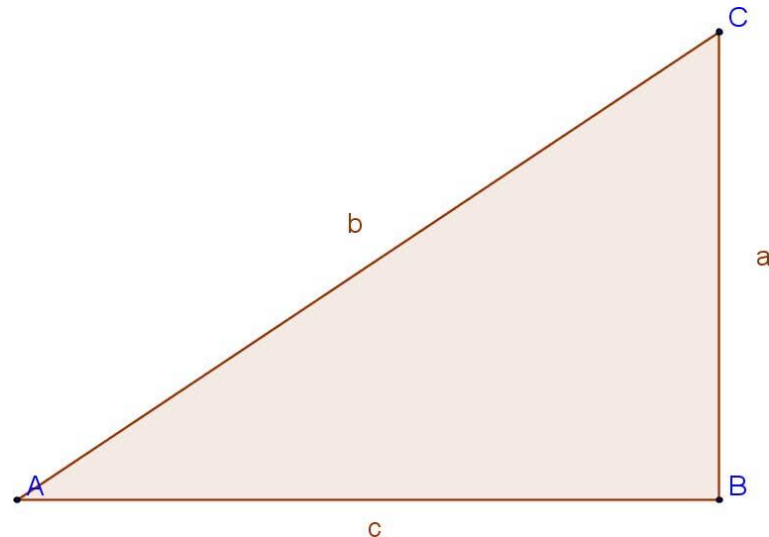
Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 141/142):

Samenvatting:

$$\sin \angle A = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos \angle A = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{c}{b}$$

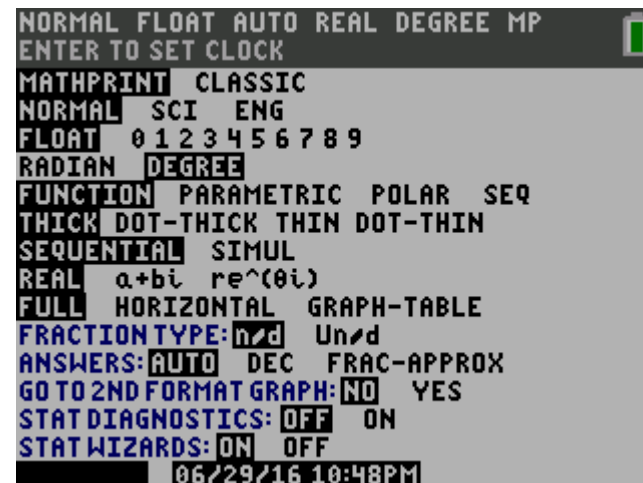
$$\tan \angle A = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{a}{c}$$



Let op:

Stel je GR in op graden bij deze goniometrische berekeningen.

MODE en dan **DEGREE** i.p.v. **RADIAN** kiezen.



Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 141/142):

Voorbeeld 4:

Gegeven is een rechthoekige $\triangle ABC$ met $AB = 6$ en $\angle A = 39^\circ$.

Bereken AC en BC

AC = schuine zijde

BC = overstaande rechthoekzijde

AB = aanliggende rechthoekzijde = 6

$$\tan \angle A = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan 39^\circ = \frac{BC}{6}$$

$$\frac{1}{6} BC = 0,809\dots$$

$$BC \approx 4,86$$

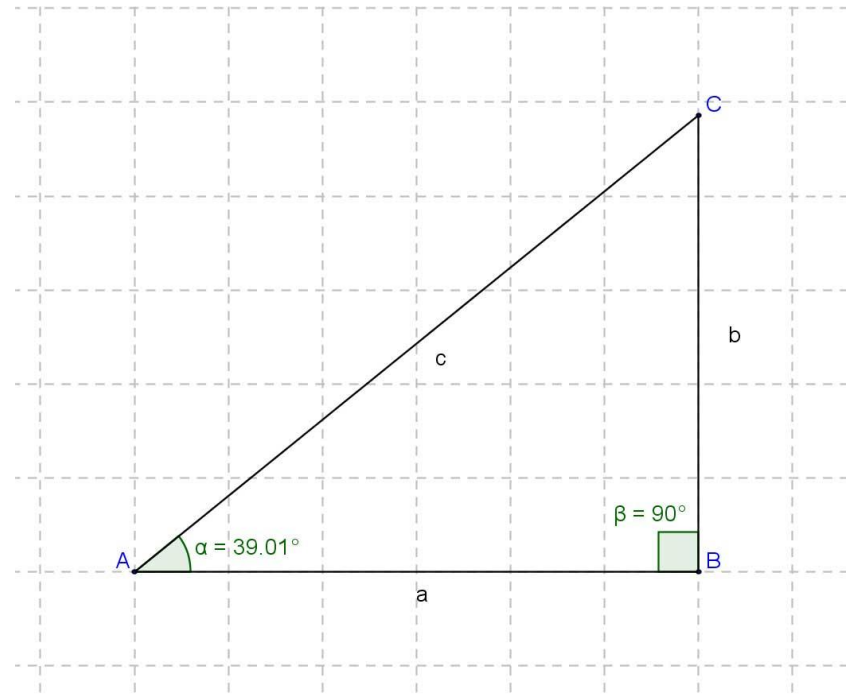
$$\cos \angle A = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos 39^\circ = \frac{6}{AC}$$

$$\cos 39^\circ \cdot AC = 6$$

$$0,77\dots AC = 6$$

$$AC \approx 7,72$$

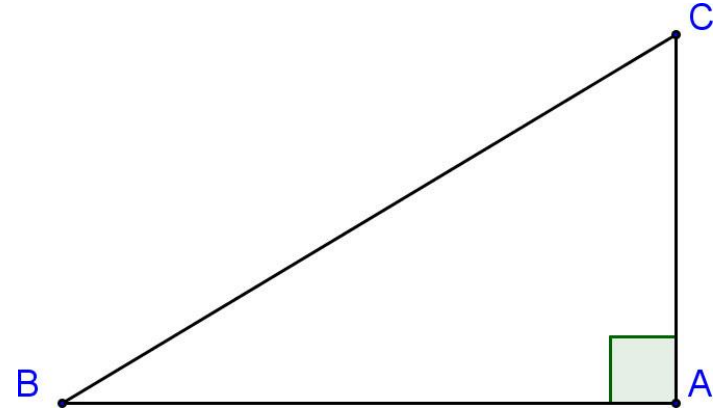


Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 141/142):

Voorbeeld 5:

Gegeven is de rechthoekige $\triangle ABC$
met $AC = 6$ cm en $BC = 11,66$ cm.

Bereken $\angle B$.



$$\sin(\angle B) = \frac{\text{overstaande rechthoekzijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{11,66}$$

Met de inverse sinus ($\sin^{-1}$) kun je nu $\angle B$ uitrekenen.

$$\sin\left(\frac{6}{11,66}\right)^{-1} \approx 31,0^\circ$$

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 144/145):

Doel:

Met behulp van de onderstaande zaken, kun je van bepaalde driehoeken de lengte van een zijde berekenen, als een aantal lengtes van zijden of lijnstukken bekend is;

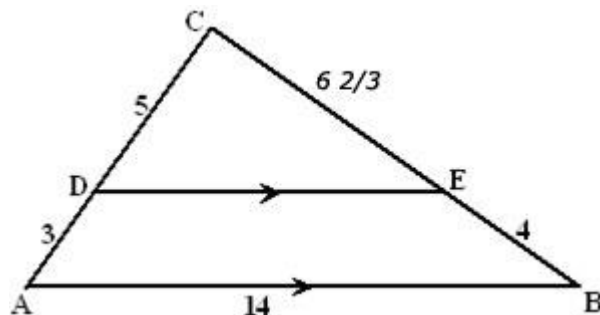
- ✓ Je kunt toelichten wanneer twee driehoeken gelijkvormig zijn;
- ✓ Bij gelijkvormigheid kun je met behulp van een verhoudingstabel de lengtes van overeenkomstige zijden uitrekenen;
- ✓ Je weet wat F- en Z-hoeken zijn.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 9 t/m 15

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 144/145):



Voorbeeld 1:

De zijden AB en DE zijn evenwijdig.
Bereken DE .

Stap 1:

Laat zien dat de twee driehoeken in de figuur gelijkvormig zijn.

$\triangle ABC$ heeft drie hoeken: $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C$.

$\triangle DEC$ heeft drie hoeken: $\angle D$, $\angle E$ en $\angle C$.

$$\angle B = \angle E \text{ (F-hoeken)}$$

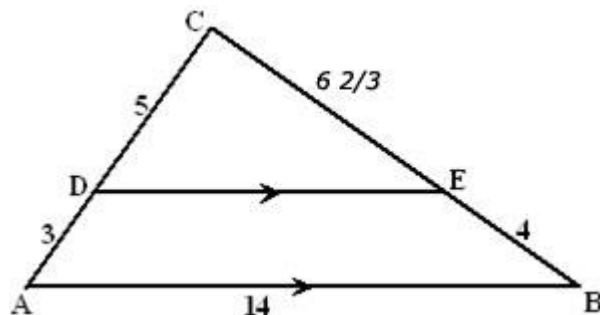
$$\angle A = \angle D \text{ (F-hoeken)}$$

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze **twee paar gelijke hoeken** hebben.

Er geldt nu: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

[Let op de juiste volgorde van de letters]

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 144/145):



Voorbeeld 1:

De zijden AB en DE zijn evenwijdig.
Bereken DE .

Stap 2:

Maak een algemene verhoudingstabel:

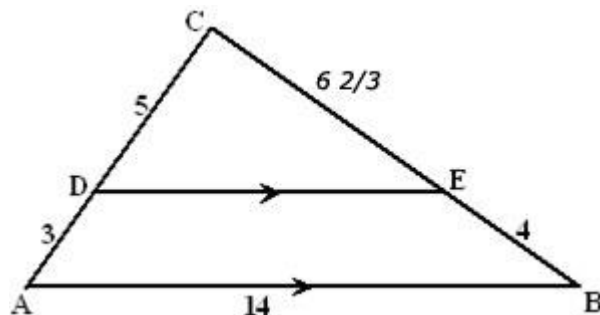
$\triangle ABC$	AB	BC	AC
$\triangle DEC$	DE	EC	DC

Stap 3:

Maak een verhoudingstabel met de bekende waarden:

14	$10\frac{2}{3}$	8 (3+5)
DE	$6\frac{2}{3}$	5

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 144/145):



Voorbeeld 1:

De zijden AB en DE zijn evenwijdig.
Bereken DE .

Stap 4:

Bereken DE :

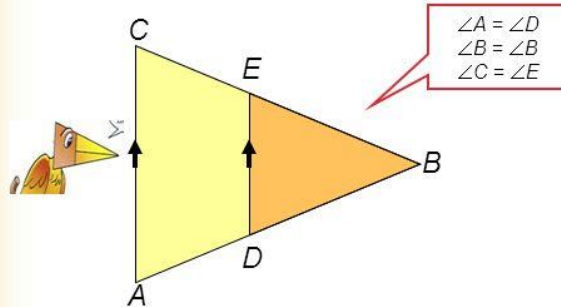
$$DE = \frac{14 \cdot 5}{8} = \frac{70}{8} = 8\frac{3}{4}$$

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 144/145):

Herhaling gelijkvormigheid

snavelfiguur

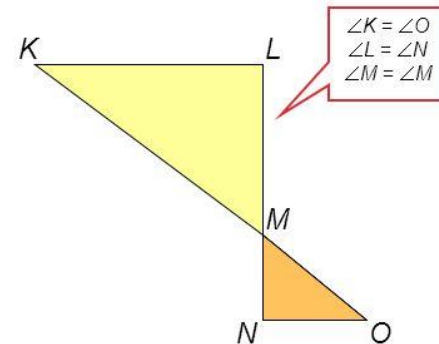
$$\triangle ABC \sim \triangle DBE$$



AB	BC	AC
DB	BE	DE

zandloperfiguur

$$\triangle KLM \sim \triangle ONM$$



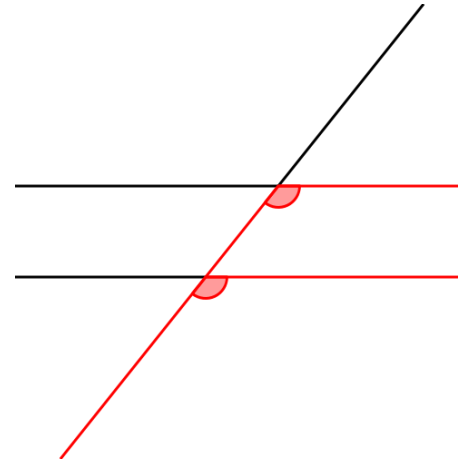
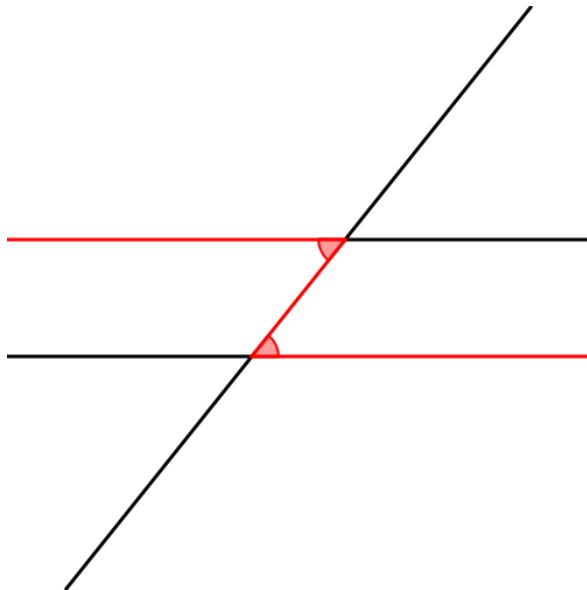
KL	LM	KM
ON	NM	OM

10.1

In de **snavelfiguur** zitten F-hoeken.
In de **zandloperfiguur** zitten Z-hoeken.

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 144/145):

Twee evenwijdige lijnen worden gesneden door een derde lijn.
De twee rode hoeken (**F-hoeken**) zijn gelijk.



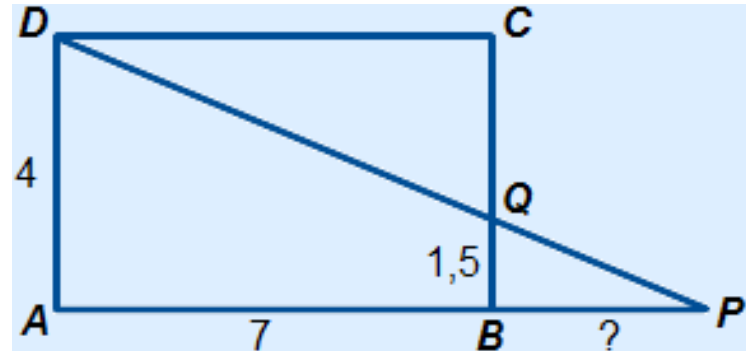
Twee evenwijdige lijnen worden gesneden door een derde lijn. De twee rode hoeken (**Z-hoeken**) zijn gelijk.

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 144/145):

Voorbeeld 2:

Gegeven is de rechthoek $ABCD$.
Bereken BP .

$\angle BPQ = \angle QDC$ (Z- hoeken)
 $\angle BQP = \angle DQC$ (overstaande hoeken)
Hieruit volgt: $\triangle BPQ \sim \triangle CDQ$



BP	BQ	x	1,5
AP	AD	$x+7$	4

We noemen het stuk BP nu x . Nu is met behulp van de gelijkvormigheid BP te berekenen.

Kruislings vermenigvuldigen geeft:

$$x \cdot 4 = 1,5 \cdot (x + 7)$$

$$4x = 1,5x + 10,5$$

$$2,5x = 10,5$$

$$x = 4,2$$

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 147/148):

Doel:

Je kunt de volgende stellingen/definities toepassen om in een figuur met rechthoekige driehoeken lengtes van lijnstukken uit te rekenen:

- ✓ (omgekeerde) stelling van Thales;
- ✓ Definitie van raaklijn aan cirkel;
- ✓ Stelling raaklijn aan cirkel;
- ✓ Definitie van afstand punt tot lijn;
- ✓ Stelling raaklijn in gemeenschappelijk raakpunt;
- ✓ Stelling afstand punt tot raakpunten.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 17 t/m 23

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 147/148):

Definitie = Een afspraak, die dus niet bewezen hoeft te worden.

Voorbeeld definitie:

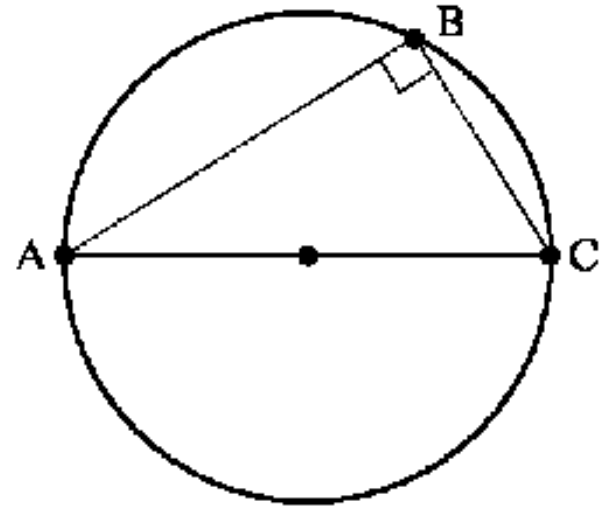
- Een gelijkbenige driehoek is een driehoek met twee gelijke zijden;
- Een gestrekte hoek is een hoek van 180 graden.
- Een parallellogram is een vierhoek waarvan beide paren overstaande zijden evenwijdig zijn;
- Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden.

Stelling = Een eigenschap, die bewezen moet worden. Voor het bewijs kun je alle bekende definities en eerder bewezen stellingen gebruiken.

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 147/148):

Stelling van Thales:

Als $\triangle ABC$ rechthoekig is in B ,
dan ligt B op de cirkel met middellijn AC .



Omgekeerde stelling van Thales:

Als van $\triangle ABC$ de zijde AC middellijn
van een cirkel is en punt B op die cirkel ligt,
dan is de $\triangle$ rechthoekig in C .

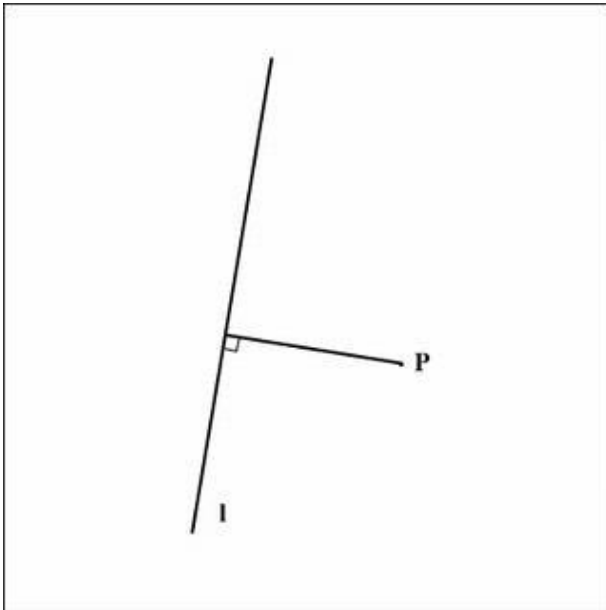
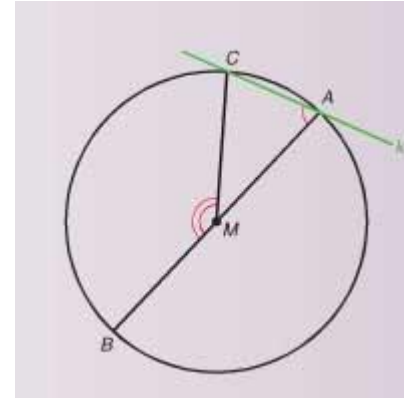
Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 147/148):

Definitie van raaklijn aan cirkel:

Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die precies één punt gemeenschappelijk heeft met de cirkel.

Stelling van raaklijn aan cirkel:

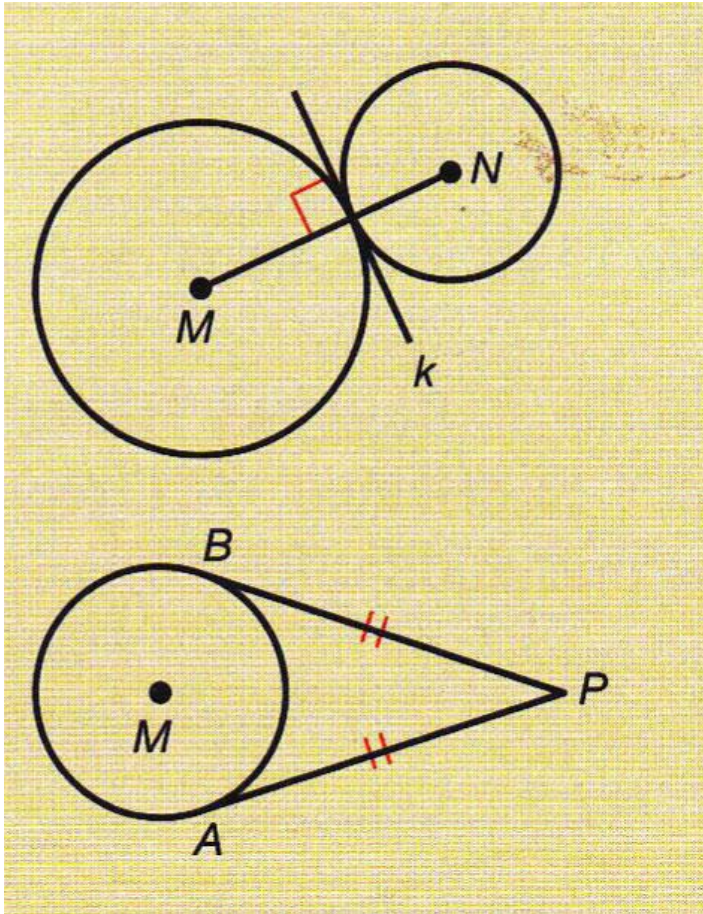
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.



Definitie van afstand punt tot lijn:

De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van het loodlijnstuk neergelaten vanuit dat punt op die lijn.

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 147/148):



Stelling raaklijn in gemeenschappelijk raakpunt:

De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.

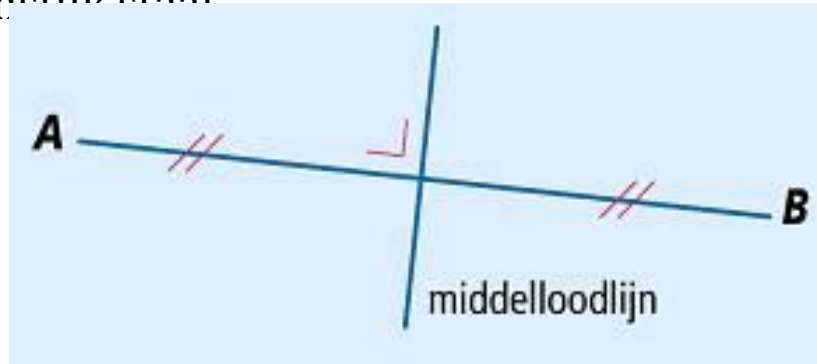
Stelling afstand punt tot raakpunten:

Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 147/148):

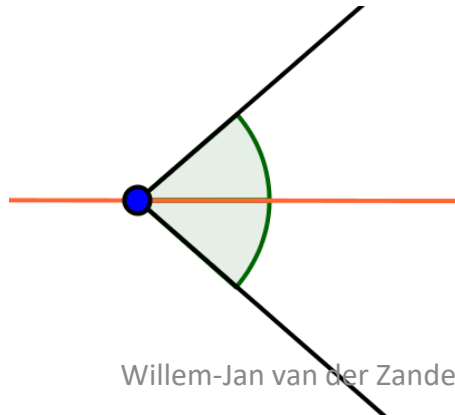
Definitie middelloodlijn:

De middelloodlijn van een lijnstuk is de lijn door het midden van dat lijnstuk die loodrecht op dat lijnstuk staat.



Definitie bissectrice:

De bissectrice van een hoek is de lijn die de hoek middendoor deelt.



Leerdoel 4 (Theorie A – pagina 152):

Doel:

Je kunt met behulp van de sinusregel in een scherpe driehoek een onbekende hoek of zijde uitrekenen als voldoende informatie is gegeven.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 25 t/m 27

Leerdoel 4 (Theorie A – pagina 152):

Sinusregel:

In elke $\triangle ABC$ geldt de sinusregel:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Voorbeeld:

Gegeven is $\triangle ABC$ met $c = 12$, $\alpha = 54^\circ$ en $\beta = 62^\circ$

Bereken a in twee decimalen nauwkeurig.

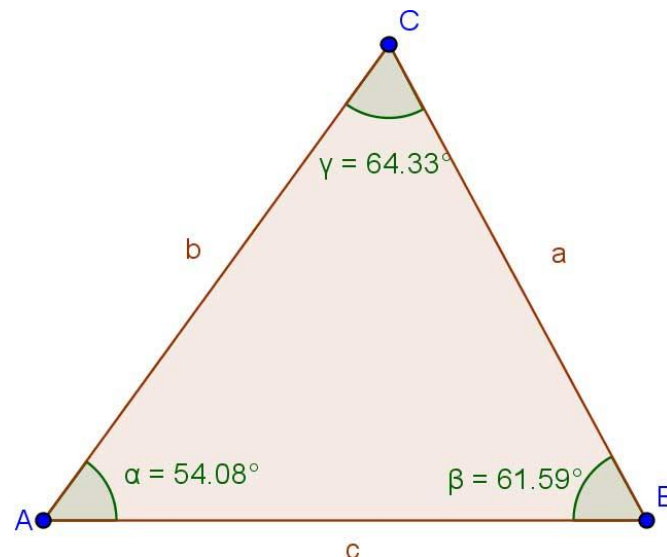
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{\sin 54^\circ} = \frac{12}{\sin 64^\circ}$$

$$a \cdot \sin 64^\circ = 12 \cdot \sin 54^\circ$$

$$a = \frac{12 \cdot \sin 54^\circ}{\sin 64^\circ}$$

$$a \approx 10,80$$



Reken pas in de laatste stap de sinussen uit.
Dit voorkomt tussentijds afronden.

Leerdoel 5 (Theorie B – pagina 153):

Doel:

Je kunt met behulp van de sinusregel in een scherpe of stomphoekige driehoek een onbekende hoek of zijde uitrekenen als voldoende informatie is gegeven.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 29 t/m 35

Leerdoel 6 (Theorie C – pagina 156/157):

Doel:

Je kunt met behulp van de cosinusregel in een driehoek een onbekende hoek of zijde uitrekenen als voldoende informatie is gegeven.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 37, 38, 41 t/m 43

Leerdoel 6 (Theorie C – pagina 156/157):

Voorbeeld 1:

Bereken $\sin 50^\circ$ en $\sin 130^\circ$

$\sin 50^\circ = \sin 130^\circ = 0,5$. $\sin \angle = 0,5$ heeft twee oplossingen. Neem dus de juiste (kijk of de driehoek stomphoekig of scherphoekig is).

Er geldt steeds:

Als $\angle A + \angle B = 180^\circ$ dan $\sin \angle A = \sin \angle B$.

Cosinusregel:

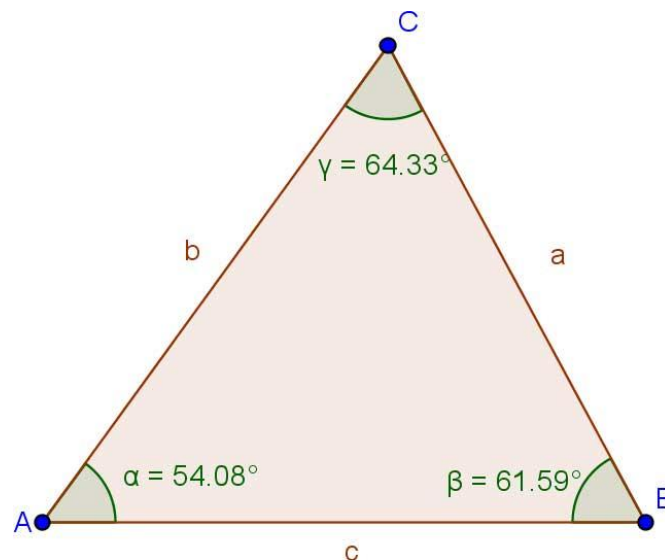
In elke $\triangle ABC$ geldt de cosinusregel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Met behulp van de cosinusregel is het dus mogelijk de grootte van de hoeken van een driehoek uit te rekenen als je alleen de lengtes van de zijden weet.

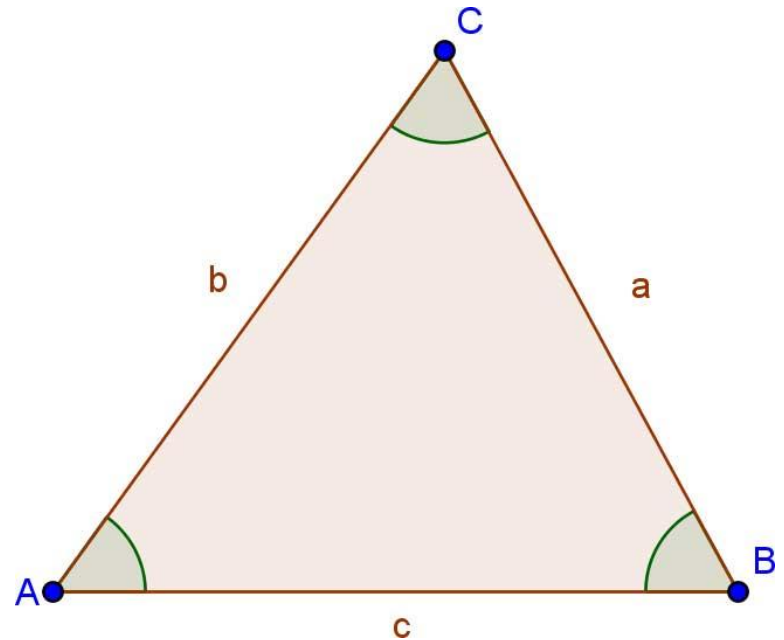


Leerdoel 6 (Theorie C – pagina 156/157):

Voorbeeld 2:

Gegeven is $\triangle ABC$ met $a = 4,46$
 $b = 4,84$ en $c = 4,96$. Bereken $\angle A$ in graden
nauwkeurig.

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\4,46^2 &= 4,84^2 + 4,96^2 - 2 \cdot 4,84 \cdot 4,96 \cos \alpha \\19,8916 &= 48,0272 - 48,0128 \cos \alpha \\48,0128 \cos \alpha &= 28,1356 \\\cos \alpha &= 0,586... \\\alpha &\approx 54^\circ\end{aligned}$$



Grafische Rekenmachine:

Op de GR bereken je $\cos \alpha = 0,586...$ met:
2ND | COS | COS⁻¹

Let op:

Bij iedere waarde van de cosinus van de hoek hoort precies één hoek
(dit in tegenstelling tot de sinus)

Leerdoel 7 (Theorie A – pagina 160):

Doel:

Je kunt de oppervlakte berekenen van een vlakdeel van:

- ✓ een driehoek;
- ✓ een parallellogram;
- ✓ een trapezium;
- ✓ een cirkel;
- ✓ een combinatie van de hierboven genoemde vlakke figuren.

Uitleg theorie

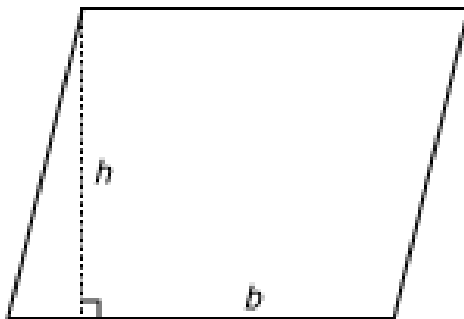
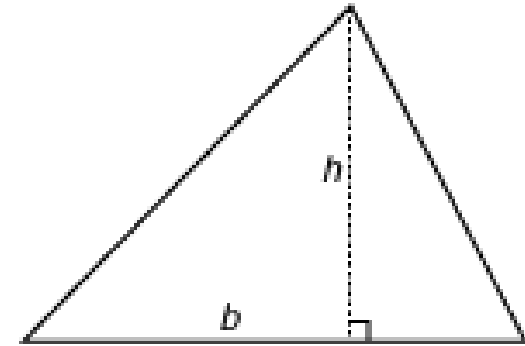
Oefenen met:

Opgave 46 t/m 52, 54, 55

Leerdoel 7 (Theorie A – pagina 160):

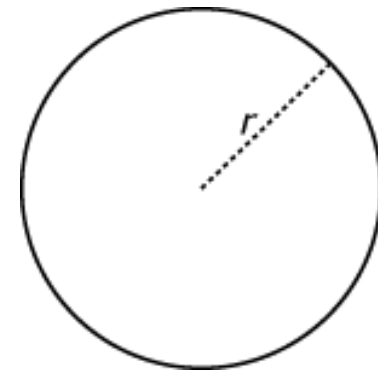
Herhaling:

Oppervlakte driehoek = $\frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte}$



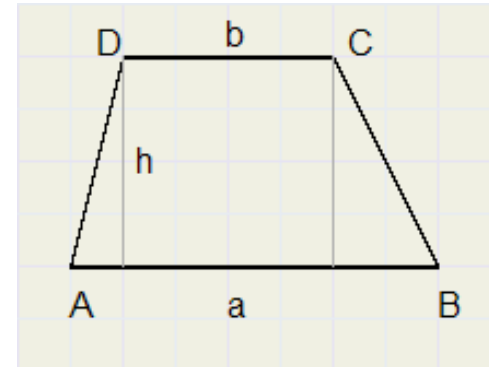
Oppervlakte parallellogram = $\text{basis} \cdot \text{hoogte}$

Oppervlakte cirkel = $\pi \cdot \text{straal}^2$



Leerdoel 7 (Theorie A – pagina 160):

Oppervlakte trapezium = $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot \text{hoogte}$



Voorbeeld:

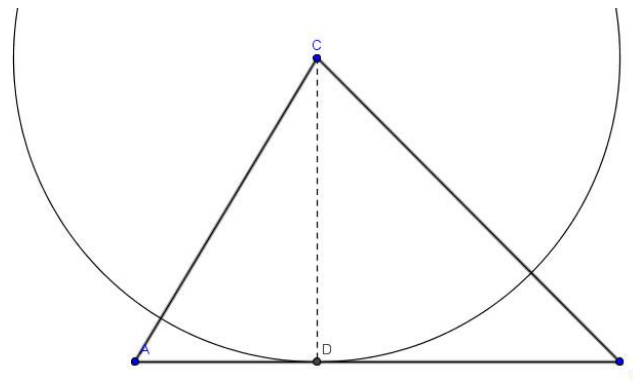
Gegeven is $\triangle ABC$ met $AC = 5,8$, $\angle A = 59^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$.

De cirkel met middelpunt C raakt zijde AB in D .

Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van het gebied dat binnen de cirkel en binnen de driehoek ligt.

Stap 1:

Maak een schets.



Leerdoel 7 (Theorie A – pagina 160):

Voorbeeld:

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AC = 5,8$, $\angle A = 59^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$.

De cirkel met middelpunt C raakt zijde AB in D .

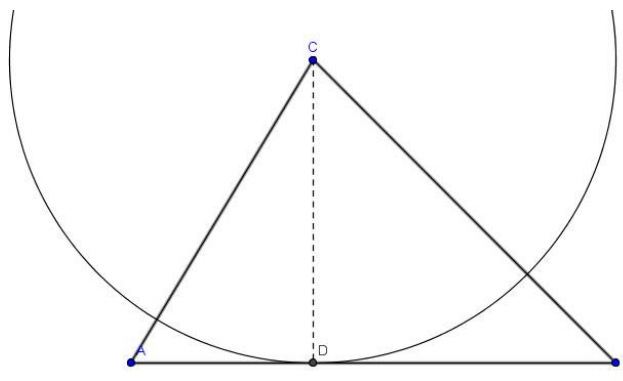
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van het gebied dat binnen de cirkel en binnen de driehoek ligt.

Stap 2:

Bereken de lengte van de straal CD van de cirkel.

In $\triangle ACD$ is $\sin(59^\circ) = \frac{CD}{5,8}$, dus

$$CD = 5,8 \cdot \sin(59^\circ) = 4,97...$$



Leerdoel 7 (Theorie A – pagina 160):

Voorbeeld:

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AC = 5,8$, $\angle A = 59^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$.

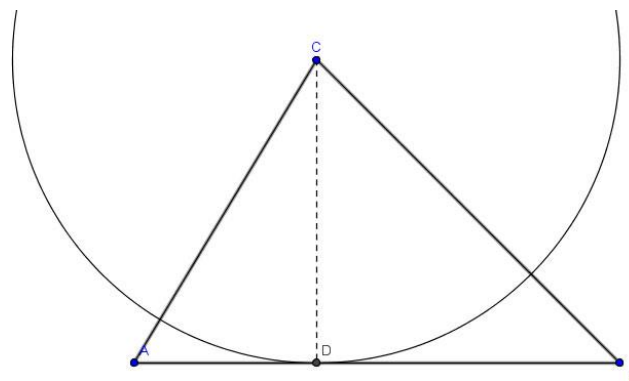
De cirkel met middelpunt C raakt zijde AB in D .

Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van het gebied dat binnen de cirkel en binnen de driehoek ligt.

Stap 3:

Bereken de grootte van $\angle C$.

$$\begin{aligned}\angle C &= 180^\circ - \angle A - \angle B \text{ (}\angle\text{-som } \triangle ABC\text{)} \\ &= 180^\circ - 59^\circ - 45^\circ \\ &= 76^\circ\end{aligned}$$



Stap 4:

Bereken de oppervlakte van het gevraagde gebied.

$$\begin{aligned}\text{Opp.} &= \text{gedeelte cirkel in driehoek} \cdot \pi \cdot r^2 \\ &= \frac{76}{360} \cdot \pi \cdot 4,97...^2 \approx 16,38\end{aligned}$$

Leerdoel 8 (Theorie B – pagina 163/164):

Doel:

Je kunt de oppervlakte van een driehoek berekenen door gebruik te maken van goniometrische verhoudingen

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 56 t/m 60

Leerdoel 8 (Theorie B – pagina 163/164):

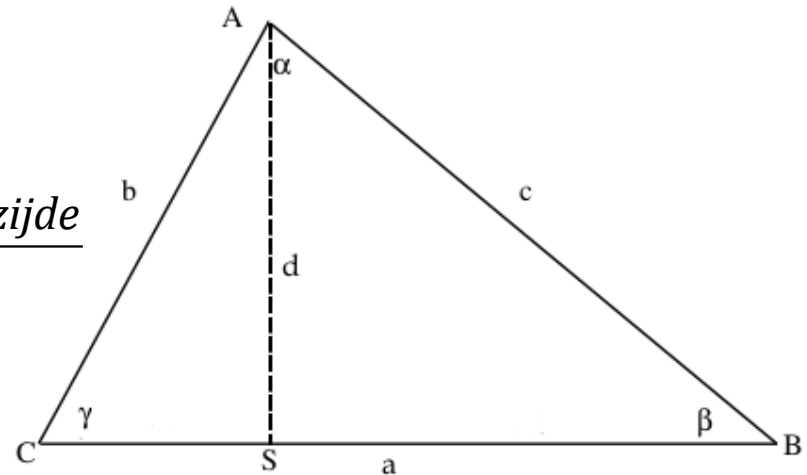
Hiernaast is $\triangle ABC$ met hoogtelijn AS
Getekend.

$$\text{Opp}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AS$$

$$\text{Er geldt ook: } \sin(\angle C) = \frac{\text{overstaande rechthoekzijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$= \frac{AS}{AC}$$

$$\text{dus } AS = AC \cdot \sin(\angle C)$$



$$\text{Hieruit volgt: } \text{Opp}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AS = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin(\angle C)$$

Let op:

Deze formule is afhankelijk van de naamgeving van de hoekpunten van de driehoek!!!
Je hebt nu dus niet de lengte van hoogtelijn AS nodig om de oppervlakte van de driehoek te berekenen.

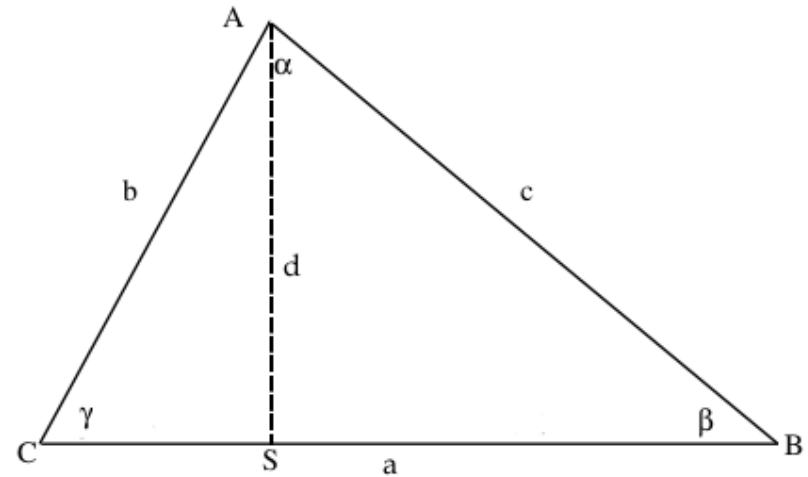
Leerdoel 8 (Theorie B – pagina 163/164):

Voorbeeld:

In $\triangle ABC$ geldt $AC = 7$, $AB = 9$ en $\angle BAC = 76^\circ$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig
de oppervlakte van deze driehoek.

Berekening:

$$\begin{aligned} O(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin(\angle BAC) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \sin(76^\circ) \approx 30,6^\circ \end{aligned}$$



Leerdoel 9 (Theorie C – pagina 166):

Doel:

Je kunt de oppervlakte van een driehoek berekenen door gebruik te maken van de zijde x hoogte methode.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 62 t/m 66

Leerdoel 9 (Theorie C – pagina 166):

Voorbeeld:

Gegeven is de $\triangle ABC$ met
 $AC = 6$, $AB = 8$ en de rechte hoek A .

De oppervlakte van deze driehoek
kan op twee manieren berekend worden:

$$\text{Opp}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \quad (1)$$

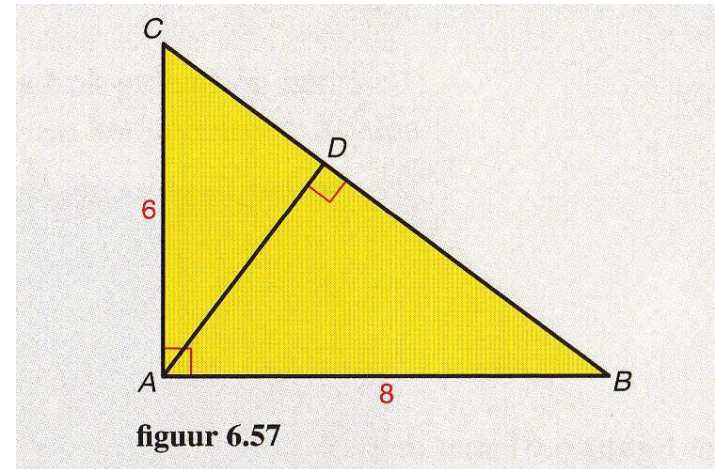
$$= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AD$$

Met deze **zijde x hoogte - methode** is het mogelijk om de lengte van lijnstuk AD te berekenen.



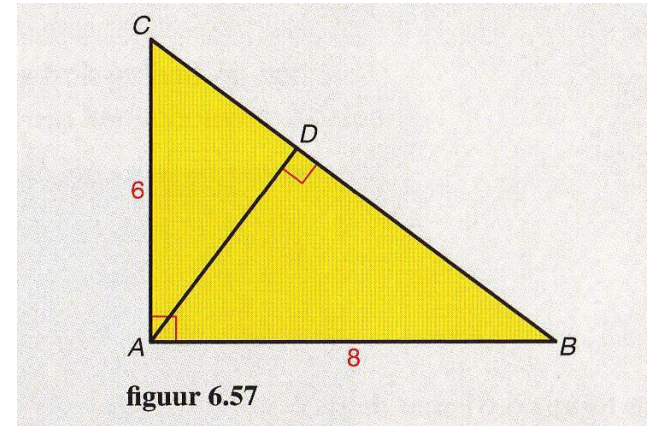
Leerdoel 9 (Theorie C – pagina 166):

Voorbeeld:

Gegeven is de $\triangle ABC$ met
 $AC = 6$, $AB = 8$ en de rechte hoek A .

Bereken de lengte van AD .

$$AB \cdot AC = BC \cdot AD \Leftrightarrow 8 \cdot 6 = BC \cdot AD$$



Met behulp van de stelling van Pythagoras kun je BC berekenen:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \quad \Rightarrow BC = 10.$$

$$8 \cdot 6 = 10 \cdot AD \Leftrightarrow 10 \cdot AD = 48 \Leftrightarrow AD = 4,8$$

Let op:

Krijg je een antwoord met een wortel in de noemer van de breuk, dan met je het Antwoord herschrijven zodat de wortel uit de noemer verdwijnt.

$$x = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

Leerdoel 10 (Theorie A – pagina 169/170):

Doel:

Je kunt de volgende bijzondere driehoeken herkennen en deze bij berekeningen met driehoeken toepassen:

- ✓ Gelijkbenige rechthoekige driehoek met verhouding $1 : 1 : \sqrt{2}$ van de zijden;
- ✓ Rechthoekige driehoek met verhouding $1 : 2 : \sqrt{3}$ van de zijden.

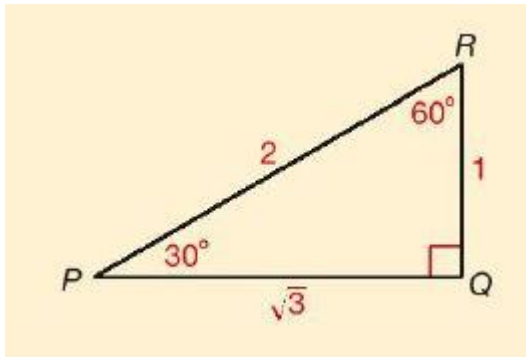
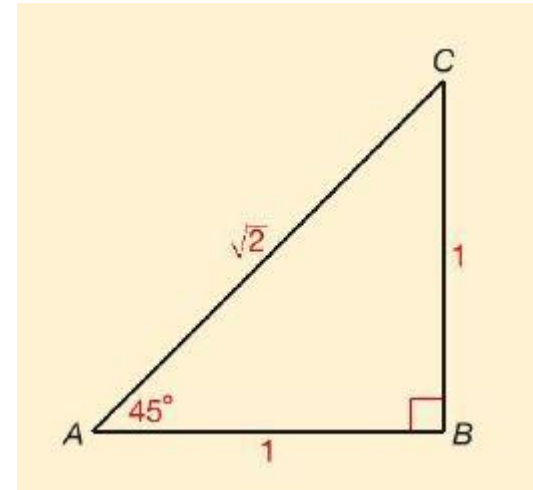
Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 68 t/m 70

Leerdoel 10 (Theorie A – pagina 169/170):

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.



De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.

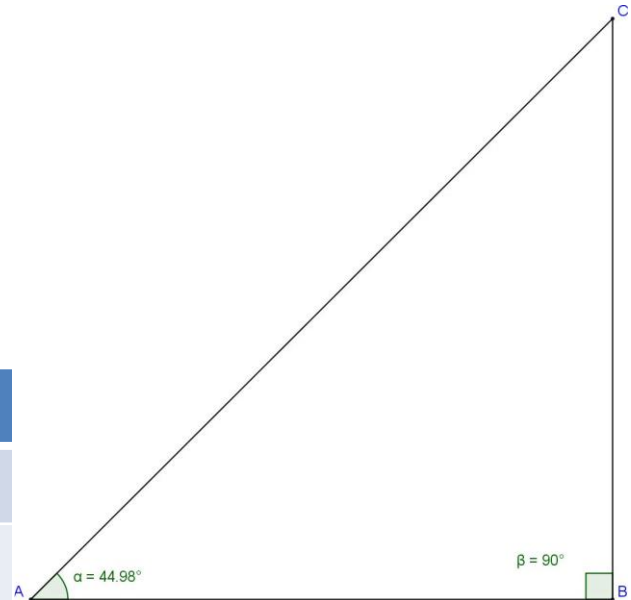
Leerdoel 10 (Theorie A – pagina 169/170):

Voorbeeld 1:

Gegeven is een rechthoekige $\triangle ABC$
met $AC = 12$ en $\angle A = 45^\circ$. Bereken exact AB

Er geldt nu:

AB	BC	AC
1	1	$\sqrt{2}$
x	y	12



Met behulp van deze verhoudingstabel kun je AB berekenen:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{12}$$

$$x \cdot \sqrt{2} = 1 \cdot 12$$

$$x = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

Let op:

Als er in de noemer **enkel** een wortelteken komt te staan, moet je dit wegwerken.

Leerdoel 10 (Theorie A – pagina 169/170):

(Alternatieve manier om voorbeeld 1 te berekenen):

Bij bepaalde aantallen graden hebben de sinus, cosinus en tangens een exacte oplossing. In deze gevallen moet je de exacte oplossing geven:

hoek	30°	45°	60°
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
cosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
tangens	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

Leerdoel 10 (Theorie A – pagina 169/170):

Voorbeeld 1 (Alternatieve manier)

Gegeven is een rechthoekige $\triangle ABC$
met $AC = 12$ en $\angle A = 45^\circ$. Bereken exact AB

AC = schuine zijde

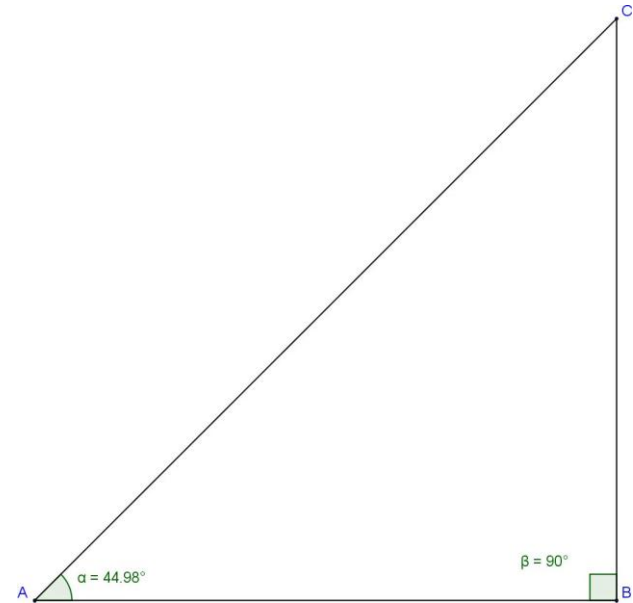
AB = aanliggende rechthoekzijde

$$\cos \angle A = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{12}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{12} AB$$

$$AB = 6\sqrt{2}$$



Let op:

Als er in de noemer **enkel** een wortelteken komt te staan, moet je dit wegwerken.

Leerdoel 11 (Theorie B – pagina 171):

Doel:

Je kunt meetkundige problemen oplossen door een lijnstuk x te stellen, andere lijnstukken in x uit te drukken en hiermee een vergelijking op te stellen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 71 t/m 76

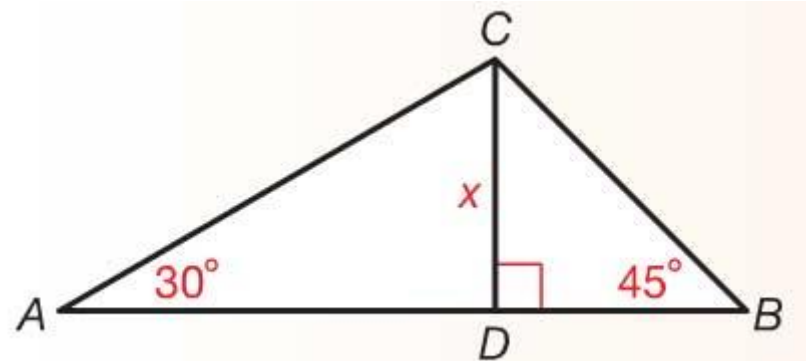
Leerdoel 11 (Theorie B – pagina 171):

Voorbeeld 1:

Gegeven is de $\triangle ABC$ met

$AB = 10$ en $\angle A = 30^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$.

Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.



Stap 1:

$$\text{Opp}(\triangle ABC) = 0,5 \cdot AB \cdot CD = 0,5 \cdot 10 \cdot CD = 5CD$$

Stap 2:

$\triangle BCD$ is gelijkzijdig. Er geldt: $BD = CD = x$.

Stap 3:

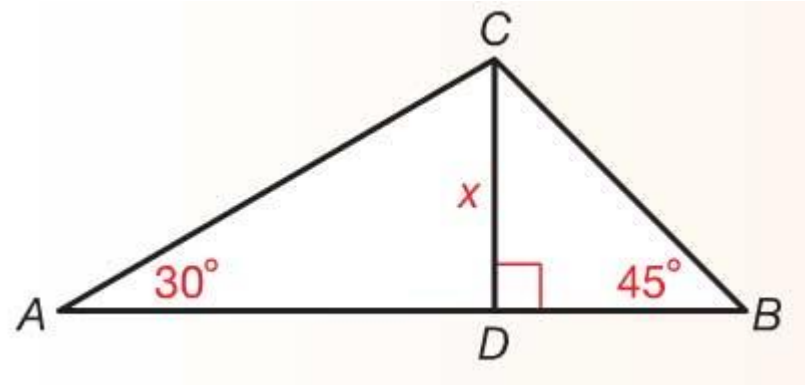
De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpen hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$. $\triangle ACD$ is zo'n driehoek.

Hieruit volgt dat als de **lengte van CD gelijk is aan x** , de **lengte van AD gelijk is aan $x\sqrt{3}$** .

Leerdoel 11 (Theorie B – pagina 171):

Voorbeeld 1:

Gegeven is de $\triangle ABC$ met
 $AB = 10$ en $\angle A = 30^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$.
Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.



Stap 4:

Bereken de waarde van x:

$$AD + DB = 10$$

$$x\sqrt{3} + x = 10$$

$$x(1 + \sqrt{3}) = 10$$

$$x = \frac{10}{1 + \sqrt{3}}$$

Stap 5:

Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$:

$$Opp(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{10}{1 + \sqrt{3}} \right) = \frac{50}{1 + \sqrt{3}}$$

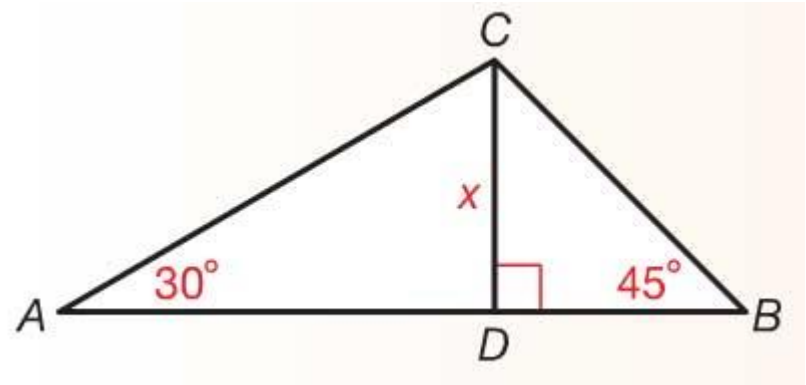
Leerdoel 11 (Theorie B – pagina 171):

Voorbeeld 1 (Alternatieve manier):

Gegeven is de $\triangle ABC$ met

$AB = 10$ en $\angle A = 30^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$.

Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$



Stap 1:

$$\text{Opp}(\triangle ABC) = 0,5 \cdot AB \cdot CD = 0,5 \cdot 10 \cdot CD = 5CD$$

Stap 2:

$\triangle BCD$ is gelijkzijdig. Er geldt: $BD = CD = x$.

Stap 3:

Bereken nu de waarde van x :

$$AD + BD = 10$$

$$AD + x = 10$$

Wanneer de lengte van AD berekend is, kan x berekend worden wat x is.

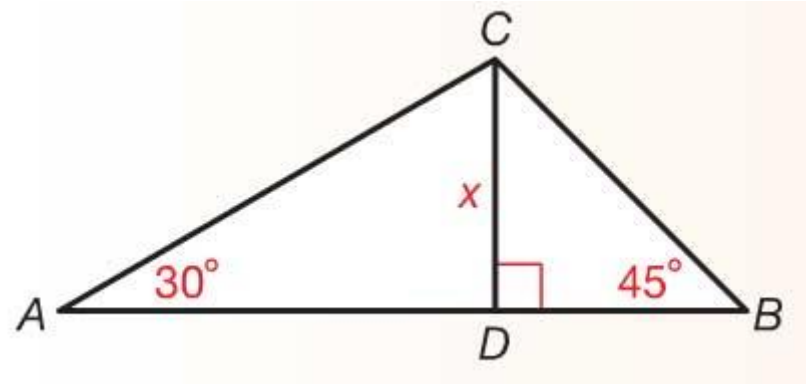
Leerdoel 11 (Theorie B – pagina 171):

Voorbeeld 1 (Alternatieve manier):

Gegeven is de $\triangle ABC$ met

$AB = 10$ en $\angle A = 30^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$.

Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.



Stap 4:

Bereken de lengte van AD :

$$\tan \angle A = \frac{CD}{AD}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{AD}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{x}{AD}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}AD = x$$

$$\sqrt{3}AD = 3x$$

$$AD = \frac{3x}{\sqrt{3}} = \frac{3x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}x}{3} = x\sqrt{3}$$

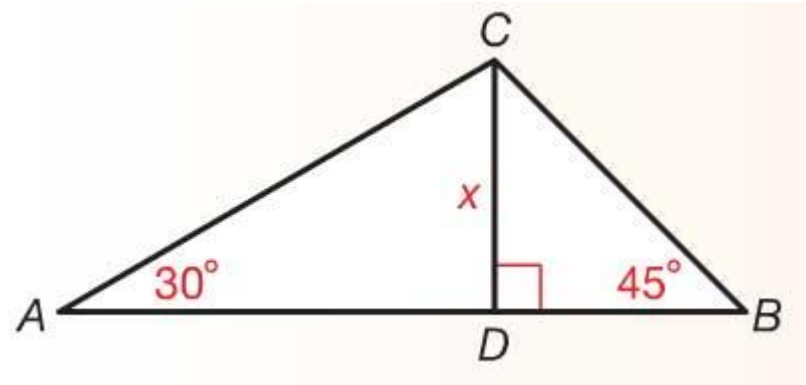
Leerdoel 11 (Theorie B – pagina 171):

Voorbeeld 1 (Alternatieve manier):

Gegeven is de $\triangle ABC$ met

$AB = 10$ en $\angle A = 30^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$.

Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.



Stap 5:

Bereken de waarde van x:

$$AD + DB = 10$$

$$x\sqrt{3} + x = 10$$

$$x(1 + \sqrt{3}) = 10$$

$$x = \frac{10}{1 + \sqrt{3}}$$

Stap 6:

Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$:

$$Opp(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{10}{1 + \sqrt{3}} \right) = \frac{50}{1 + \sqrt{3}}$$

Leerdoel 12 (Theorie C – pagina 173):

Doel:

Je kunt de oppervlakte van een vlakke figuur berekenen als informatie over de zijden en/of hoeken van die figuur gegeven is.

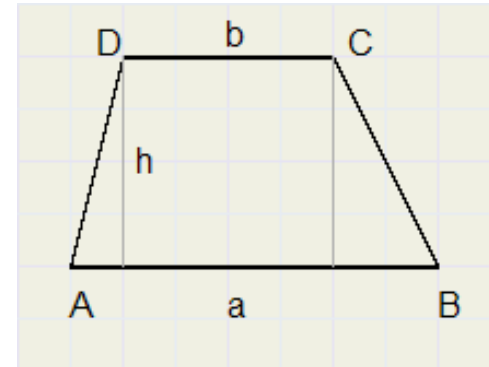
Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 78 t/m 81

Leerdoel 12 (Theorie C – pagina 173):

Oppervlakte trapezium = $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot \text{hoogte}$



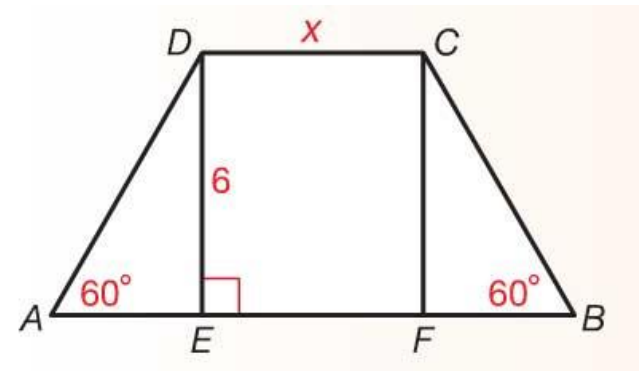
Voorbeeld:

Gegeven is het gelijkbenige trapezium $ABCD$

Met $\angle A = \angle B = 60^\circ$ en hoogte $DE = 6$.

De oppervlakte van het trapezium is 30.

Bereken de **exacte** lengte van CD .



Stap 1:

$$O(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot (AB + CD) \cdot DE = 30$$

Als je de lengte van AB weet, kun je de lengte van CD berekenen, want DE is bekend.

Leerdoel 12 (Theorie C – pagina 173):

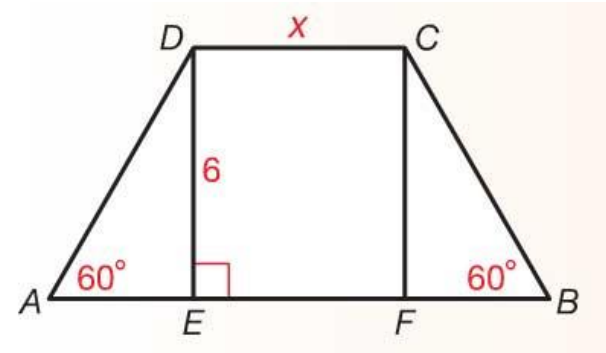
Voorbeeld:

Gegeven is het gelijkbenige trapezium $ABCD$

Met $\angle A = \angle B = 60^\circ$ en hoogte $DE = 6$.

De oppervlakte van het trapezium is 30.

Bereken de **exacte** lengte van CD .



Stap 2:

Bereken de lengte van AE :

De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als **$1 : 2 : \sqrt{3}$** . $\triangle AED$ is zo'n driehoek.

Hieruit volgt dat als de lengte van DE gelijk is aan 6, de lengte van AE gelijk is aan:

$$AE = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Alternatieve methode:

$$\tan(\angle A) = \frac{DE}{AE}$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{6}{AE}$$

$$\sqrt{3} = \frac{6}{AE}$$

$$AE = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Leerdoel 12 (Theorie C – pagina 173):

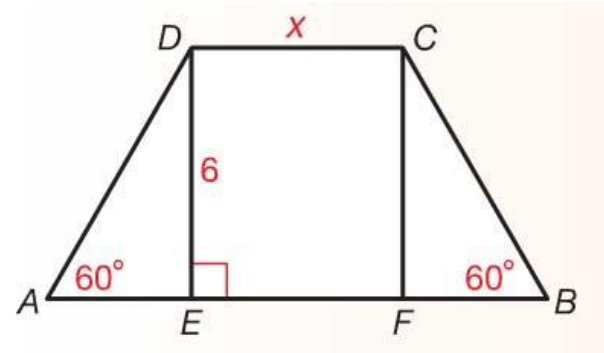
Voorbeeld:

Gegeven is het gelijkbenige trapezium $ABCD$

Met $\angle A = \angle B = 60^\circ$ en hoogte $DE = 6$.

De oppervlakte van het trapezium is 30.

Bereken de **exacte** lengte van CD .



Stap 3:

De lengte van CF is ook gelijk aan $2\sqrt{3}$

Stap 4:

De lengte van AB is gelijk aan: $AE + EF + BF = 2\sqrt{3} + x + 2\sqrt{3} = x + 4\sqrt{3}$

Omdat EF gelijk is aan CD is de lengte van beide lijnstukken x .

Leerdoel 12 (Theorie C – pagina 173):

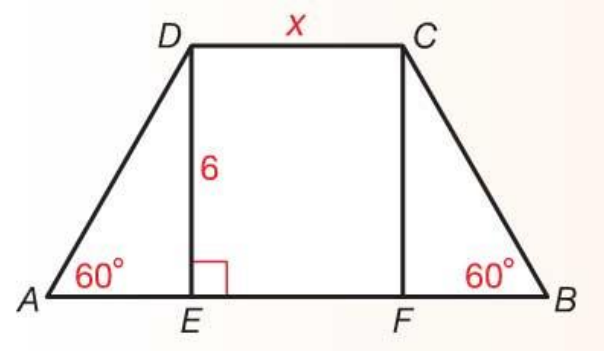
Voorbeeld:

Gegeven is het gelijkbenige trapezium $ABCD$

Met $\angle A = \angle B = 60^\circ$ en hoogte $DE = 6$.

De oppervlakte van het trapezium is 30.

Bereken de **exacte** lengte van CD .



Stap 5:

De lengte van AB invullen in de oppervlakte formule geeft:

$$\begin{aligned} O(ABCD) &= \frac{1}{2} \cdot (AB + CD) \cdot DE = 30 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x + 4\sqrt{3} + x) \cdot 6 = 30 \\ &= 3 \cdot (2x + 4\sqrt{3}) = 30 \\ &= 2x + 4\sqrt{3} = 10 \\ &\Rightarrow 2x = 10 - 4\sqrt{3} \\ &\Rightarrow x = CD = 5 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$