

1.0 Voorkennis

Getallenverzameling = Verzameling van getallen met een bepaalde eigenschap

Natuurlijke getallen:

Dit zijn alle positieve gehele getallen en nul.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

De getallen 0, 1, 2, 3, 4, ... Zijn de elementen van de verzameling $\mathbb{N}$

0 is een element van $\mathbb{N}$ noteer je als $0 \in \mathbb{N}$

-1 is geen element van $\mathbb{N}$ noteer je als $-1 \notin \mathbb{N}$

Een verzameling zonder elementen is een **lege verzameling** ($\emptyset$)

Let op:

Het maakt niet uit in welke volgorde je de elementen van de verzameling zet.

1.0 Voorkennis

Noteren van getallenverzameling:

1. Elementen opsommen tussen accolades:

Verzameling van even natuurlijke getallen die kleiner zijn dan 10: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

2. Opsomming tussen accolades suggereren met stippen:

Verzameling van positieve even getallen: $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$

3. Vermelden van voorwaarde waaraan elementen van verzameling moeten voldoen:

Verzameling van de even natuurlijke getallen: $\{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N}\}$

4. Interval:

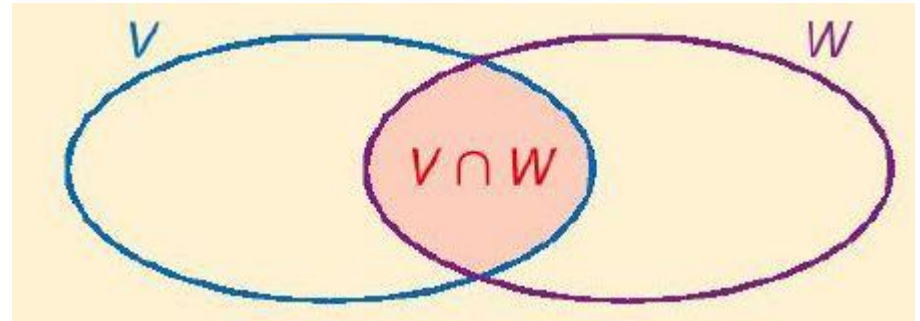
Verzameling van de reële getallen: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

1.0 Voorkennis

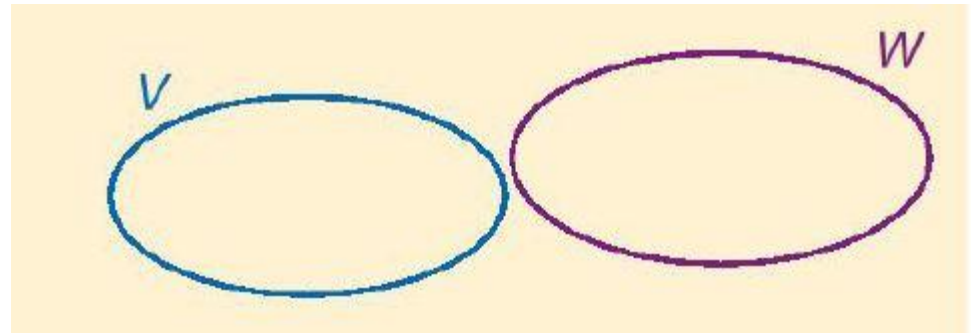
Soorten verzamelingen:

Doorsnede $V \cap W$ bestaat uit de gemeenschappelijke elementen van V en W .

$$V \cap W = \{x \mid x \in V \wedge x \in W\}$$

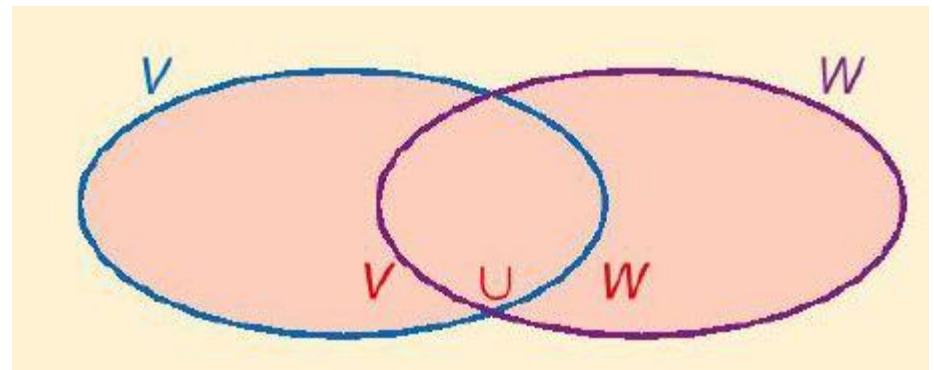


Bij een **disjuncte** verzameling geldt: $V \cap W = \emptyset$. Deze verzameling heeft geen elementen.



De vereniging $V \cup W$ bestaat uit de elementen die tot V , tot W , of tot beide behoren.

$$V \cup W = \{x \mid x \in V \vee x \in W\}$$



1.0 Voorkennis

Soorten verzamelingen:

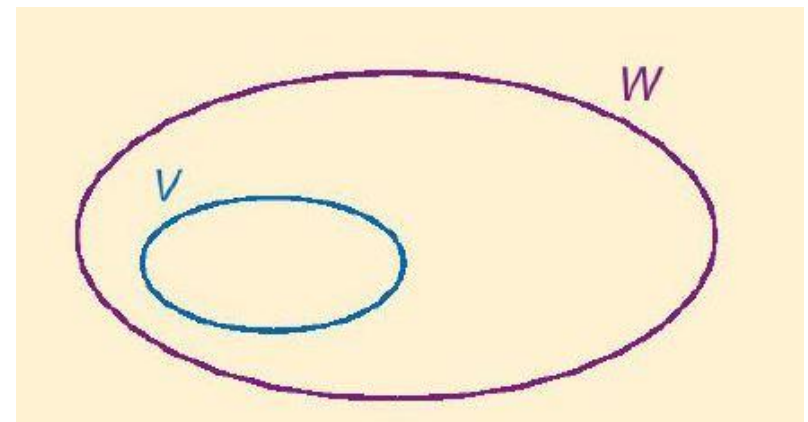
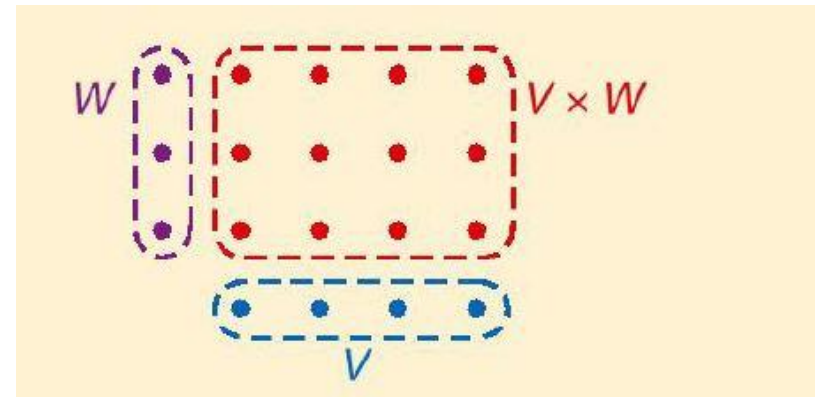
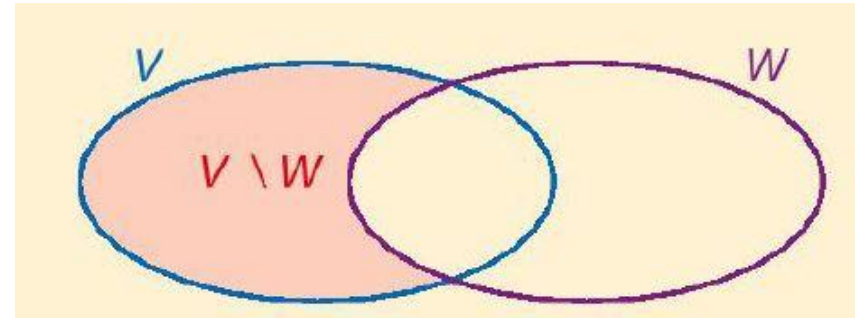
Het **verschil** $V \setminus W$ bestaat uit de elementen die wel tot V maar niet tot W behoren.

$$V \cap W = \{x \mid x \in V \wedge x \notin W\}$$

Het **product** $V \times W$ van de verzamelingen V en W is:

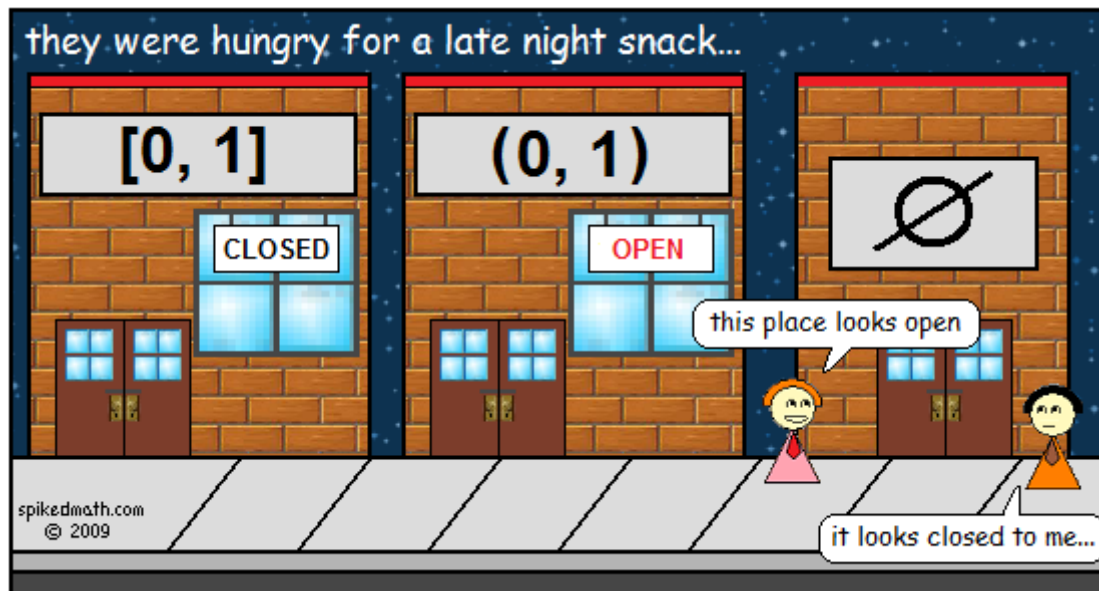
$$V \times W = \{(x, y) \mid x \in V \wedge y \in W\}$$

V is een deelverzameling van W als elk element van V ook een element van W is: $V \subset W$.



1.0 Voorkennis

$[0, 1]$ is een **gesloten interval**. Alle getallen van 0 tot en met 1 zitten hierin.
 $(0, 1)$ is een **open interval**. 0 en 1 zitten **niet** in dit interval;
 $[0, 1)$ is een **half open interval**. 0 zit er wel in en 1 niet;
 $(0, 1]$ is een half open interval. 0 zit er niet in en 1 wel;
 $\{0, 1\}$ is de verzameling van de getallen 0 en 1;
 $0,1$ is een getal.



1.1 De somregel en de productregel [1]

Voorbeeld:

Als je gooit met een dobbelsteen zijn er zes mogelijke **uitkomsten**.

De verzameling uitkomsten $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

De **uitkomstenverzameling** van het experiment “gooien met twee dobbelstenen” heeft 36 elementen:

$U = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (2,1), (2,2), \dots, (6,4), (6,5), (6,6)\}$.

Een **gebeurtenis** is een deelverzameling van de uitkomstenverzameling U .

Voor de gebeurtenis “de som van de ogen is 9” geldt:

$G = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$.

Het aantal elementen van G is vier: $\#(G) = 4$.

Algemeen:

Een gebeurtenis G bij een experiment met uitkomstenverzameling U is een Deelverzameling van U .

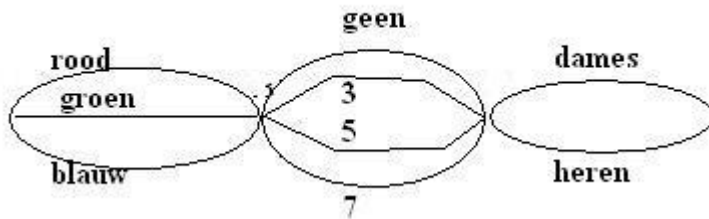
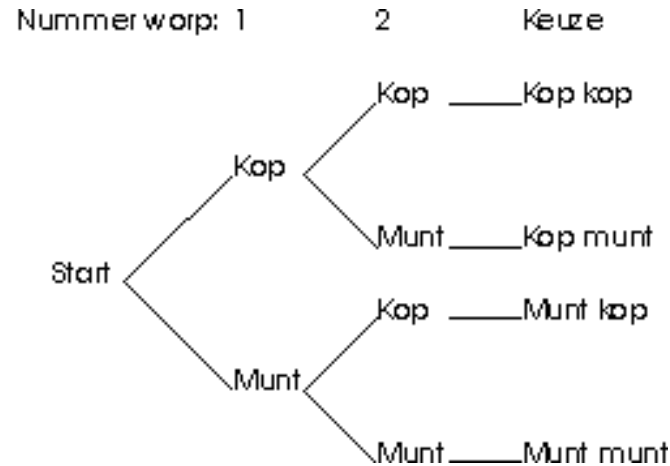
$\#(G)$ is het aantal elementen van G .

1.1 De somregel en de productregel [1]

Het aantal mogelijke uitkomsten van een telprobleem kun je op verschillende manieren weergeven:

Boomdiagram:

Een overzicht van de mogelijke antwoorden bij het opgooien van twee muntstukken.



Wegendiagram:

Een overzicht van de mogelijkheden van Fietsen met:

- Een rode, groene of blauwe kleur;
- Geen, 3, 5 of 7 versnellingen;
- Dames- of herenuitvoering.

1.1 De somregel en de productregel [1]

Het aantal mogelijke uitkomsten van een telprobleem kun je op verschillende manieren weergeven:

Rooster:

Een overzicht van de mogelijke uitkomsten bij het gooien met twee dobbelstenen en het optellen van de uitkomsten.

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

SOM VAN DE OGEN

6	7					
5	6					
4	5					
3	4	5				
2	3	4				
1	2	3				
	1	2	3	4	5	6

blauwe dobbelsteen

rode dobbelsteen

Systematisch noteren:

Een overzicht van alle mogelijke uitkomsten bij het gooien met twee dobbelstenen met elk vier ogen.

Let op:

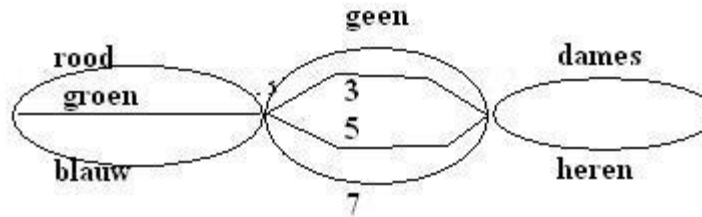
Gebruik steeds de notatie die het handigste is.

1.1 De somregel en de productregel [2]

Voorbeeld 1:

Bij een bepaald model fiets heeft de klant de volgende keuzes:

- De kleur van de fiets kan rood, groen of blauw zijn;
- De fiets kan geen, 3, 5 of 7 versnellingen hebben;
- De fiets kan een dames- of herenfiets zijn.



Het aantal mogelijke soorten van dit model is nu: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$

Definitie productregel:

Bestaat een experiment uit drie handelingen, waarbij de eerste handeling op n_1 manieren kan worden uitgevoerd, de tweede op n_2 manieren en de derde op n_3 manieren, dan zijn er voor het gehele experiment $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ manieren.

1.1 De somregel en de productregel [2]

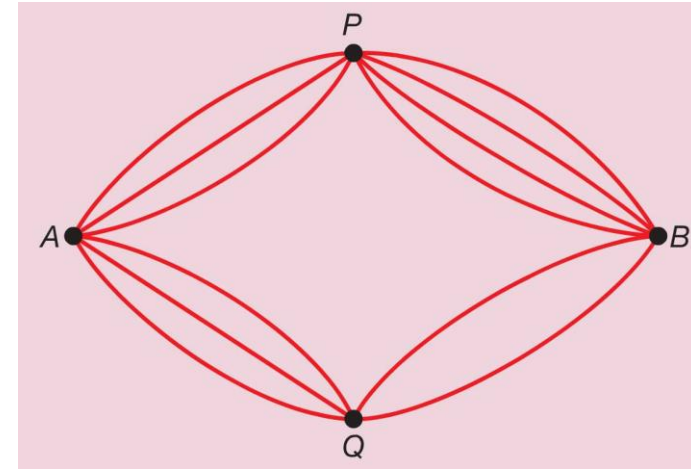
Voorbeeld 2:

Vanuit punt A kun je via P OF Q naar punt B . Je kunt in dit voorbeeld niet via beide vanuit A naar B .

Als je via punt P gaat, zijn er $3 \cdot 4 = 12$ manieren.

Als je via punt Q gaat, zijn er $3 \cdot 2 = 6$ manieren.

In totaal zijn er dus $12 + 6 = 18$ manieren om van punt A naar punt B te gaan.



Definitie:

Kan handeling I op p manieren en handeling II op q manieren dan kan:

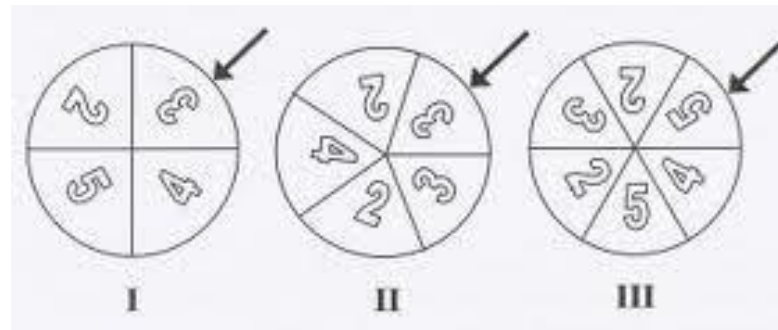
- Handeling I EN handeling II op $p \cdot q$ manieren (**productregel**);
- Handeling I OF handeling II op $p + q$ manieren (**somregel**). Dit geldt alleen als er sprake is van elkaar uitsluitende gebeurtenissen. Als de gebeurtenissen elkaar niet uitsluiten, moet je opletten dat je geen gebeurtenissen dubbel telt.

1.1 De somregel en de productregel [2]

Voorbeeld 3:

Bereken het aantal uitkomsten met drie keer een 2.

$$N(222) = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$



Voorbeeld 4:

Bereken het aantal uitkomsten waarbij alle getallen groter dan 3 zijn.

$$N(>3>3>3) = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$$

Voorbeeld 5:

Bereken het aantal uitkomsten met twee keer het getal 2 en een keer het getal 4

$$N(224) + N(242) + N(422) = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 2 + 2 + 4 = 8$$

1.2 Variaties en herhalingsvariaties [1]

Voorbeeld 1:

Een bestuur bestaat uit 6 personen. Uit deze 6 personen wordt eerst een voorzitter, dan een secretaris en tot slot een penningmeester gekozen.

Bereken het aantal manieren om de functies te verdelen:

$$N(v \ s \ p) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Let op:

- Als je de voorzitter kiest, mag deze gekozen worden uit 6 personen;
- Als je de secretaris kiest, zijn er nog 5 personen over om uit te kiezen;
- Als je de penningmeester kiest, zijn er nog 4 personen over om uit te kiezen.

Dit is een **variatie** van 3 uit 6. Er wordt nu gekozen **zonder herhaling**. Een persoon die eenmaal gekozen is, mag niet meer opnieuw gekozen worden. De **volgorde is van belang**.

1.2 Variaties en herhalingsvariaties [1]

Voorbeeld 2:

Een internetwinkel die boeken verkoopt, geeft elk boek een unieke productcode.
De productcode bestaat uit 2 letters – 2 cijfers – 3 letters;
Alle cijfers mogen gebruikt worden;
Alle letters (behalve de I en de O mogen gebruikt worden);
Bereken het aantal mogelijke productcodes.

$$N(11\ c\ c\ 111) = 24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^5 \cdot 10^2 = 796.262.400$$

Let op:

- Als je een letter of cijfer gekozen hebt, mag je deze de volgende keer weer opnieuw kiezen.

Dit is een **herhalingsvariatie**. Er wordt nu gekozen **met herhaling**. Een letter of cijfer die eenmaal gekozen is, mag weer opnieuw gekozen worden. De **volgorde is van belang**.

1.2 Variaties en herhalingsvariaties [2]

Voorbeeld 1:

Een bestuur bestaat uit 6 personen. Uit deze 6 personen wordt eerst een voorzitter, dan een secretaris en tot slot een penningmeester gekozen.

Bereken het aantal manieren om de functies te verdelen:

$$\text{Aantal} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \qquad \left(6P3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6!}{3!} \right)$$

Let op:

- De volgorde is in dit voorbeeld van belang;
- Herhalingen zijn niet toegestaan;
- Er zijn nu 120 rangschikkingen of permutaties mogelijk;
- Het aantal **permutaties** van 3 uit 6, ofwel het aantal **rangschikkingen** van drie dingen die je uit zes dingen kiest, is $6 \cdot 5 \cdot 4$;
- Het aantal **permutaties** van k uit n , ofwel het aantal **rangschikkingen** van k

dingen die je uit n dingen kiest, is:
$$\left(nPk = \frac{n!}{(n-k)!} \right)$$

1.2 Variaties en herhalingsvariaties [2]

Voorbeeld 2:

Een bestuur bestaat uit 6 personen. Uit deze 6 personen wordt eerst een voorzitter, dan een secretaris en dan een penningmeester gekozen. Daarna volgen een eerste, tweede en derde bestuurslid

Bereken het aantal manieren om de functies te verdelen:

$$\text{Aantal} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Definitie permutaties:

- Het aantal permutaties van n dingen, dus het aantal rangschikkingen van n dingen is: $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$;
- Dit wordt ook geschreven als $n!$ (n -faculteit).

1.2 Variaties en herhalingsvariaties [2]

Permutaties op de GR:

Bereken het aantal permutaties van 7 uit 11 (${}_{11}nPr\ 7$):

Stap 1:

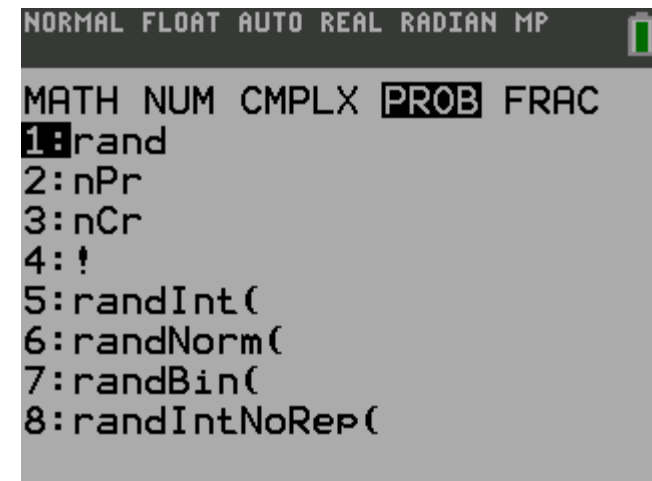
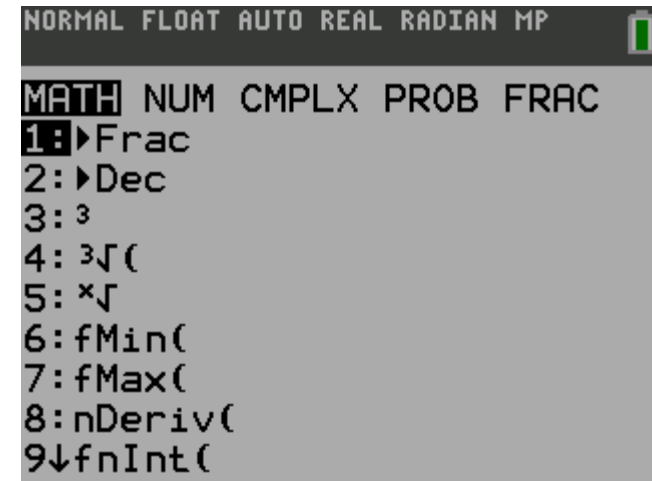
Toets op het beginscherm 11 in.

Stap 2:

Druk op de MATH toets van de GR:

Stap 3:

Ga met de cursor naar PROB:



1.2 Variaties en herhalingsvariaties [2]

Permutaties op de GR:

Bereken het aantal permutaties van 7 uit 11 (${}_{11}nPr\ 7$):

Stap 4:

Selecteer optie 2 en druk op ENTER.

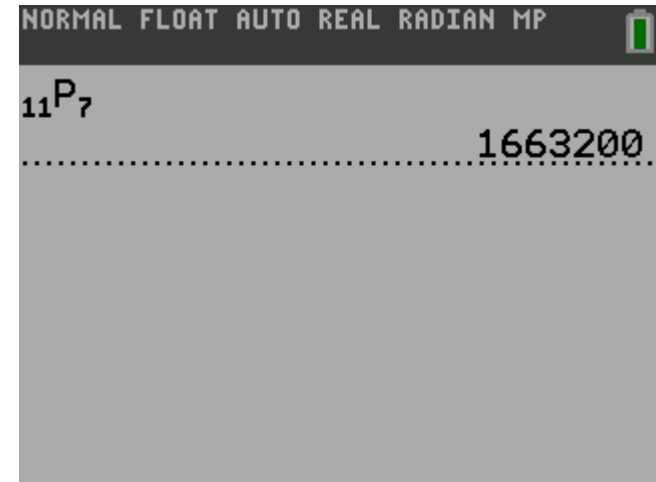
In het scherm staat Nu ${}_{11}P$.

Toets 7 in en druk op ENTER.

Let op:

Bij het uitrekenen van $11!$

kies je de vierde optie bij PROB.



1.3 Combinaties en herhalingscombinaties [1]

Voorbeeld 1:

Een groep bestaat uit 6 personen. Uit deze 6 personen wordt drie personen gekozen in een feestcommissie, die een feest voor moet gaan bereiden. Bereken het aantal manieren om deze drie mensen te kiezen:

- Er zijn geen functies in de commissie, dus de volgorde niet van belang;
- Als Piet, Kees en Jan gekozen worden, zijn de volgende keuzes dus gelijk aan elkaar: JKP, JPK, KJP, KPJ, PJK, PKJ;
- Elke volgorde komt nu $3! = 6$ keer teveel voor;
- Omdat de **volgorde niet belang** is, gebruik je **combinaties**;
- **Herhalingen zijn niet toegestaan**;
- Je rekent het aantal combinaties van 3 uit 6 uit (${}^6\text{Cr } 3$).

$$\text{Aantal} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot \frac{3!}{3! \cdot 3!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

In het algemeen geldt dat het aantal combinaties van k uit n gelijk is aan:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

1.3 Combinaties en herhalingscombinaties [1]

Combinaties op de GR:

Bereken het aantal combinaties van 7 uit 11 (${}_{11}nCr\ 7$):

Stap 1:

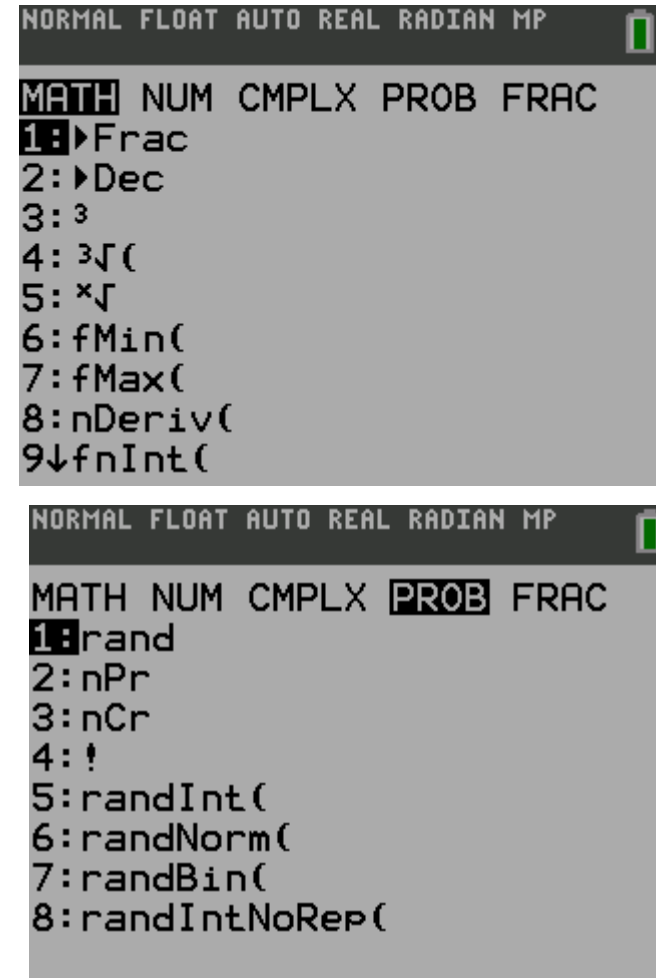
Toets op het beginscherm 11 in.

Stap 2:

Druk op de MATH toets van de GR:

Stap 3:

Ga met de cursor naar PROB:



1.3 Combinaties en herhalingscombinaties [1]

Combinaties op de GR:

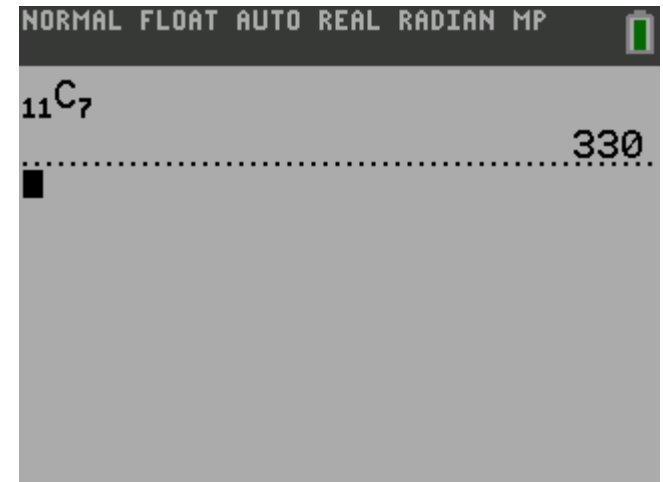
Bereken het aantal combinaties van 7 uit 11 (${}_{11}nCr\ 7$):

Stap 4:

Selecteer optie 3 en druk op ENTER.

In het scherm staat $Nu\ {}_{11}C_7$.

Toets 7 in en druk op ENTER.



1.3 Combinaties en herhalingscombinaties [2]

Voorbeeld 1:

Een rij bestaat uit 9 letters. Op elke plek in deze rij moet de letter A of B komen te staan.

Hoeveel rijen zijn er mogelijk met 4 A's en 5 B's?

$$\text{Aantal} = \binom{9}{4} \binom{5}{5} = 126 \quad \text{of} \quad \binom{9}{5} \binom{4}{4} = 126$$

Je kunt dus eerst 4 plaatsen kiezen waar de A's komen staan en dan de B's op de vijf resterende plaatsen wegzetten. Je kunt ook eerst 5 plaatsen kiezen waar de B's komen te staan en dan de A's op de vier overige plaatsen wegzetten.

Voorbeeld 2:

Hoeveel rijen zijn er mogelijk met 2 A's en 7 B's?

$$\text{Aantal} = \binom{9}{2} \binom{7}{7} = 36 \quad \text{of} \quad \binom{9}{7} \binom{2}{2} = 36$$

1.3 Combinaties en herhalingscombinaties [2]

Voorbeeld 3:

Een rij bestaat uit 9 letters. Op elke plek in deze rij moet de letter A of B komen te staan.

Hoeveel rijen zijn er mogelijk met op elke plek een A of een B?

Antwoordmogelijkheid 1:

$$\text{Aantal} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 512$$

Antwoordmogelijkheid 2:

Op elke plek heb je twee keuzes (A of B):

$$\text{Aantal} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$$

1.3 Combinaties en herhalingscombinaties [2]

Voorbeeld 4

Een rij bestaat uit 9 letters. Op elke plek in deze rij moet de letter A, B of C komen te staan. Hoeveel rijen zijn er mogelijk met 3 A's, 4 B's en 2 C's?

$$\text{Aantal} = \binom{9}{3} \binom{6}{4} \binom{2}{2} = 1260 \quad \text{of} \quad \binom{9}{4} \binom{5}{2} \binom{3}{3} = 1260$$

Je kunt dus eerst 3 plaatsen kiezen waar de A's komen staan en dan 4 plaatsen voor de B's en op de resterende 2 plaatsen komen C's te staan.

Je kunt ook eerst de 4 plaatsen kiezen waar de B's komen te staan en dan de 2 plaatsen waar de C's komen te staan. Op de resterende 3 plaatsen komen dan A's te staan.

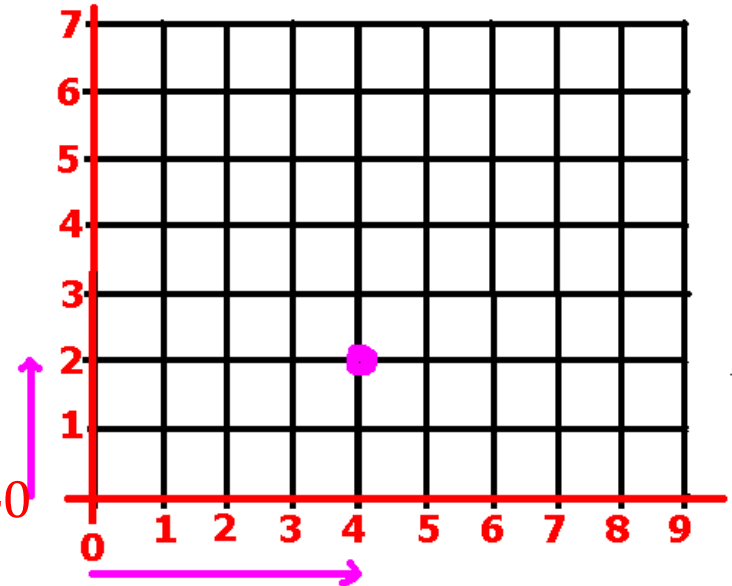
1.3 Combinaties en herhalingscombinaties [2]

Voorbeeld 5:

Bereken het aantal mogelijke routes van (0,0) naar (9,7) zonder dat er een omweg gemaakt wordt.

Om van (0,0) naar (9,7) te gaan, moet je altijd 9 keer naar rechts en 7 keer omhoog.

Het aantal routes is nu: $\binom{16}{9} = \binom{16}{7} = 11.440$



Voorbeeld 6:

Bereken het aantal mogelijke routes van (0,0) naar (9,7) via het punt (4,2)

Om van (0,0) naar (4,2) te gaan, moet je altijd 4 keer naar rechts en 2 keer omhoog. Om van (4,2) naar (9,7) te gaan, moet je altijd 5 keer naar rechts en 5 keer omhoog.

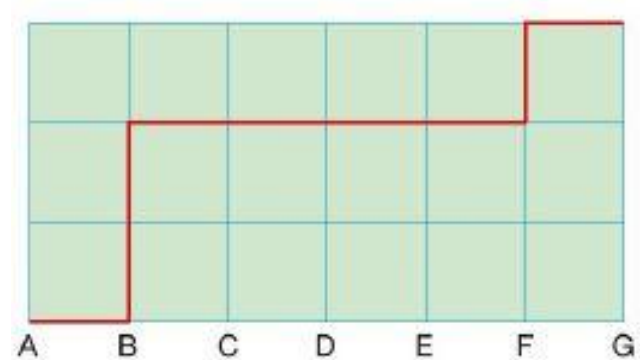
Het aantal routes is nu: $\binom{6}{4} \binom{10}{5} = 3.780$

1.3 Combinaties en herhalingscombinaties [3]

Voorbeeld:

In een carnavalsvereniging moeten drie maskers gemaakt worden. Dit kan door zeven personen (A t/m G) gebeuren. Een persoon kan meerdere maskers maken.

In het voorbeeld rechts maakt B twee maskers en F één masker.



Er zijn in totaal $\binom{7-1+3}{3} = \binom{9}{3}$ mogelijkheden om deze klus te verdelen, want dit is het aantal mogelijke routes in het rooster.

Let op: De volgorde is niet van belang en herhalingen zijn toegestaan.

Algemeen:

Het aantal **herhalingscombinaties** van k uit n , ofwel het aantal manieren om k elementen te kiezen uit n elementen waarbij de **volgorde niet van belang** is en

waarbij **herhalingen zijn toegestaan** is $\binom{n-1+k}{k}$

1.4 Variaties en combinaties toepassen [1]

Voorbeeld 1:

Peter doet mee aan een loterij. In totaal zijn er 50 loten. Van de 50 loten zijn er 10 loten die recht geven op een prijs. Peter koopt 5 loten.

Bereken hoeveel mogelijkheden er zijn dat Peter minstens 4 keer prijs heeft:

$$\begin{aligned}\text{Aantal} &= \text{Aantal keer 4 prijs} + \text{Aantal keer 5 prijs} \\ &= \binom{10}{4} \binom{40}{1} + \binom{10}{5} \binom{40}{0} = 8.400 + 252 = 8.652\end{aligned}$$

Let op:

De volgorde is niet van belang en herhalingen zijn niet toegestaan, dus je mag nu combinaties gebruiken.

1.4 Variaties en combinaties toepassen [2]

Voorbeeld 2:

In een klas zitten 20 leerlingen. Voor de komende schoolreis zijn er drie Bestemmingen:

6 leerlingen mogen naar Antwerpen;

9 leerlingen mogen naar Utrecht;

5 leerlingen mogen naar Den Haag.

Bereken op hoeveel verschillende manieren de klas ingedeeld kan worden:

$$\text{Aantal} = \binom{20}{6} \binom{14}{9} \binom{5}{5} = 77.597.520$$

Let op:

- De volgorde is niet van belang en herhalingen zijn niet toegestaan, dus je mag nu combinaties gebruiken;
- Als de 6 leerlingen die naar Antwerpen gaan gekozen zijn, blijven er nog 14 leerlingen over. Hieruit worden er 9 gekozen die naar Utrecht gaan. Enz.;
- Het maakt niet uit, welke groep je als eerste kiest. Je mag dus ook eerst de 9 leerlingen die naar Utrecht gaan kiezen, dan de 6 leerlingen die naar Antwerpen gaan en dan de 5 leerlingen die naar Den Haag gaan.

1.4 Variaties en combinaties toepassen [3]

Voorbeeld 1:

Bereken het aantal rangschikkingen van het woord WISKUNDE.

$$\text{Aantal} = 8! = 40.320$$

Voorbeeld 2:

Bereken het aantal rangschikkingen van het woord SCHEIKUNDE

Let op:

- De letter E komt twee keer voor!!!;
- Elke oplossing komt dus $2! = 2$ keer voor ($\text{SCHE}_1\text{IKUNDE}_2$, $\text{SCHE}_2\text{IKUNDE}_1$).

$$\text{Aantal} = \frac{10!}{2!} = 1.814.400$$

1.4 Variaties en combinaties toepassen [3]

Voorbeeld 3:

Bereken het aantal rangschikkingen van het woord NATUURKUNDE.

Let op:

- De letter N komt twee keer voor;
- Elke oplossing komt dus $2! = 2$ keer voor;
- De letter U komt drie keer voor;
- Elke oplossing komt dus $3! = 6$ keer voor;
- Elke oplossing komt dus $2! \cdot 3!$ keer voor.

$$\text{Aantal} = \frac{11!}{2!3!} = 3.326.400$$

Algemeen:

Het aantal rangschikkingen van n dingen waarvan er p gelijk zijn en de

Rest verschillend is $\frac{n!}{p!}$