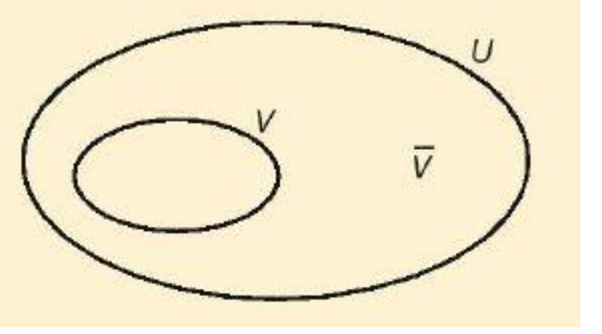
3.0 Voorkennis



De vereniging van de verzamelingen V en $\overline{V}$ is gelijk aan de uitkomstenverzameling U in het plaatje hiernaast.
De doorsnede van de verzamelingen V en $\overline{V}$ is een lege verzameling.

Het **complement** van de verzameling V is de verzameling $\overline{V}$
Dit zijn **alle** elementen van de uitkomstenverzameling U die niet in V zitten.

Er geldt: $\overline{V} = U \setminus V$

3.0 Voorkennis

Je weet wat variaties, permutaties, herhalingsvariaties, combinaties en herhalingscombinaties zijn.

<table>
<tr><th colspan="4">KIES k ELEMENTEN UIT EEN VERZAMELING VAN n ELEMENTEN</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">volgorde van belang?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>ja</td><td>nee</td></tr>
<tr><td rowspan="2">herhalingen toegestaan?</td><td>nee</td><td>$N(\text{variaties}) = n\text{P}k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
$k = n$ geeft $N(\text{permutaties}) = n!$</td><td>$N(\text{combinaties}) =$
$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$</td></tr>
<tr><td>ja</td><td>$N(\text{herhalingsvariaties}) = n^k$</td><td>$N(\text{herhalingscombinaties}) =$
$\binom{n-1+k}{k}$</td></tr>
</table>

3.1 Het kansbegrip [1]

<u>Voorbeeld 1:</u>
Als je gooit met twee dobbelstenen zijn er in totaal $6 \cdot 6 = 36$ **mogelijke uitkomsten**. Deze staan in het rooster hiernaast. Dit is een **samengesteld kansexperiment**.

		Eerste steen					
		1	2	3	4	5	6
Tweede steen	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

De uitkomstenverzameling is gelijk aan:
$U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
en dus $\#(U) = 36$

De gebeurtenis “som is 6” komt vijf keer voor. Het aantal **gunstige uitkomsten** is 5.

Er geldt nu dat de kans op “som is 6” gelijk is aan: P(som is 6) = $\frac{5}{36}$

<u>Kansdefinitie van Laplace:</u> Bij een kansexperiment met uitkomsten die allemaal even waarschijnlijk zijn is de kans op een gebeurtenis G gelijk aan:

$$P(G) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}} = \frac{\#(G)}{\#(U)}$$

3.1 Het kansbegrip [1]

<u>Voorbeeld 2:</u>
Er wordt gegooid met drie dobbelstenen met elk zes ogen.
Bereken de kans dat de som van de ogen minstens 16 is.

<u>Stap 1:</u>
Aantal mogelijke uitkomsten = $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

<u>Stap 2:</u>
Aantal gunstige uitkomsten = 10

18 ->666
17 -> 566, 656, 665
16 -> 664, 646, 466, 655, 565, 556

<u>Stap 3:</u>
P(som minstens 16) = $\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$

Dit antwoord is **exact** (Niet afgerond)

3.1 Het kansbegrip [2]

Definitie:
Er is sprake van een **samengesteld kansexperiment** als je meerdere experimenten tegelijkertijd uitvoert:
- Het gooien met een dobbelsteen en een muntstuk;
- Het gooien met twee dobbelstenen.

Voorbeeld:
Bereken de kans op vier of meer keer munt bij het gooien met zes muntstukken.

Stap 1:
Aantal mogelijke uitkomsten = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$

3.1 Het kansbegrip [2]

<u>Voorbeeld:</u>
Bereken de kans op vier of meer keer munt bij het gooien met zes muntstukken.

<u>Stap 2:</u>
Aantal gunstige uitkomsten = 22

6 keer munt => MMMMMM 1 mogelijkheid
5 keer munt => KMMMMM, MKMMMMM, …..

Je moet steeds één plek kiezen waar de K komt te staan. Dit kan op $\binom{6}{1}$ = 6 manieren

4 keer munt => KKMMMM, KMKMMM, ….

Je moet steeds twee plekken kiezen waar de K komt te staan.

Er zijn $\binom{6}{2} = 15$ manieren.

<u>Stap 3:</u>
P(vier of meer keer munt bij zes muntstukken) = $\frac{22}{64} = \frac{11}{32}$

3.2 Empirische Kansen [1]

In de opgaven tot nu toe was er steeds sprake van een **theoretische kans**, ook wel **a priori kans** genoemd. Vooraf was al precies duidelijk wat de kans op een bepaalde gebeurtenis zou zijn.

Er zijn echter ook situaties waarin van te voren niet duidelijk is wat de kans op een bepaalde gebeurtenis zal zijn:

- De kans dat een opgegooide punaise met de punt omhoog blijft liggen;
- De kans dat een auto die voorbij rijdt een rode kleur heeft;
- De kans op een meisje.

Wanneer je deze kansen uit wilt rekenen zul je een bepaald kansexperiment (het opgooien van een punaise) heel vaak moeten herhalen of je moet Gebruik maken van gegevens uit het verleden (de kans op een meisje).
In dit geval is er sprake van een **empirische kans**.

Hoe vaker je een experiment met een onbekende kans herhaalt, des te dichter zal de gevonden kans bij de werkelijke kans in de buurt liggen.

3.2 Empirische Kansen [1]

<u>Empirische wet van de grote aantallen:</u>
Door een kansexperiment heel vaak uit te voeren, komt de **relatieve frequentie** van een gebeurtenis steeds dichter bij de kans op die gebeurtenis te liggen.

Het is echter niet altijd mogelijk om een kansexperiment vaak te herhalen om zo achter een kans te komen:

- De kans dat een dijk doorbreekt bij een bepaalde waterstand;
- De kans dat een kerncentrale ontploft;
- De kans dat een vliegtuig neerstort.

In deze gevallen wordt gebruik gemaakt van software. Er vindt dan een **simulatie** van een bepaalde gebeurtenis plaats om zo de daadwerkelijke kans te kunnen berekenen. Maar dit blijft natuurlijk altijd maar een simulatie.

3.2 Empirische Kansen [2]

Voorbeeld:
De onderstaande tabel geeft van een groep van 170 leerlingen aan hoe oud deze leerlingen zijn en hoeveel van deze leerlingen er werken/niet-werken.

	Werken	Niet-werken	Totaal
15 jaar	20	40	60
16 jaar	28	32	60
17 jaar	35	15	50
Totaal	83	87	170

P(Leerling werkt) = $\frac{83}{170} \approx 0{,}488$

P(Leerling is 15 EN werkt) = $\frac{20}{170} \approx 0{,}118$

[In dit geval kijk je naar de volledige groep]

3.2 Empirische Kansen [2]

Voorbeeld:

	Werken	Niet-werken	Totaal
15 jaar	20	40	60
16 jaar	28	32	60
17 jaar	35	15	50
Totaal	83	87	170

P(15 jarige leerling DIE werkt) = P(15 jarige leerling werkt) = $\frac{20}{60} \approx 0{,}333$

[In dit geval kijk je enkel naar de beperkte groep 15 jarige leerlingen]

P(Werkende leerling DIE 15 jaar is) = P(Werkende leerling is 15 jaar) = $\frac{20}{83} \approx 0{,}241$

[In dit geval kijk je enkel naar de beperkte groep werkende leerlingen]

Dit zijn voorbeelden van **voorwaardelijke kansen**.
Bij een voorwaardelijke kans beperk je je tot een deelgroep. Je moet dan delen door de frequentie van deze deelgroep.

3.2 Empirische Kansen [3]

Voorbeeld:
Onder 527 mannen en 473 vrouwen is een onderzoek gedaan. Hieruit is gekomen dat 49 personen kleurenblind zijn. Van de mannen is 7,6% kleurenblind.
Maak een kruistabel met behulp van deze gegevens:

Stap 1:
Maak een kruistabel en vul de hier bekende gegevens in:

	Man	Vrouw	Totaal
Kleurenblind	40		49
N. Kleurenblind			
	527	473	

3.2 Empirische Kansen [3]

<u>Stap 2:</u>
Bereken de ontbrekende gegevens:

(1) Totaal aantal personen = 527 + 473 = 1000
(2) Aantal mensen niet kleurenblind = 1000 – 49 = 951
(3) Aantal mannen niet kleurenblind = 527 – 40 = 487
(4) Aantal vrouwen kleurenblind = 49 – 40 = 9
(5) Aantal vrouwen niet kleurenblind = 473 – 9 = 464

	Man	Vrouw	Totaal
Kleurenblind	40	9 (4)	49
N. Kleurenblind	487 (3)	464 (5)	951 (2)
	527	473	1000 (1)

3.2 Empirische Kansen [3]

	Man	**Vrouw**	**Totaal**
Kleurenblind	40	9	49
N. Kleurenblind	487	464	951
	527	473	1000

P(kleurenblinde man) = $\frac{40}{1000} = 0{,}04$

P(kleurenblinde, die man is) = $\frac{40}{49} \approx 0{,}816$

[Je gebruikt nu de deelgroep kleurenblinde personen]

P(man die kleurenblind is) = $\frac{40}{527} \approx 0{,}0759$

[Je gebruikt nu de deelgroep mannen]

3.2 Empirische Kansen [4]

Voorbeeld 1:
Onder 260 personen is een onderzoek verricht naar hun stemgedrag.

	Links	Rechts	Totaal
Mannen	25	75	100
Vrouwen	40	120	160
	65	195	260

P(man die links stemt) = $\frac{25}{100} = 0{,}25$

P(vrouw die links stemt) = $\frac{40}{160} = 0{,}25$

Het geslacht heeft dus geen invloed op het stemgedrag van iemand.
De gebeurtenissen "geslacht persoon" en "stemgedrag persoon" zijn **onafhankelijk**.

Algemeen:
A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen betekent: $P(A \mid B) = P(A)$

3.2 Empirische Kansen [4]

Voorbeeld 2:

	Man	Vrouw	Totaal
Kleurenblind	40	9	49
N. Kleurenblind	487	464	951
	527	473	1000

P(man is kleurenblind) = $\frac{40}{527} \approx 0{,}0759$

P(vrouw is kleurenblind) = $\frac{9}{473} \approx 0{,}0190$

Het geslacht heeft dus een invloed op het wel of niet kleurenblind zijn.
De gebeurtenissen “geslacht persoon” en “kleurenblind?” zijn **afhankelijk**.

3.3 Het vaasmodel en de productregel [1]

<u>Voorbeeld 1:</u>
Gegeven is een vaas met 15 knikkers (10 rood, 3 groen en 2 blauw).
3 knikkers worden uit de vaas gehaald.

Bereken de kans op 3 rode knikkers:

<u>Stap 1:</u>
Aantal mogelijke uitkomsten = $\binom{15}{3}$

[Er is sprake van trekken **zonder teruglegging** waarbij **volgorde niet van belang** is.]

<u>Stap 2:</u>
Aantal gunstige uitkomsten = $\binom{10}{3}\binom{5}{0}$

[De 3 knikkers moeten uit de groep van 10 rode getrokken worden. Uit de groep van 5 niet-rode knikkers wordt er geen één getrokken.]

<u>Stap 3:</u>
P(3 rode knikkers) = $\dfrac{\binom{10}{3}\binom{5}{0}}{\binom{15}{3}} \approx 0{,}264$

3.3 Het vaasmodel en de productregel [1]

Samengestelde kansexperimenten zijn kansexperimenten, die uit twee of meer experimenten bestaan:

- Het gooien met vier dobbelstenen;
- Het gooien met een dobbelsteen en een geldstuk;
- Het vijf keer draaien aan een rad.

Er is steeds sprake van voorbeelden en opgaven waarbij de verschillende kansexperimenten elkaar niet beïnvloeden. De experimenten zijn dus **onafhankelijk** van elkaar.

Wanneer dit niet het geval is, is er sprake van kansexperimenten, die **afhankelijk** van elkaar zijn.

Bij samengestelde kansexperimenten maak je gebruik van de productregel.

Productregel:
Voor de gebeurtenis G_1 bij het ene kansexperiment en de gebeurtenis G_2 bij het andere kansexperiment geldt:
$P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$

3.3 Het vaasmodel en de productregel [1]

Voorbeeld 2:
Gegeven is een vaas met 15 knikkers (10 rood, 3 groen en 2 blauw).
3 knikkers worden uit de vaas gehaald.

Bereken de kans op 2 blauwe knikkers:

Stap 1:
Aantal mogelijke uitkomsten = $\binom{15}{3}$

[Er is sprake van trekken zonder teruglegging waarbij volgorde niet van belang is.]

Stap 2:
Aantal gunstige uitkomsten = $\binom{2}{2}\binom{13}{1}$

[2 knikkers komen uit de groep van 2 blauwe. 1 knikker komt uit de groep van 13 rode en groene knikkers]

Stap 3:
P(2 blauwe knikkers) = $\dfrac{\binom{2}{2}\binom{13}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0{,}0286$

3.3 Het vaasmodel en de productregel [1]

Let op (Voorbeeld 1):

$$P(\text{3 rode knikkers}) = \frac{\binom{10}{3}\binom{5}{0}}{\binom{15}{3}} \approx 0{,}264$$

10 + 5 = 15 EN 3 + 0 = 3

Let op (Voorbeeld 2):

$$P(\text{2 blauwe knikkers}) = \frac{\binom{2}{2}\binom{13}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0{,}0286$$

2 + 13 = 15 EN 2 + 1 = 3

3.3 Het vaasmodel en de productregel [2]

Voorbeeld:
Een groep van 25 personen bestaat uit 10 mannen en 15 vrouwen. Uit deze groep worden 5 personen gekozen.

Dit kun je vergelijken met een vaas met 25 knikkers (10 rood en 15 groen), waaruit je er 5 pakt.

$$P(5 \text{ mannen}) = \frac{\binom{10}{5}\binom{15}{0}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}00474$$

$$P(2 \text{ vrouwen}) = \frac{\binom{10}{3}\binom{15}{2}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}237$$

Let op:
$\binom{n}{0}$ is gelijk aan 1 voor elke n. Deze term mag je dus weglaten.

3.3 Het vaasmodel en de productregel [3]

Voorbeeld 1:
Een gokkast bestaat uit een drietal schijven die ronddraaien.
Op schijf 1 staan: 5 bananen, 4 appels, 3 citroenen en 3 kersen;
Op schijf 2 staan: 7 bananen, 3 appels, 2 citroenen en 3 kersen;
Op schijf 3 staan: 1 banaan, 5 appels, 6 citroenen en 3 kersen.

a) Bereken de kans op 3 keer appel:

P(3 keer appel) = P(aaa) = $\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{60}{3375} \approx 0{,}0178$

b) Bereken de kans op 0 keer kers:

P(0 keer kers) = $P(\overline{kkk})$ = $\frac{12}{15} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{12}{15} = 0{,}512$

Hier wordt gebruik gemaakt van de **productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen**. Als de gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn geldt:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3.4 De somregel en de complementregel [1]

Voorbeeld 1:
Sander gooit met 2 dobbelstenen. Bereken de kans dat de som van het gegooide aantal ogen 2 of 3 is.

Antwoord 1:

- Aantal mogelijke uitkomsten = $6 \cdot 6 = 36$
- Aantal gunstige uitkomsten = 3 [11 21 12]

- P(som is 2 of 3) = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Antwoord 2:

- Aantal mogelijke uitkomsten = $6 \cdot 6 = 36$
- Aantal gunstige uitkomsten "som is 2" = 1 [11]
- Aantal gunstige uitkomsten "som is 3"= 2 [21 12]

- P(som is 2) + P(som is 3) = $\frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Algemeen:
Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen A en B geldt de somregel:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3.4 De somregel en de complementregel [1]

<u>Voorbeeld 1:</u>
Sander gooit met 2 dobbelstenen. Bereken de kans dat de som of het product van
Het gegooide aantal ogen 4 is.

<u>Antwoord 1:</u>
- Aantal mogelijke uitkomsten = $6 \cdot 6 = 36$
- Aantal gunstige uitkomsten = 5 [13 31 22 14 41]

- $P(\text{som of product is } 4) = \frac{5}{36}$

<u>Antwoord 2:</u>
- Aantal mogelijke uitkomsten = $6 \cdot 6 = 36$
- Aantal gunstige uitkomsten “som is 4” = 3 [13 31 22]
- Aantal gunstige uitkomsten “product is 4”= 3 [14 22 41]

- $P(\text{som is } 4) + P(\text{product is } 4) = \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} \neq \frac{5}{36}$ (?)

<u>Algemeen:</u>
Voor gebeurtenissen A en B, die elkaar niet uitsluiten geldt de aangepaste somregel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \text{P}(A \cap B)$.

3.4 De somregel en de complementregel [1]

In het eerste voorbeeld werd gevraagd naar de volgende gebeurtenissen:

- P(som ogen is 2);
- P(som ogen is 3).

Deze gebeurtenissen hebben geen gemeenschappelijke uitkomsten.
Hierdoor geldt: P(som ogen is 2) + P(som ogen is 3) = P(som ogen is 2 of 3)

In het tweede voorbeeld werd gevraagd naar de volgende gebeurtenissen:

- P(som ogen is 4);
- P(product ogen is 4).

Deze gebeurtenissen hebben wel een gemeenschappelijke uitkomst (2).
Hierdoor geldt: P(som ogen is 4) + P(product ogen is 4) ≠ P(som of product is 4)

3.4 De somregel en de complementregel [2]

Voorbeeld:
Sandra gooit met 4 dobbelstenen. Elke dobbelsteen heeft 6 ogen. Bereken de kans dat de som van de gegooide ogen 22 of minder is.

P(som ogen is 22 of minder) = $P(4) + P(5) + P(6) + \ldots + P(20) + P(21) + P(22)$

Let op:
- Bij het gooien met vier dobbelstenen kan de som van de ogen nooit 1, 2 of 3 zijn;
- Om het antwoord te krijgen, moet je 19 kansen berekenen.

Bij dit soort opgaven kun je gebruik maken van de complementregel:

P(som ogen is 22 of minder) = 1 – P(som ogen is 23 of 24)

Complementregel algemeen:
P(gebeurtenis) = 1 – P(complement gebeurtenis)

3.4 De somregel en de complementregel [2]

Voorbeeld:

Sandra gooit met 4 dobbelstenen. Elke dobbelsteen heeft 6 ogen. Bereken de kans dat de som van de gegooide ogen 22 of minder is.

P(som ogen is 22 of minder) = 1 – P(som ogen is 23 of 24)

Stap 1:

Aantal mogelijke oplossingen = $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$

Stap 2:

Aantal gunstige oplossingen = 5 [6666 5666 6566 6656 6665]

Stap 3:

P(som ≤ 22) = 1 – P(som is 23 of 24) = $1 - \frac{5}{1296} = \frac{1291}{1296}$

Let op:

Je gebruikt hier de somregel: Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen A en B geldt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3.4 De somregel en de complementregel [3]

Voorbeeld:
Een gokkast bestaat uit een drietal schijven die ronddraaien.
Op schijf 1 staan: 5 bananen, 4 appels, 3 citroenen en 3 kersen;
Op schijf 2 staan: 7 bananen, 3 appels, 2 citroenen en 3 kersen;
Op schijf 3 staan: 1 banaan, 5 appels, 6 citroenen en 3 kersen.

a) Bereken de kans op 3 gelijke symbolen:

$P(\text{3 keer gelijk}) = P(\text{aaa}) + P(\text{bbb}) + P(\text{ccc}) + P(\text{kkk}) =$

$$\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{15}\cdot\frac{5}{15}+\frac{5}{15}\cdot\frac{7}{15}\cdot\frac{1}{15}+\frac{3}{15}\cdot\frac{2}{15}\cdot\frac{6}{15}+\frac{3}{15}\cdot\frac{3}{15}\cdot\frac{3}{15}\approx 0{,}0468$$

b) Bereken de kans op één keer banaan:

$P(\text{1 keer banaan}) = P(\text{b}\cancel{\text{b}}\cancel{\text{b}}) + P(\cancel{\text{b}}\text{b}\cancel{\text{b}}) + P(\cancel{\text{b}}\cancel{\text{b}}\text{b}) =$

$$\frac{5}{15}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{14}{15}+\frac{10}{15}\cdot\frac{7}{15}\cdot\frac{14}{15}+\frac{5}{15}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{15}\approx 0{,}468$$

3.5 Voorwaardelijke kansen [1]

Voorbeeld 1:

In een vaas zitten 15 knikkers. 10 van deze knikkers zijn rood en 5 blauw.
Uit deze vaas worden vier knikkers gepakt.
Bereken de kans dat twee rode knikkers worden gepakt.

Stap 1:

P(2 rode knikkers) = P(rr)

Stap 2:

De eerste knikker moet rood zijn.
In de vaas zitten 15 knikkers (10 rood en 5 blauw)

P(eerste knikker rood) = $\frac{10}{15}$

Stap 3:

De tweede knikker moet rood zijn.
In de vaas zitten 14 knikkers (9 rood en 5 blauw)

P(tweede knikker rood | eerste knikker is rood) = $\frac{9}{14}$

3.5 Voorwaardelijke kansen [1]

Voorbeeld 1:

In een vaas zitten 15 knikkers. 10 van deze knikkers zijn rood en 5 blauw.
Uit deze vaas worden vier knikkers gepakt.
Bereken de kans dat twee rode knikkers worden gepakt.

Stap 4:

P(twee rode knikkers) = $\frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14}$

Bij Stap 3

P(tweede knikker rood | eerste knikker rood) is er sprake van een voorwaardelijke kans:

A: de eerste knikker is rood
B: de tweede knikker is rood.

P(tweede knikker rood | eerste knikker rood) = P(A ∩ B) = P(A) · P(B | A)

Dit kan ook genoteerd worden als $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

3.5 Voorwaardelijke kansen [1]

<u>Voorbeeld 2:</u>
Er wordt gegooid met een gewone dobbelsteen en een viervlaksdobbelsteen.
Met één van beide dobbelstenen wordt 4 gegooid.
Bereken exact de kans dat dit met de gewone dobbelsteen was.

<u>Stap 1:</u>
Introduceer de gebeurtenissen:

A: met de gewone dobbelsteen een 4 gooien
B: met één van beide dobbelstenen een 4 gooien.

<u>Stap 2:</u>
Bereken de gevraagde kans $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B)$ = P(4 gooien met gewone dobbelsteen en geen 4 gooien met de viervlaksdobbelsteen) = $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{24}$

$P(B)$ = $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}$$

3.5 Voorwaardelijke kansen [1]

Voor de gebeurtenissen A en B bij een kansexperiment geldt:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \qquad (1)$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Longleftrightarrow P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B) \qquad (2)$$

Het combineren van (1) en (2) met elkaar geeft:

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}$$

Dit is **de regel van Bayes**.

3.5 Voorwaardelijke kansen [2]

Voorbeeld:

Van de bejaarde vrouwen heeft 1 op de 3 osteoporose (botontkalking).
Van de bejaarde mannen heeft 1 op de 5 osteoporose.
Van de bejaarden is 65% vrouw en 35% man.

Bereken de kans dat een bejaarde die osteoporose heeft van het vrouwelijk geslacht is.

A: Heeft osteoporose
B: Van het vrouwelijk geslacht

Gevraagd wordt $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)}$ [Regel van Bayes]

$P(A)$ = P(man heeft osteoporose) + P(vrouw heeft osteoporose)
= $\frac{1}{3} \cdot 0{,}65 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}35 \approx 0{,}287$

$P(B)$ = 0,65
$P(A \mid B)$ = $\frac{1}{3}$

$$P(B \mid A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}65}{\frac{1}{3} \cdot 0{,}65 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}35} \approx 0{,}756$$