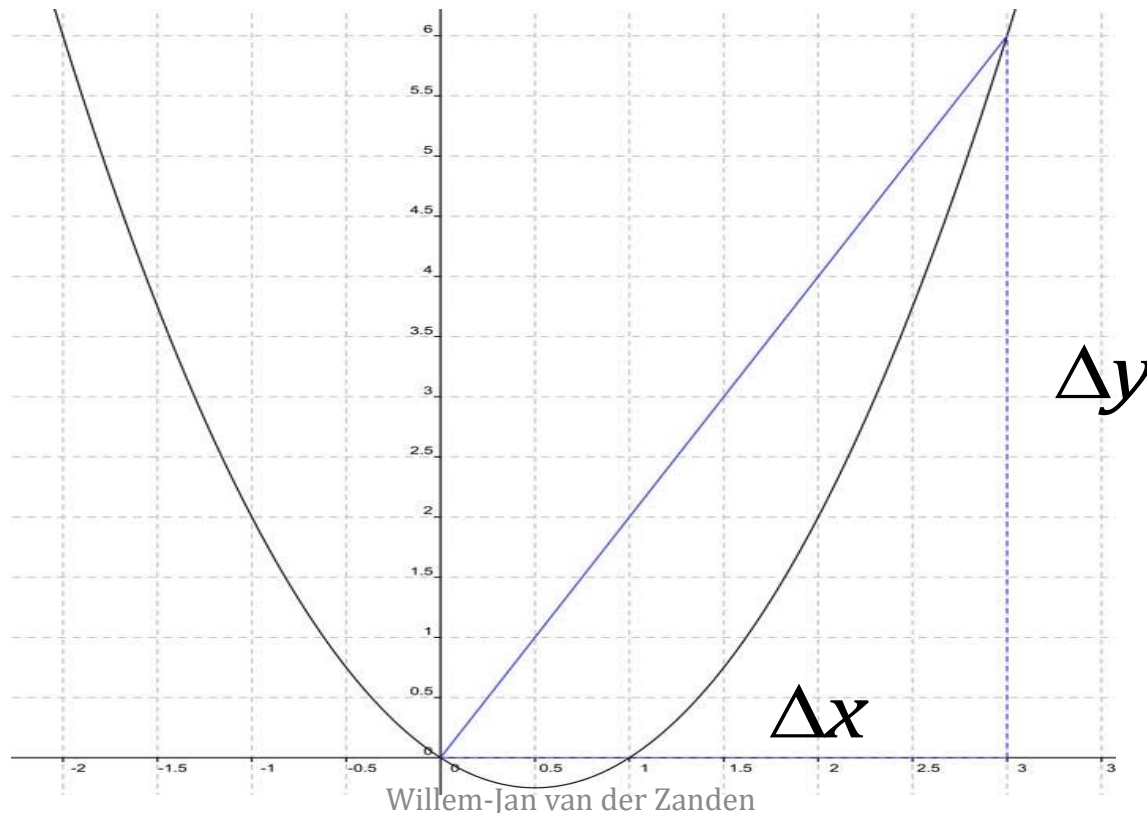


Voorkennis

Met het differentiequotiënt bereken je de gemiddelde verandering per tijdseenheid.

Voorbeeld: $f(x) = x^2 - x$

$$\text{Differentiequotiënt van } f(x) \text{ op } [0, 3] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{6 - 0}{3 - 0} = 2$$



Voorkennis

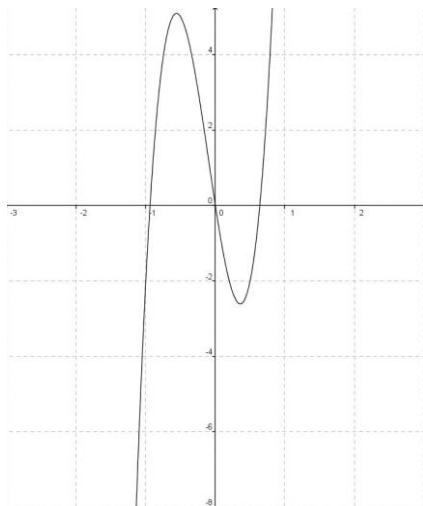
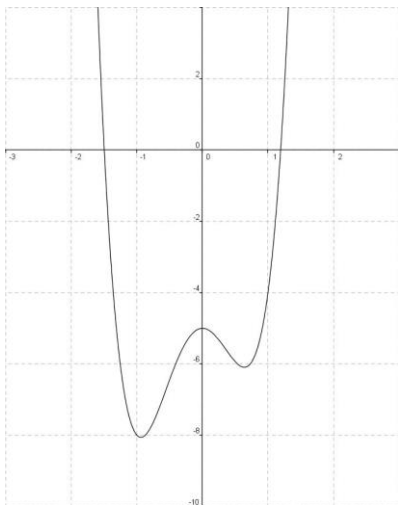
Algemeen:

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is:

- De gemiddelde toename van y op $[x_A, x_B]$;
- De richtingscoëfficiënt van de lijn AB ;
- De helling van de lijn AB ;

- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Voorkennis



- Linksboven is de grafiek van de functie $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5$ getekend op het interval $[-2, 2]$;
- Deze grafiek heeft drie toppen;
- Linksonder is de hellingsgrafiek van de functie van f getekend;
- De hellingsgrafiek geeft in elk punt de snelheid aan waarmee de functie van f verandert;
- In de intervallen $[-2; -0,94)$ en $(0; 0,64)$ is $f(x)$ dalend. De hellingsgrafiek ligt onder de x -as;
- In de punten met $x = -0,94$, $x = 0$ en $x = 0,64$ heeft $f(x)$ een top. De hellingsgrafiek snijdt hier de x -as;
- In de intervallen $(-0,94; 0)$ en $(0,64, 2]$ is $f(x)$ stijgend. De hellingsgrafiek ligt boven de x -as;

Voorkennis

Een andere naam voor hellingfunctie is **afgeleide functie**.

De afgeleide van een functie f [f'] geeft voor elke x :

- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek van f in het bijbehorende punt;
- De helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt.

De formule van de afgeleide van een functie f kan gevonden worden met behulp van het differentiequotient op het interval $[x, x + h]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Op het moment dat h richting 0 gaat (en dus heel erg klein wordt), volgt uit het differentiequotient de afgeleide f' :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Voorkennis

Algemeen:

$$f(x) = a \text{ geeft } f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \text{ geeft } f'(x) = a$$

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = nax^{n-1}$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \text{ geeft } f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \text{ geeft } f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

[Somregel]

Productregel:

De afgeleide van $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ bereken je met:

$$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotiëntregel:

De afgeleide van $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ wordt nu:

$$q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2} = \frac{nat - \tan}{n^2}$$

Voorkennis

Voorbeeld:

Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 + 3x + 4$

Stel de met behulp van de afgeleide de vergelijking op van de raaklijn l in punt A met r.c. = 1

Stap 1:

Stel de afgeleide van de functie $f(x)$ op:

$l: y = ax + b$ en dus $l: y = x + b$

$$f(x) = x^2 + 3x + 4$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

Stap 2:

Bereken wanneer de afgeleide gelijk is aan 1:

$$f'(x) = 1$$

$$2x + 3 = 1$$

$$2x = -2$$

$$x_A = -1$$

Voorkennis

Voorbeeld:

Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 + 3x + 4$

Stel de met behulp van de afgeleide de vergelijking op van de raaklijn l in punt A met r.c. = 1

Stap 3:

Bepaal de y-coördinaat van het punt A :

$$y_A = f(x_A) = (-1)^2 + 3 \cdot -1 + 4 = 2$$

Stap 4:

Stel de vergelijking van de raaklijn l op:

$$l: y = x + b$$

Invullen van $A = (-1, 2)$ geeft:

$$2 = -1 + b$$

$$b = 3$$

Hieruit volgt: $l: y = x + 3$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 60):

Doel:

Je kunt algebraïsch (dus met de afgeleide) de extreme waarden van een functie berekenen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 3 t/m 5

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 60):

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 120x + 150$.

Bereken algebraïsch de extreme waarden van f .

Stap 1:

Bereken de afgeleide van de gegeven functie.

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 120$$

Stap 2:

Los algebraïsch op: $f'(x) = 0$

$$12x^2 - 18x - 120 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 20 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -20 = 169$$

$$x = \frac{3-13}{4} = 2\frac{1}{2} \vee x = \frac{3+13}{4} = 4$$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 60):

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 120x + 150$.

Bereken algebraïsch de extreme waarden van f .

Stap 3:

Plot de grafiek op je GR en **maak een schets**.

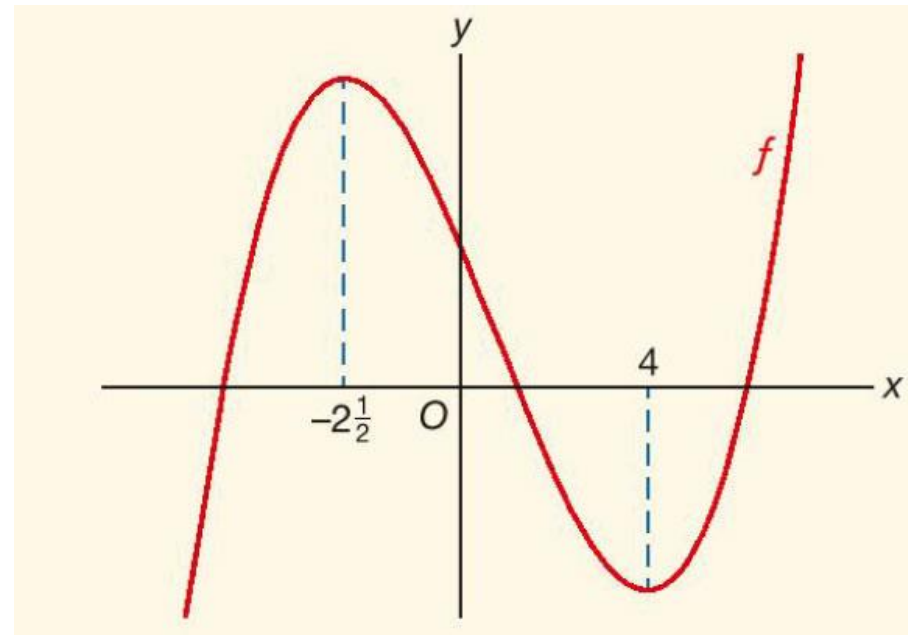
Controleer of je met een maximum of een minimum te doen hebt.

Stap 4:

Bereken de extreme waarden:

Maximum is $f(-2\frac{1}{2}) = 331\frac{1}{4}$

Minimum is $f(4) = -218$



Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 62):

Doel:

Je kunt algebraïsch (dus met de afgeleide) aantonen dat een functie een extreme waarde heeft voor een gegeven waarde van x .

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 7, 9 en 10

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 62):

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^5 - 6x^3$

Toon met de afgeleide aan dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{1\frac{4}{5}}$

Stap 1:

Bereken de afgeleide van de gegeven functie.

$$f'(x) = 10x^4 - 18x^2$$

Stap 2:

Laat met een berekening zien dat invullen van de gegeven waarde van x in de afgeleide 0 als uitkomst geeft.

$$f'(\sqrt{1\frac{4}{5}}) =$$

$$10 \cdot \left(\sqrt{1\frac{4}{5}}\right)^4 - 18 \cdot \left(\sqrt{1\frac{4}{5}}\right)^2 =$$

$$10 \cdot \left(1\frac{4}{5}\right)^2 - 18 \cdot 1\frac{4}{5} =$$

$$10 \cdot \frac{81}{25} - \frac{162}{5} =$$

$$\frac{162}{5} - \frac{162}{5} = 0$$

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 62):

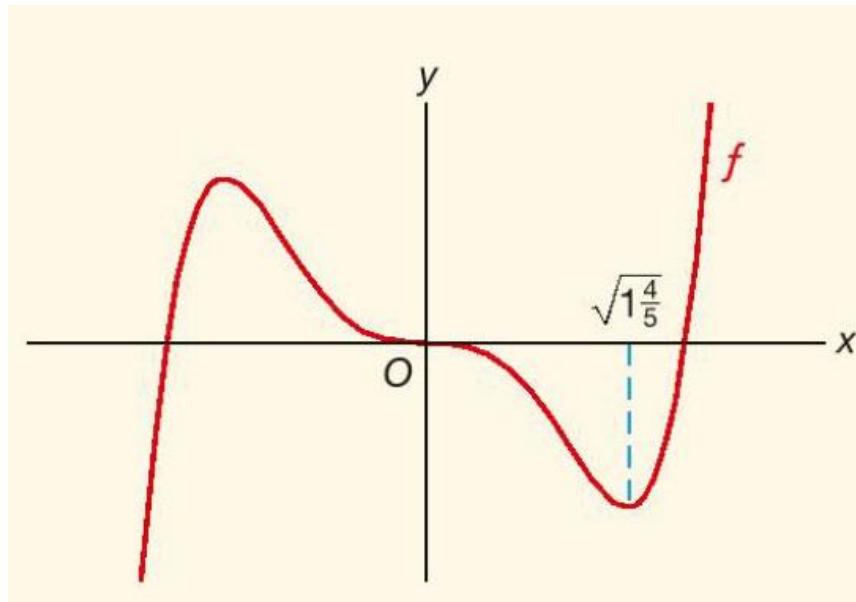
Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^5 - 6x^3$

Toon met de afgeleide aan dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt[4]{1\frac{4}{5}}$

Stap 3:

Maak met behulp van de GR **een schets** van de afgeleide en laat zien dat er bij de gegeven waarde van x ook echt sprake is van een extreme waarde.



Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 64):

Doel:

Je kent de begrippen “buigpunt” en “buigraaklijn”

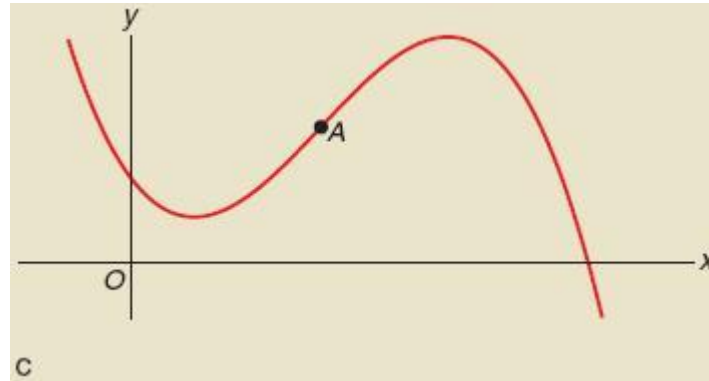
- Je weet dat er vier situaties zijn waarin een grafiek een buigpunt heeft en kunt deze vier situaties herkennen aan de hand van een grafiek;
- Je weet dat de grafiek van f een buigpunt heeft als de afgeleide van deze functie een extreme waarde heeft;
- Je kunt algebraïsch (met behulp van de eerste en tweede afgeleide) de coördinaten van de buigpunten van een grafiek berekenen;
- Je kunt algebraïsch (met behulp van de eerste en tweede afgeleide) de formule van een buigraaklijn opstellen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 14 t/m 20

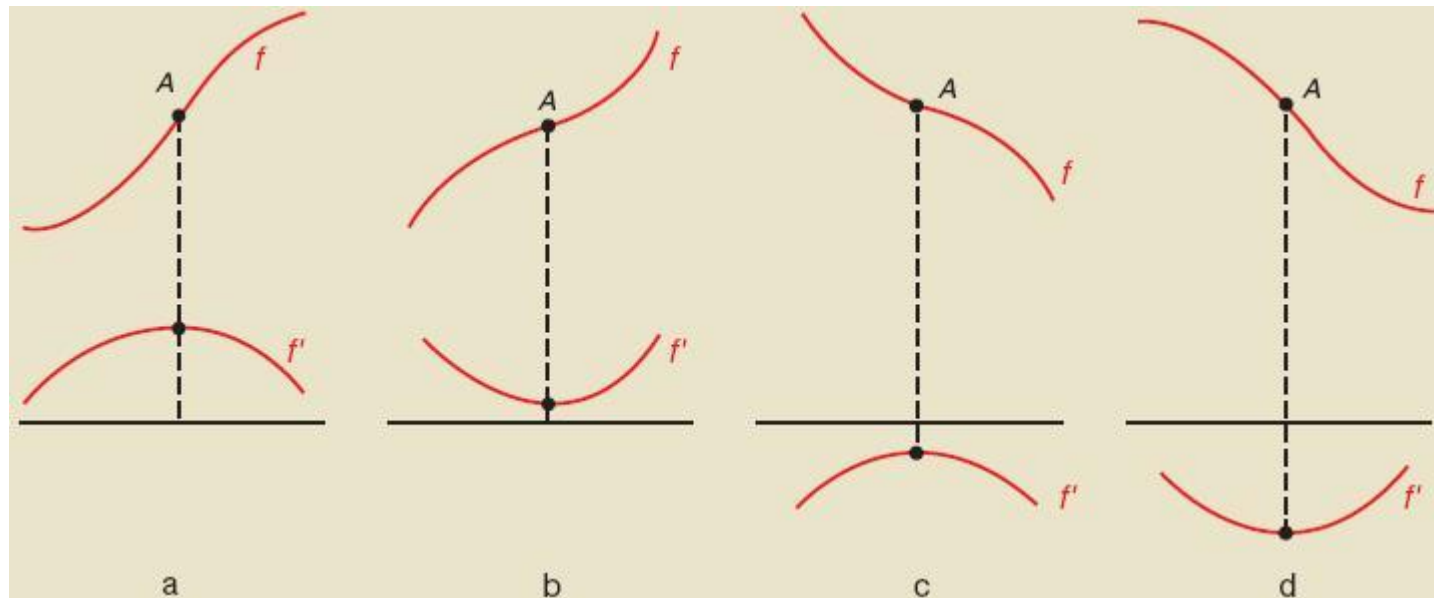
Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 64):



- De functie is afnemend dalend tot het lokale minimum;
- Vanaf het lokale minimum tot punt A is de functie toenemend stijgend;
- Vanaf punt A tot het lokale maximum is de functie afnemend stijgend;
- Vanaf het lokale maximum is de functie toenemend dalend.

Het punt A heet een zogenaamd **buigpunt**.

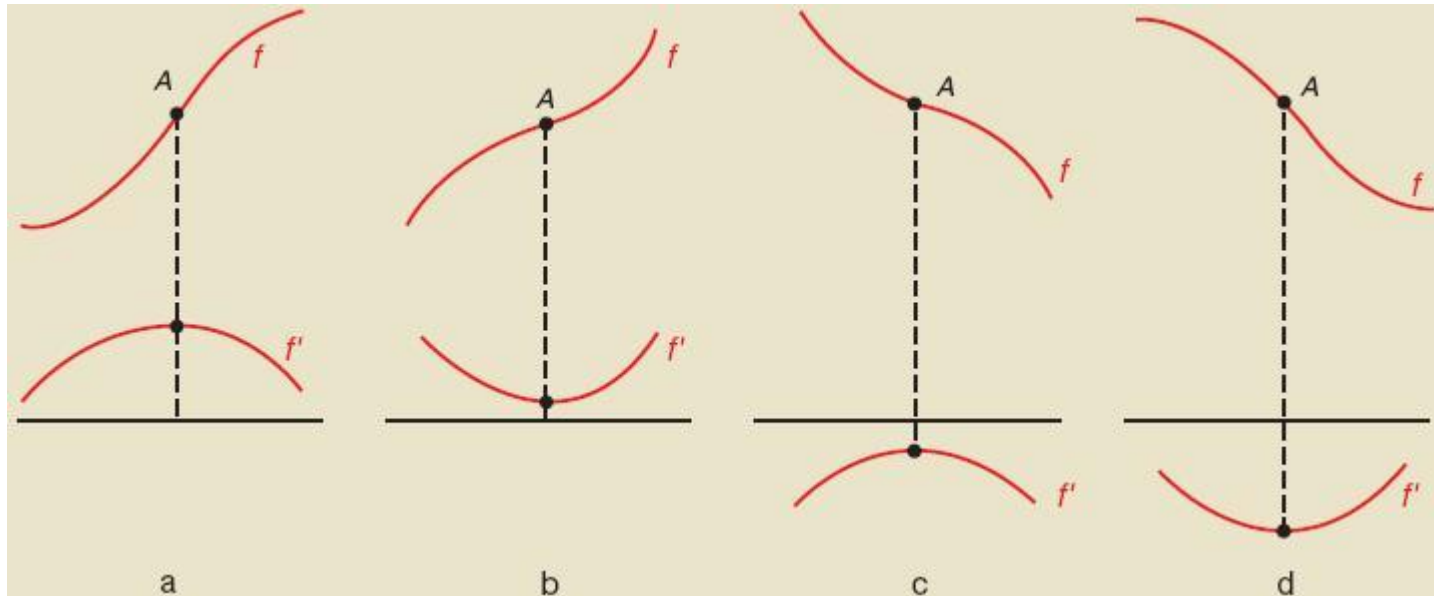
Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 64):



- a: De grafiek is eerst toenemend stijgend en dan afnemend stijgend;
b: De grafiek is eerst afnemend stijgend en dan toenemend stijgend;
c: De grafiek is eerst afnemend dalend en dan toenemend dalend;
d: De grafiek is eerst toenemend dalend en dan afnemend dalend;

In al deze vier situaties is het punt A het buigpunt.

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 64):



- Waar f een buigpunt heeft, heeft de afgeleide f' een maximum of minimum;
- Het buigpunt van een functie f kan gevonden worden door de extreme waarde van f' te berekenen;
- De extreme waarde van f' kan berekend worden door de afgeleide van f' gelijk te stellen aan nul;
- De afgeleide van f' is de functie f'' (**tweede afgeleide**).

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 64):

Voorbeeld:

Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 + 7x - 6$$

Stap 1:

Bereken de eerste en tweede afgeleide van $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + 7 \quad \text{EN} \quad f''(x) = x^2 - 6x + 9$$

Stap 2:

Los de vergelijking $f''(x) = 0$ op

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 64):

Voorbeeld:

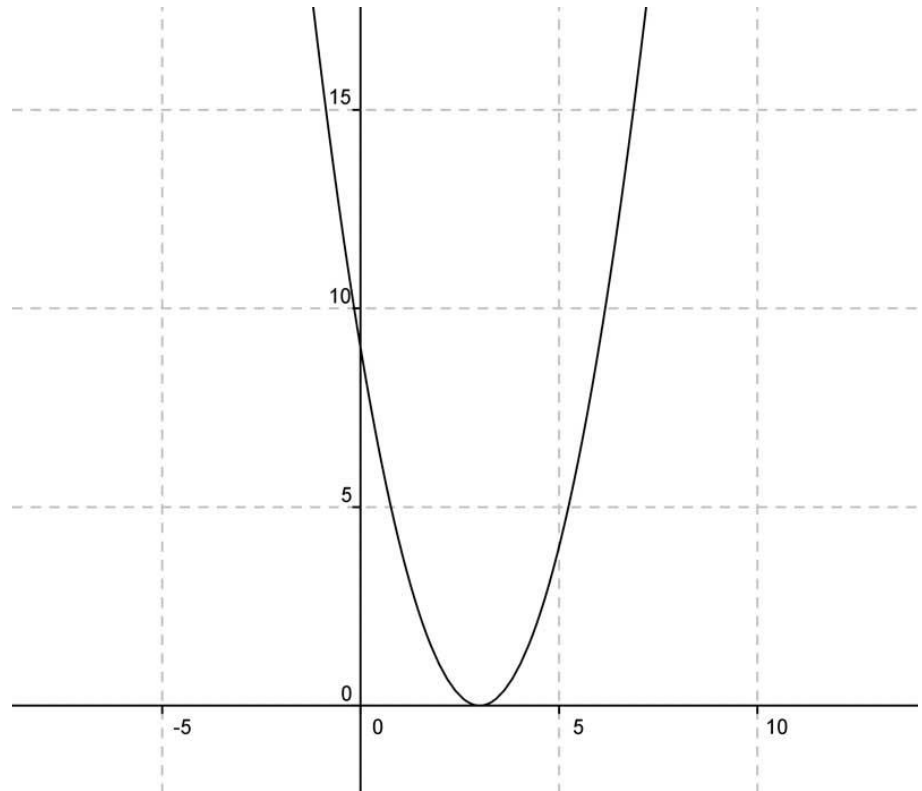
Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 + 7x - 6$$

Stap 3:

Maak met behulp van de GR **een schets van de tweede afgeleide**.

In het punt $x = 3$ verwisselt de tweede afgeleide niet van teken.
De oorspronkelijke functie heeft hier dus GEEN buigpunt.



Leerdoel 4 (Theorie A – pagina 68):

Doel:

Je kunt functies van de vorm $f(x) = x^n$ differentiëren voor gehele waarden van n .

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 24, 25, 27 t/m 30

Leerdoel 4 (Theorie A – pagina 68):

Herhaling:

De afgeleide van $f(x) = ax^n$ is: $f'(x) = nax^{n-1}$

Deze regel geldt voor elk geheel getal n .

Voorbeeld 1:

$$f(x) = \frac{9}{x^3} = 9x^{-3}$$

$$f'(x) = -3 \cdot 9x^{-4} = -27x^{-4} = \frac{-27}{x^4}$$

Voorbeeld 2:

$$g(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^3} = x + \frac{2}{x^2} = x + 2x^{-2}$$

$$g'(x) = 1 - 2 \cdot 2x^{-3} = 1 - 4x^{-3} = 1 - \frac{4}{x^3}$$

Leerdoel 5 (Theorie B – pagina 71):

Doel:

Je kunt functies van de vorm $f(x) = x^n$ differentiëren voor alle reële waarden van n .

- Indien nodig kun je met behulp van de rekenregels voor machten functies herleiden naar de vorm $f(x) = x^n$.
- Als in de functie zelf gebroken exponenten staan, geef je het antwoord in de vorm van een functie met alleen gebroken exponenten.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 34, 36 t/m 41

Leerdoel 4 (Theorie B – pagina 71):

Herhaling:

De afgeleide van $f(x) = ax^n$ is: $f'(x) = nax^{n-1}$

Deze regel geldt voor elk getal uit de verzameling van reële getallen $\mathbb{R}$

Voorbeeld 1:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Voorbeeld 2:

$$g(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^3} = x + \frac{2}{x^2} = x + 2x^{-2}$$

$$g'(x) = 1 - 2 \cdot 2x^{-3} = 1 - 4x^{-3} = 1 - \frac{4}{x^3}$$

Leerdoel 6 (Theorie A – pagina 75/76):

Doel:

Je kunt de kettingregel voor differentiëren toepassen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 46, 48 t/m 52

Leerdoel 6 (Theorie A – pagina 75/76):

Voorbeeld 1:

$f(x) = \text{schakels } (x^2 - x + 6)^4$ is een **samengestelde functie**, die bestaat uit de $u(v) = v^4$ en $v(x) = x^2 - x + 6$.

Een functie die geschreven is als een ketting van schakels heeft een **kettingfunctie**.

Kettingregel:

$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

$u(v) = v^4$ heeft als afgeleide $u'(v) = 4v^3$

$v(x) = x^2 - x + 6$ heeft als afgeleide $v'(x) = 2x - 1$

De afgeleide van $(x^2 - x + 6)^4$ wordt nu:

$$f'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = 4v^3 \cdot (2x - 1) = 4(x^2 - x + 6)(2x - 1)$$

Leerdoel 6 (Theorie A – pagina 75/76):

Voorbeeld 2:

Bereken de afgeleide van de gegeven functie $g(x)$:

$$g(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + x}} = 4(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u(v) = 4v^{-\frac{1}{2}} \text{ met } u'(v) = -2v^{-\frac{1}{2}}$$

$$v(x) = x^2 + x \text{ met } v'(x) = 2x + 1$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(v) \cdot v'(x) \\ &= -2v^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) \\ &= -2(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} (2x + 1) \\ &= \frac{-2(2x + 1)}{(x^2 + x)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-4x - 2}{(x^2 + x)\sqrt{x^2 + x}} \end{aligned}$$

Leerdoel 7 (Theorie A – pagina 79):

Doel:

Je kunt de kettingregel voor differentiëren toepassen in combinatie met de productregel of quotiëntregel.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 54 t/m 59

Leerdoel 7 (Theorie A – pagina 79):

Voorbeeld van combinatie kettingregel en productregel:

$$f(x) = x\sqrt{2x+1}$$

$$f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot [\sqrt{2x+1}]' \text{ (productregel)}$$

$$[x]' = 1 \text{ en } [g(x)]' = [\sqrt{2x+1}]'$$

$$u(v) = \sqrt{v} \text{ met } u'(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

$$v(x) = 2x+1 \text{ met } v'(x) = 2$$

$$[g(x)]' = u'(v) \cdot v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot [\sqrt{2x+1}]'$$

$$= 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$$

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 82):

Doel:

Je kunt berekenen voor welke waarden van p de vergelijkingen $f(x) = p$ en $f(x) = ax$ een bepaald aantal oplossingen hebben.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 61, 63, 64, 66, 67

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 82):

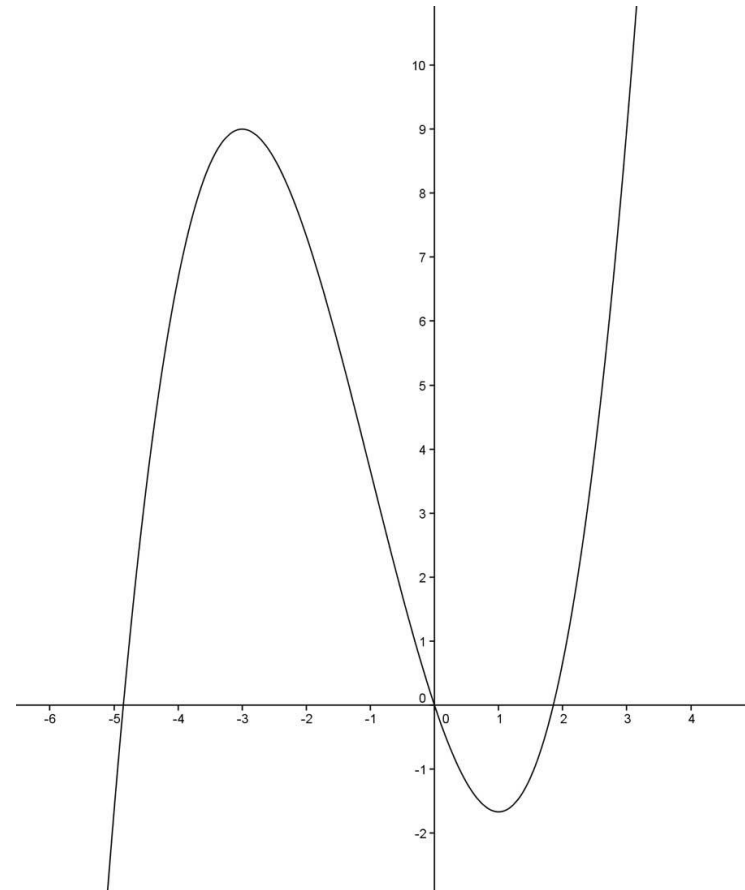
Voorbeeld:

Voor welke p heeft de vergelijking $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x = p$

- precies drie oplossingen
- precies twee oplossingen
- precies één oplossing

Uit het plaatje volgt nu:

- Een lijn boven het maximum leidt tot één snijpunt
- Een lijn door het maximum leidt tot twee snijpunten
- Een lijn tussen de toppen leidt tot drie snijpunten
- Een lijn door het minimum leidt tot twee snijpunten
- Een lijn onder het minimum leidt tot één snijpunt



Dus: Bereken de toppen van de grafiek.

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 82):

Voorbeeld:

Voor welke p heeft de vergelijking $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x = p$

- precies drie oplossingen
- precies twee oplossingen
- precies één oplossing

Stap 1:

Stel de afgeleide van de gegeven functie op.

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3$$

Stap 2:

Stel de afgeleide gelijk aan 0 en los de vergelijking op.

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x = -3 \vee x = 1$$

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 82):

Voorbeeld:

Voor welke p heeft de vergelijking $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x = p$

- precies drie oplossingen
- precies twee oplossingen
- precies één oplossing

Stap 3:

Bereken de extreme waarden:

Dit geeft de toppen $(-3, 9)$ en $(1, -1\frac{2}{3})$.

Stap 4:

Lees de oplossing af uit de grafiek:

$p < -1\frac{2}{3}$ en $p > 9$ geeft één oplossing

$p = -1\frac{2}{3}$ en $p = 9$ geeft twee oplossingen

$-1\frac{2}{3} < p < 9$ geeft drie oplossingen

Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 84):

Doel:

Je kunt berekenen voor een derdegraadsfunctie met parameter berekenen voor welke waarde van p de functie een bepaald aantal extreme waarden heeft.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 69, 71, 72

Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 84):

Voorbeeld:

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - px + 6$

Bereken voor welke p de functie twee extreme waarden heeft

Stap 1:

Geef de afgeleide functie: $f'_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - p$

Stap 2:

Als de functie twee extreme waarden heeft, betekent dit dat de vergelijking $f'_p(x) = 0$ twee oplossingen heeft ($D > 0$)

Oplossing van $D > 0$ geeft de oplossingen:

$$1 - 2p > 0$$

$$-2p > -1$$

$$p < \frac{1}{2}$$

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 84):

Doel:

Je kunt voor een functie met een parameter p berekenen voor welke waarden van p en q deze een lijn met parameter q raakt.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 75, 76

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 84):

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f_p(x) = x^2\sqrt{x} - p\sqrt{x}$

$k: y = 18x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$.

Bereken p en q

Stap 1:

Bereken de afgeleide van de functie $f_p(x)$

$$f_p(x) = x^2\sqrt{x} + p\sqrt{x} = x^{2\frac{1}{2}} + p \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'_p(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}px^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{5x\sqrt{x}}{2} + \frac{p}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + p}{2\sqrt{x}}$$

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 84):

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f_p(x) = x^2\sqrt{x} - p\sqrt{x}$

$k: y = 18x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$.

Bereken p en q

Stap 2:

Bereken p (Je weet dat de afgeleide van $f_p(x)$ in het punt A met $x_A = 4$ gelijk is aan 18).

$$f'_p(4) = 18$$

$$\frac{5 \cdot 4^2 + p}{2\sqrt{4}} = 18$$

$$\frac{80 + p}{4} = 18$$

$$80 + p = 72$$

$$p = -8$$

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 84):

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f_p(x) = x^2\sqrt{x} - p\sqrt{x}$

$k: y = 18x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$.

Bereken p en q

Stap 3:

Bereken q (Bereken hiervoor de y -coördinaat van het punt A)

$$f_{-8}(x) = x^2\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$$

$$f_{-8}(4) = 16 \text{ dus } A(4, 16)$$

$$k: y = 18x + q$$

$$16 = 18 \cdot 4 + q$$

$$16 = 72 + q$$

$$q = -56$$

$$p = -8 \text{ en } q = -56$$

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 86/87):

Doel:

Je kunt voor een functie met een parameter p de kromme opstellen waarop de toppen liggen voor alle mogelijke waarden van deze parameter.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 78 t/m 81

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 86/87):

Voorbeeld:

$$g_p(x) = px^2 + 4x - 3$$

De top hangt af van de waarde van p . Je kunt een formule opstellen waarop alle toppen van de grafiek van g_p liggen.

Stap 1:

Stel de afgeleide van de gegeven functie op:

$$g_p'(x) = 2px + 4$$

Stap 2:

Stel de afgeleide gelijk aan nul en druk p uit in x .

$$g_p'(x) = 0$$

$$2px + 4 = 0$$

$$2px = -4$$

$$p = \frac{-2}{x}$$

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 86/87):

Voorbeeld:

$$g_p(x) = px^2 + 4x - 3$$

De top hangt af van de waarde van p . Je kunt een formule opstellen waarop alle toppen van de grafiek van g_p liggen.

Stap 3:

Vul p als functie van x in, in $g_p(x)$ om de formule te krijgen van de kromme waarop alle toppen van de grafiek van g_p liggen.

$$y = px^2 + 4x - 3$$

$$= \frac{-2}{x} \cdot x^2 + 4x - 3$$

$$= -2x + 4x - 3$$

$$= 2x - 3$$

Alle toppen van $g_p(x) = px^2 + 4x - 3$ liggen op de lijn $y = 2x - 3$