

10.0 Voorkennis

Herhaling van rekenregels voor machten:

$$\begin{array}{llll} a^p \cdot a^q = a^{p+q} [1] & \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} [2] & a^0 = 1 \text{ als } a \neq 0 [5] & a^{-p} = \frac{1}{a^p} [6] \\ (a^p)^q = a^{pq} [3] & (ab)^p = a^p b^p [4] & a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} & a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} [8] \end{array}$$

Voorbeeld 1:

Schrijf als macht van a:

$$\frac{1}{a^8} : a^{-3} = a^{-8} : a^{-3} = a^{-8-(-3)} = a^{-5}$$

Voorbeeld 2:

Schrijf zonder negatieve exponenten:

$$\left(\frac{3}{7}a\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{7}a\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{243}a^3} = \frac{243}{27a^3}$$

10.0 Voorkennis

Voorbeeld 3:

Herleid de formule $y = 15(3x^5)^3 \cdot \frac{6}{(3x^3)^3}$ in de vorm $y = ax^n$

$$y = 15 \cdot 27x^{15} \cdot \frac{6}{27x^9} \quad \text{Rekenregel [4]}$$

$$y = 405x^{15} \cdot 6 \cdot \frac{1}{27} \cdot x^{-9} \quad \text{Rekenregel [6]}$$

$$y = 90x^6 \quad \text{Rekenregel [1]}$$

Voorbeeld 4:

Schrijf als macht van x:

$$a^2 \cdot \sqrt[5]{a^2} = a^2 \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{2\frac{2}{5}}$$

10.0 Voorkennis

Algemeen:

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is:

- De gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$;
- De gemiddelde snelheid waarmee y verandert op $[x_A, x_B]$;
- De richtingscoëfficiënt van de lijn AB ;
- De helling van de lijn AB ;

- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

10.1 Raaklijnen en snelheden[1]

Voorbeeld:

Gegeven is de tijd-afstandformule: $s = t^3 + t^2$ met t in seconden en s in meters. Bereken de snelheid op $t = 3$

De snelheid van deze tijd-afstandformule kun je benaderen door het differentiequotiënt op een klein interval rond $t = 3$ te berekenen. Neem bijvoorbeeld het interval $[3; 3,001]$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3,001) - s(3)}{3,001 - 3} \approx \frac{36,033 - 36}{3,001 - 3} \approx 33$$

Hieruit volgt dat de snelheid op $t = 3$ ongeveer 33 m/s is.

Algemeen:

Bij een tijd-afstandformule benader je de snelheid op het tijdstip $t = a$ met het differentiequotiënt op het interval $[a, a + \Delta t]$, met bijvoorbeeld $\Delta t = 0,01$ of $\Delta t = 0,001$

10.1 Raaklijnen en snelheden[2]

Met het differentiequotiënt bereken je de gemiddelde verandering per tijdseenheid.

Voorbeeld: $s = t^2 - t + 0,25$

Differentiequotiënt van s op $[0, 3] =$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = \frac{6,25 - 0,25}{3 - 0} = 2$$

Differentiequotiënt van s op $[2, 3] =$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{6,25 - 2,25}{3 - 2} = 4$$

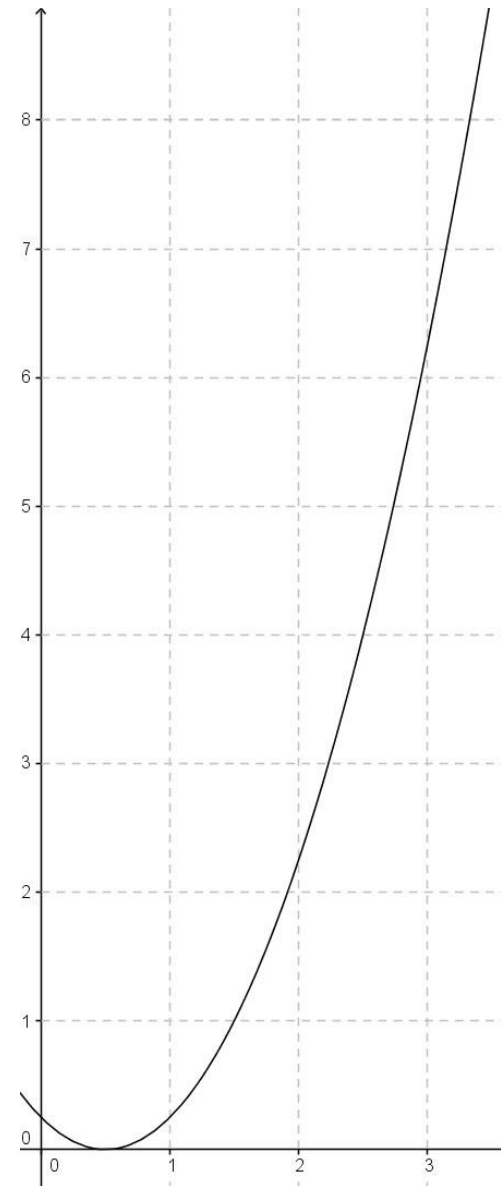
Differentiequotiënt van s op $[2,99 ; 3] =$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(2,99)}{3 - 2,99} = \frac{6,25 - 6,2001}{3 - 2,99} \approx 4,99$$

Algemeen:

In een tijd-afstandsgrafiek is de snelheid $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.

Willem-Jan van der Zanden



10.1 Raaklijnen en snelheden[2]

Voorbeeld:

Zie de grafiek rechts. Schat de snelheid op $t = 3$.

Stap 1:

Teken de raaklijn k in het punt op de grafiek met $t = 3$.

Stap 2:

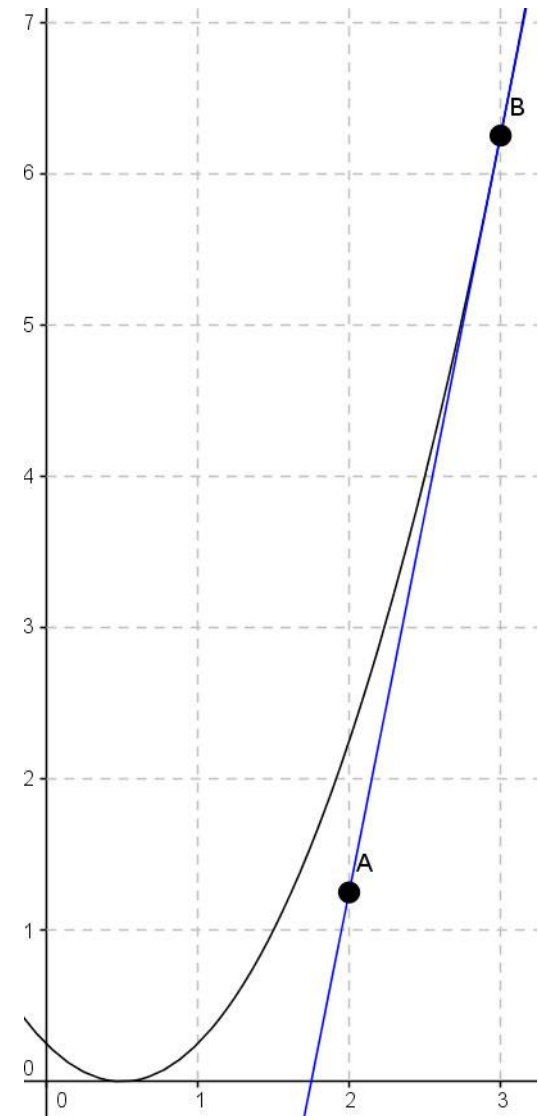
Lees twee punten af die op de raaklijn liggen.

$A(2; 1,25)$ en $B(3; 6,25)$.

Stap 3:

Bereken de snelheid met behulp van de twee punten.

$$\text{Snelheid} = \frac{6,25 - 1,25}{3 - 2} = \frac{5}{1} = 5$$



10.1 Raaklijnen en snelheden[3]

Met het differentiequotiënt bereken je de gemiddelde verandering per tijdseenheid.

Voorbeeld: $f(x) = x^2 - x$

$$\text{Differentiequotiënt van } f(x) \text{ op } [2,99 ; 3] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2,99)}{3 - 2,99} = \frac{6 - 5,9501}{3 - 2,99} \approx 4,99$$

Dit differentiequotiënt geeft een goede benadering van de helling van de grafiek $f(x)$ in het punt $A(3, 6)$.

Wanneer er nu een oneindig klein interval genomen wordt, krijgen we:

- De **richtingscoëfficiënt** van raaklijn van de grafiek in het punt A ;
- De **helling van de grafiek** in A ;
- De snelheid waarmee y verandert voor $x = 3$.
- De notatie hiervan is: $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3}$

10.1 Raaklijnen en snelheden[3]

Voorbeeld:

Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 - 2x - 1$.
Bereken de snelheid waarmee y verandert bij een waarde van x van 5.

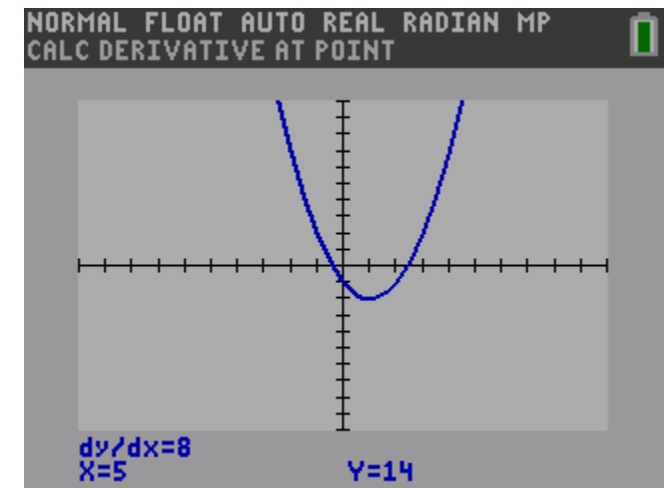
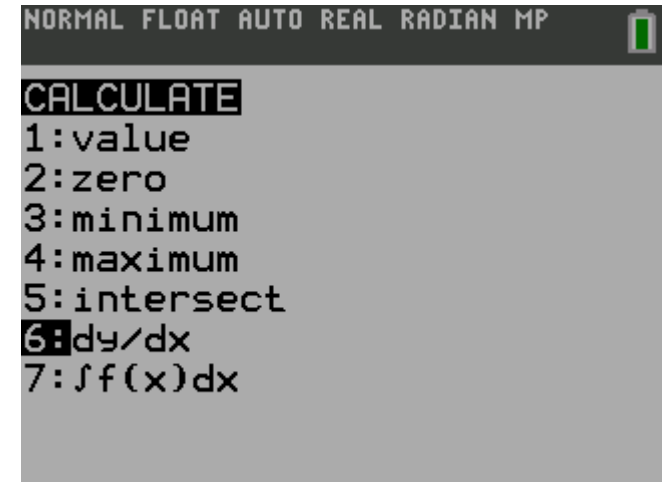
Bereken de richtingscoëfficiënt met de GR:

$$Y= | Y1 = X^2 - 2X - 1$$

2ND | TRACE | 6: dy/dx | ENTER

Toets 5 in | ENTER

$$dy/dx = 8 \text{ dus } rc = 8$$



10.1 Raaklijnen en snelheden[4]

Voorbeeld:

Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

Onderzoek of deze functie toe of afneemt bij een waarde van x van 5.

Berekenen van de richtingscoëfficiënt met de GR geeft:

$Y = | Y1 = X^2 - 2X - 1$

$2ND | TRACE | 6: dy/dx | ENTER$

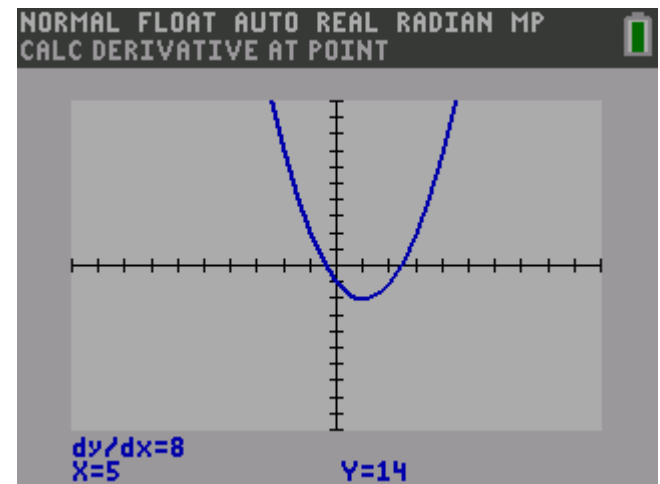
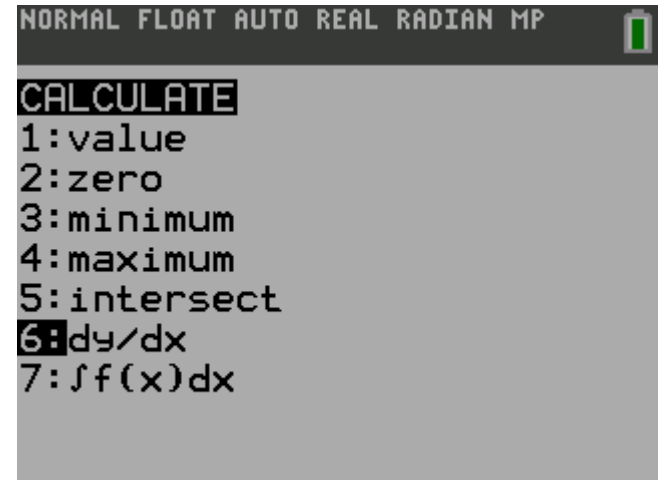
Toets 5 in | ENTER

$dy/dx = 8 (>0)$ dus $f(x)$ neemt toe voor $x = 5$.

Algemeen:

Is $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=a} > 0$, dan neemt y toe voor $x = a$.

Is $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=a} < 0$, dan neemt y af voor $x = a$.



10.1 Raaklijnen en snelheden[5]

Voorbeeld:

Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

Stel de formule op van de raaklijn l van de grafiek in het punt B met $x_B = 5$.

Stap 1:

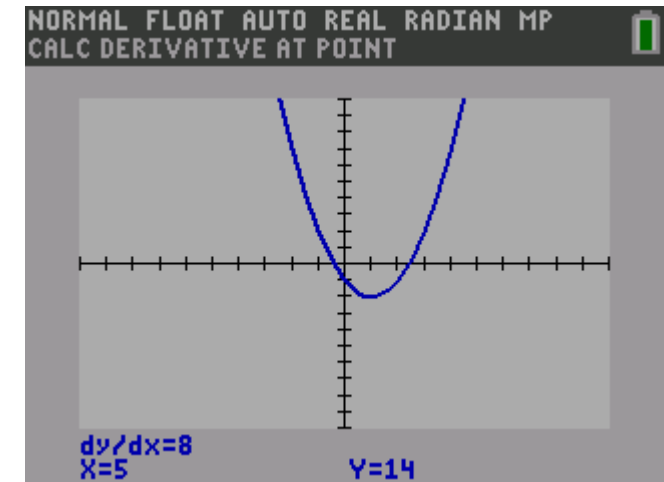
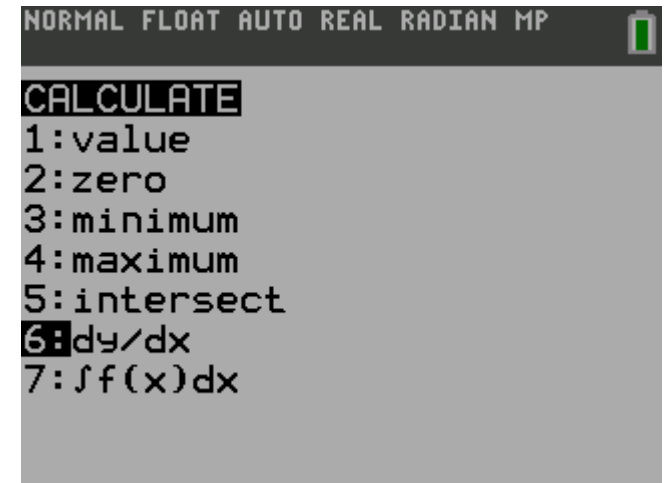
Bereken de richtingscoëfficiënt met de GR:

$$Y= | Y1 = X^2 - 2X - 1$$

2ND | TRACE | 6: dy/dx | ENTER

Toets 5 in | ENTER

$$dy/dx = 8 \text{ dus } rc_B = 8$$



10.1 Raaklijnen en snelheden[5]

Voorbeeld:

Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

Stel de formule op van de raaklijn l van de grafiek in het punt B met $x_B = 5$.

Stap 2:

Bereken de y -coördinaat van het punt B .

$$f(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 - 1 = 14$$

Stap 3:

Stel de vergelijking van raaklijn l : $y = ax + b$ op:

$$l: y = 8x + b$$

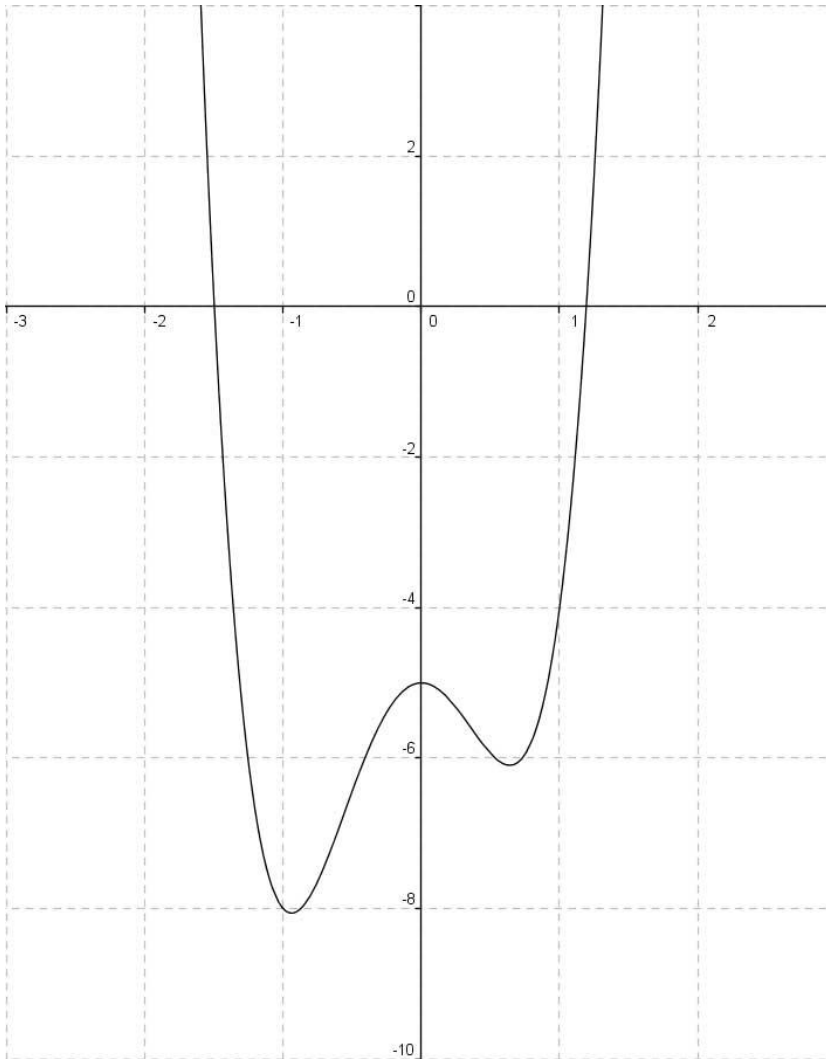
Invullen van het punt $B(5, 14)$ geeft:

$$14 = 8 \cdot 5 + b$$

$$14 = 40 + b$$

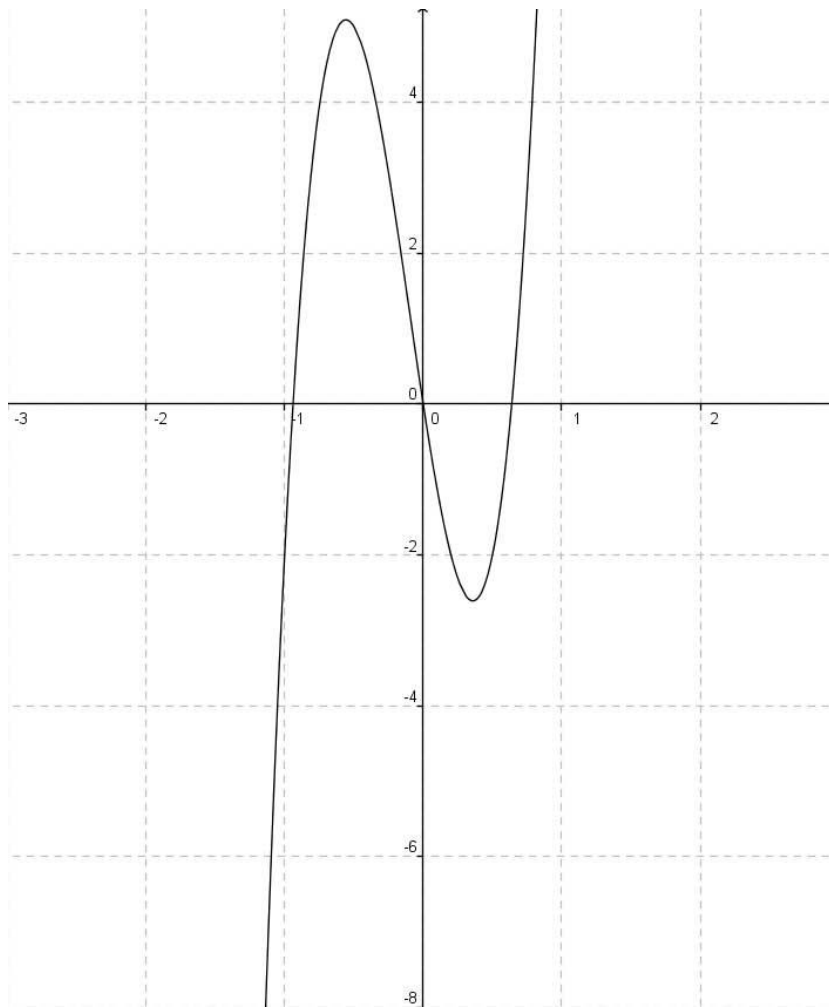
$$b = -26 \quad \Rightarrow \quad l: y = 8x - 26$$

10.2 Hellinggrafieken [1]



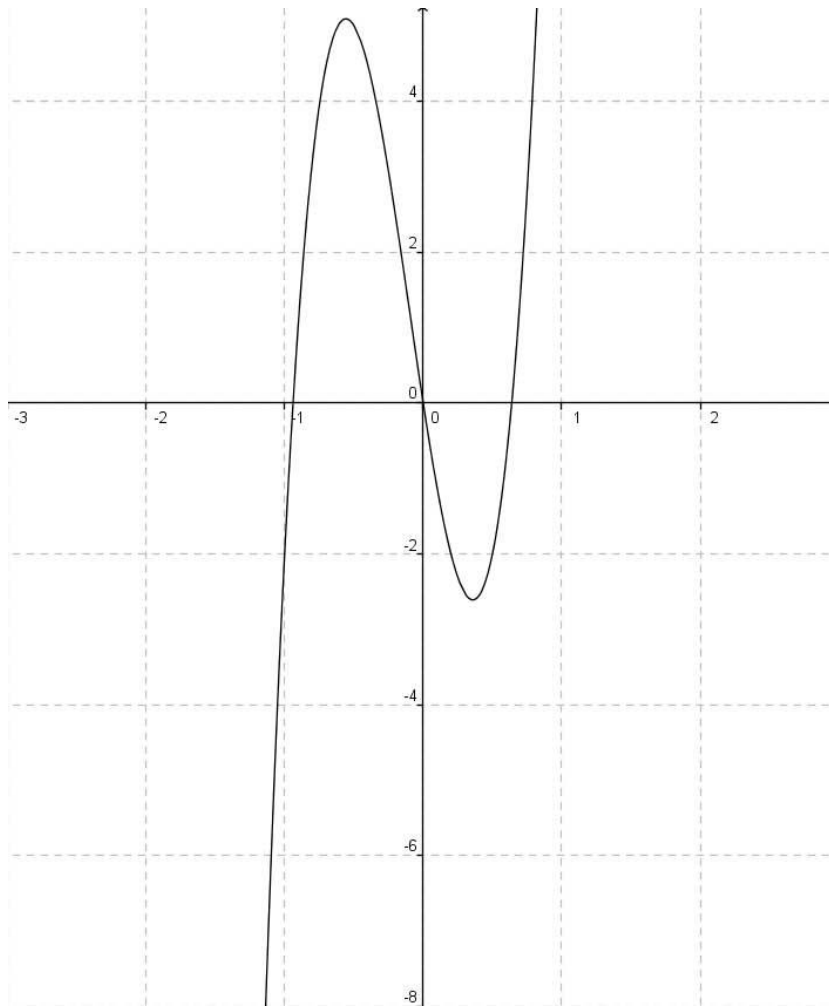
- Links is de grafiek van de functie $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5$ getekend op het interval $[-2, 2]$;
- Deze grafiek heeft drie toppen.
- Op het interval $[-2; -0,94)$ is de grafiek dalend;
- Bij $x = 0,94$ is er een minimum;
- Op het interval $(-0,94; 0)$ is de grafiek stijgend;
- Bij $x = 0$ is er een maximum;
- Op het interval $(0; 0,64)$ is de grafiek dalend;
- Bij $x = 0,64$ is er een minimum;
- Op het interval $(0,64, 2]$ is de grafiek stijgend.

10.2 Hellinggrafieken [1]



- Links is de hellinggrafiek van de functie $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5$ getekend op het interval $[-2, 2]$;
- Deze hellinggrafiek heeft drie snijpunten met de x-as.
- Op het interval $[-2; -0,94)$ is de grafiek dalend. De hellinggrafiek ligt dan onder de x-as;
- Bij $x = 0,94$ is er een minimum. De hellinggrafiek snijdt hier de x-as;
- Op het interval $(-0,94; 0)$ is de grafiek stijgend. De hellinggrafiek ligt dan boven de x-as;
- Bij $x = 0$ is er een maximum. De hellinggrafiek snijdt hier de x-as;

10.2 Hellinggrafieken [1]



- Links is de hellinggrafiek van de functie $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5$ getekend op het interval $[-2, 2]$;
- Deze hellinggrafiek heeft drie snijpunten met de x-as.
- Op het interval $(0; 0,64)$ is de grafiek dalend. De hellinggrafiek ligt hier onder de x-as;
- Bij $x = 0,64$ is er een minimum. De hellinggrafiek snijdt hier de x-as;
- Op het interval $(0,64, 2]$ is de grafiek stijgend. De hellinggrafiek ligt hier boven de x-as.

10.2 Hellinggrafieken [2]

Het plotten van een hellinggrafiek op de GR:

Plot de hellinggrafiek van
 $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5$

Stap 1:

Vul bij Y1 de functie $f(x)$ in:

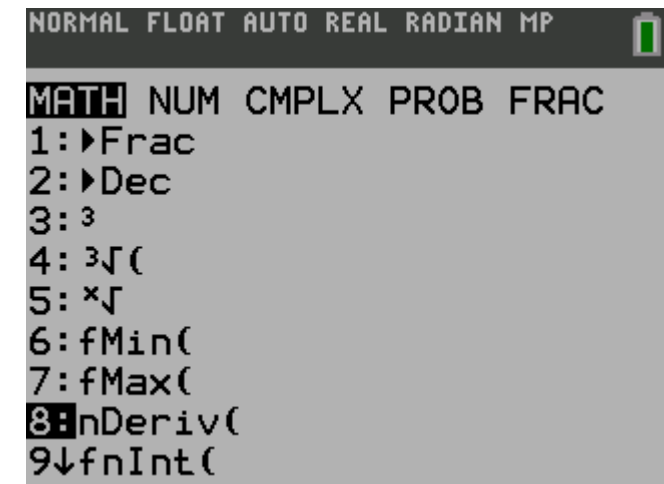
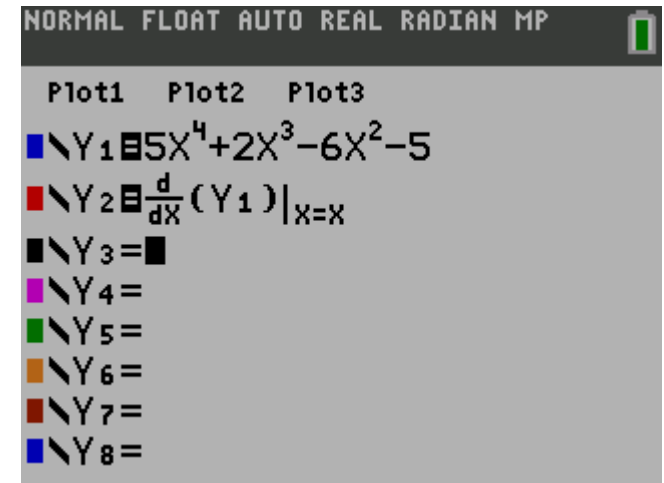
Y= | Y1 = $5X^4 + 2X^3 - 6X^2 - 5$

Stap 2:

Vul bij Y2 in wat er op het eerste plaatje staat

nDerive volgt met:

MATH | MATH | 8:nDerive(



10.2 Hellinggrafieken [2]

Het plotten van een hellinggrafiek op de GR:

Plot de hellinggrafiek van
 $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5$

Stap 2:

Y1 volgt met:

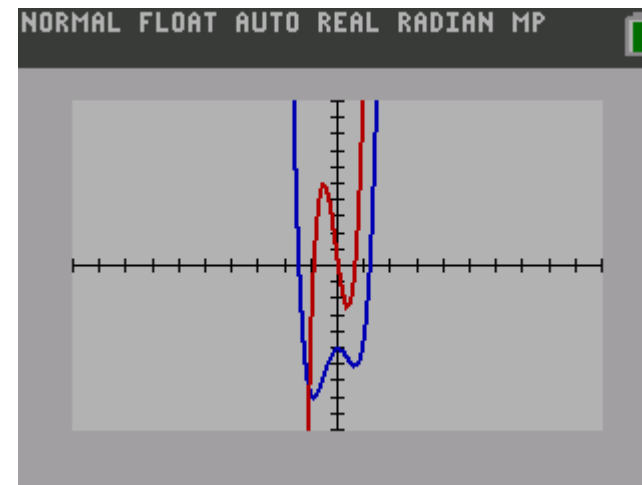
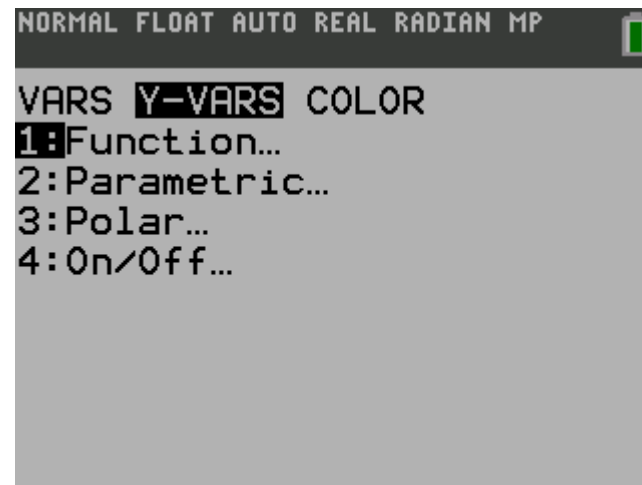
VARs | Y-VARS | 1: Function | 1:Y₁

Stap 3:

Y= laat twee grafieken zien.

De blauwe grafiek is de grafiek van $f(x)$.

De rode grafiek is de hellinggrafiek van $f(x)$.

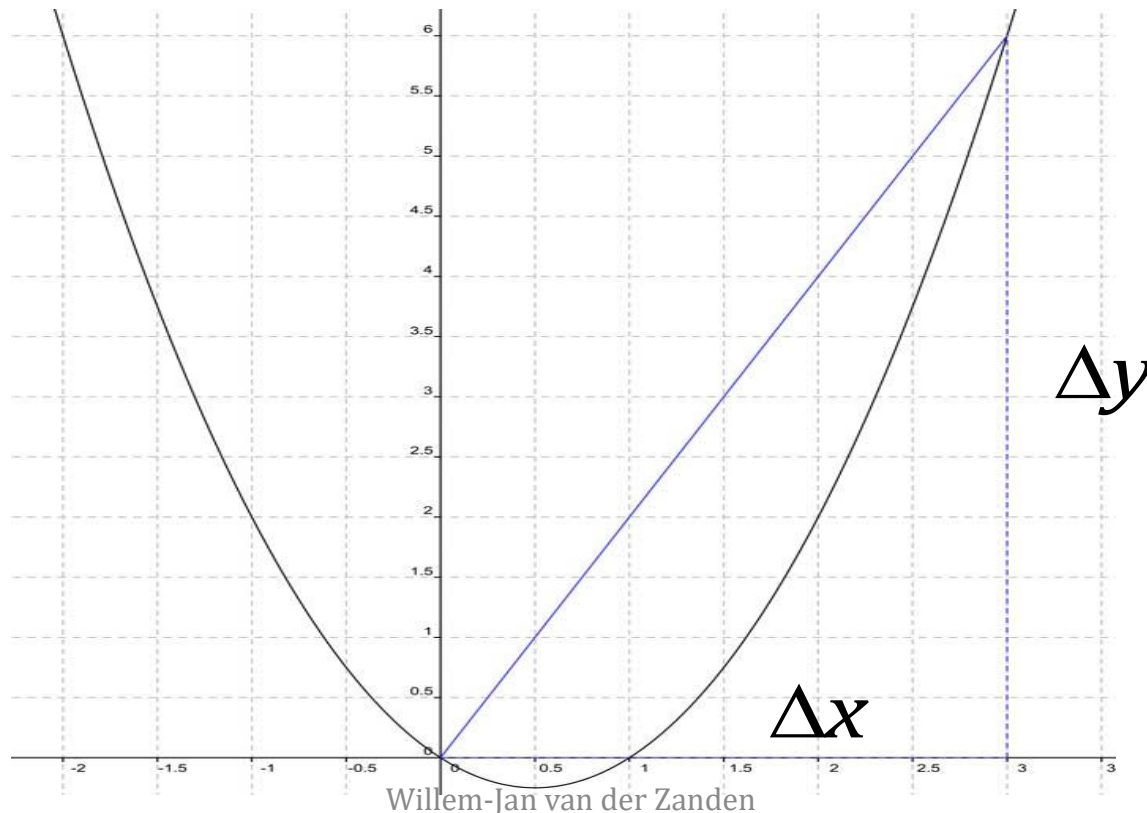


10.2 Hellinggrafieken [3]

Met het differentiequotiënt bereken je de gemiddelde verandering per tijdseenheid.

Voorbeeld: $f(x) = x^2 - x$

$$\text{Differentiequotiënt van } f(x) \text{ op } [0, 3] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{6 - 0}{3 - 0} = 2$$

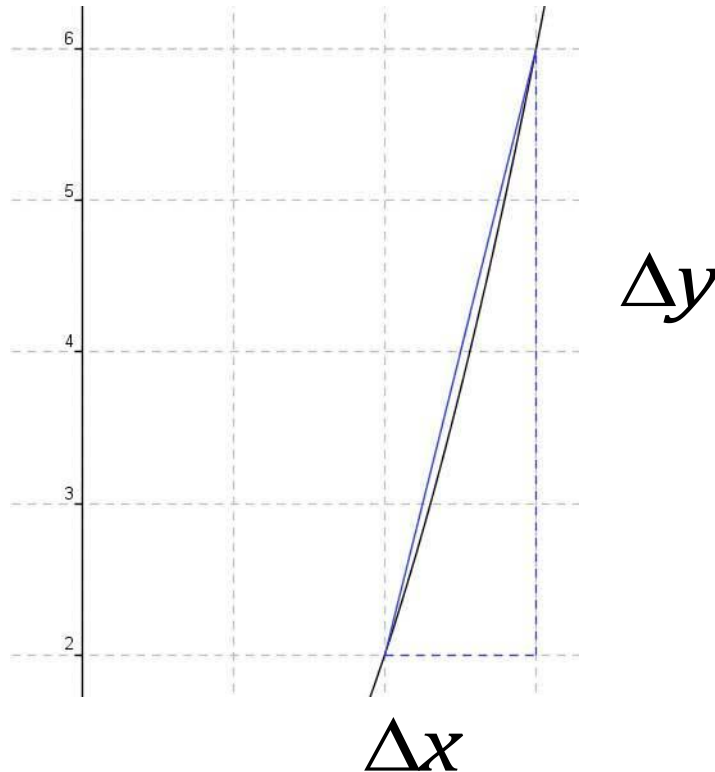


10.2 Hellinggrafieken [3]

Met het differentiequotiënt bereken je de gemiddelde verandering per tijdseenheid.

Voorbeeld: $f(x) = x^2 - x$

$$\text{Differentiequotiënt van } f(x) \text{ op } [2, 3] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{6 - 2}{3 - 2} = 4$$



10.2 Hellinggrafieken [3]

Met het differentiequotiënt bereken je de gemiddelde verandering per tijdseenheid.

Voorbeeld: $f(x) = x^2 - x$

$$\text{Differentiequotiënt van } f(x) \text{ op } [2,99 ; 3] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2,99)}{3 - 2,99} = \frac{6 - 5,9501}{3 - 2,99} \approx 4,99$$

Dit differentiequotiënt geeft een goede benadering van de helling van de grafiek $f(x)$ in het punt $[3, 6]$

Er bestaat een functie die bij elk punt van de grafiek $f(x)$ de helling in dit punt berekend. Dit is de **afgeleide functie**.

10.2 Hellinggrafieken [3]

Regels voor het differentiëren:

$$f(x) = ax^2 \text{ geeft } f'(x) = 2ax$$

$$f(x) = ax \text{ geeft } f'(x) = a$$

$$f(x) = a \text{ geeft } f'(x) = 0$$

Voorbeelden:

$$f(x) = 3x^2$$

$$\text{geeft } f'(x) = 2 \cdot 3x = 6x$$

$$g(x) = 6x^2 + 9x - 6$$

$$\text{geeft } g'(x) = 2 \cdot 6x + 9 = 12x + 9$$

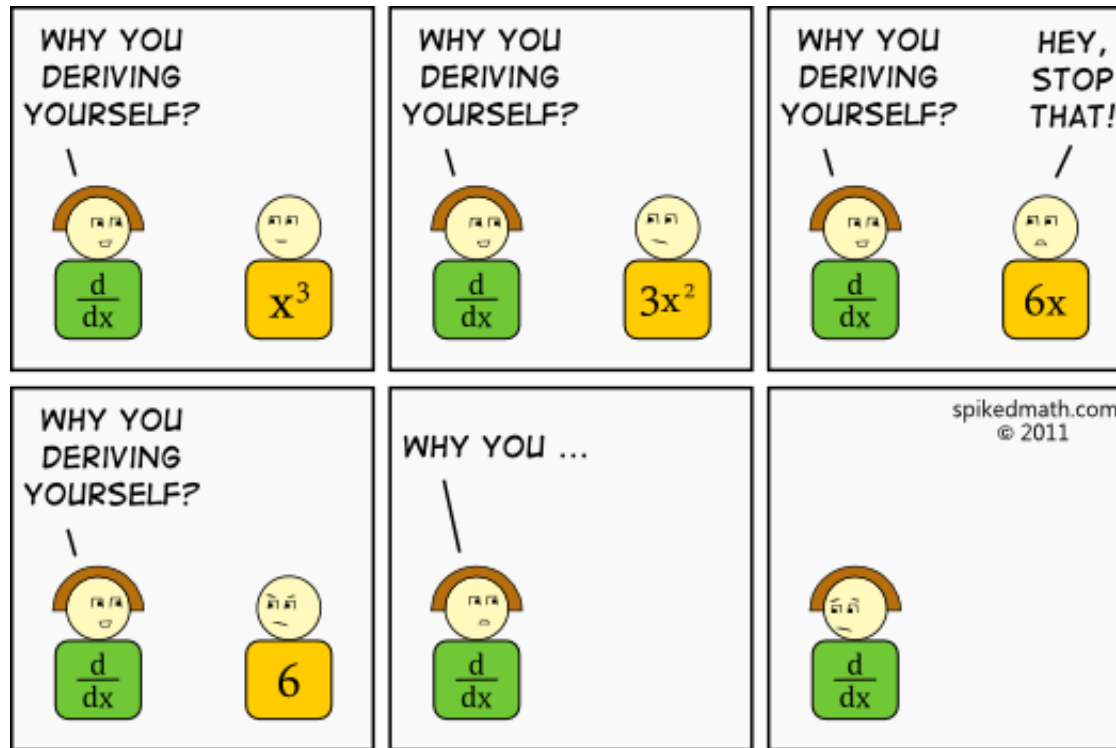
[somregel differentiëren]

$$\begin{aligned} h(x) &= (x + 6)(4x - 7) \\ &= 4x^2 - 7x + 24x - 42 \\ &= 4x^2 - 17x - 42 \end{aligned}$$

[Eerst haakjes wegwerken, dan differentiëren]

$$\text{geeft } h'(x) = 2 \cdot 4x - 17 = 8x - 17$$

10.2 Hellinggrafieken [3]



10.2 Hellinggrafieken [4]

Regels voor het differentiëren:

$$f(x) = ax^2 \text{ geeft } f'(x) = 2ax$$

$$f(x) = ax \text{ geeft } f'(x) = a$$

$$f(x) = a \text{ geeft } f'(x) = 0$$

Er geldt ook:

$$f(x) = ax^3 \text{ geeft } f'(x) = 3ax^2$$

$$f(x) = ax^4 \text{ geeft } f'(x) = 4ax^3$$

En dus:

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = nax^{n-1}$$

10.2 Hellinggrafieken [4]

Regels voor het differentiëren:

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = nax^{n-1}$$

Voorbeelden:

$$f(x) = 6x^5 + p$$

$$\text{geeft } f'(x) = 5 \cdot 6x^4 = 30x^4$$

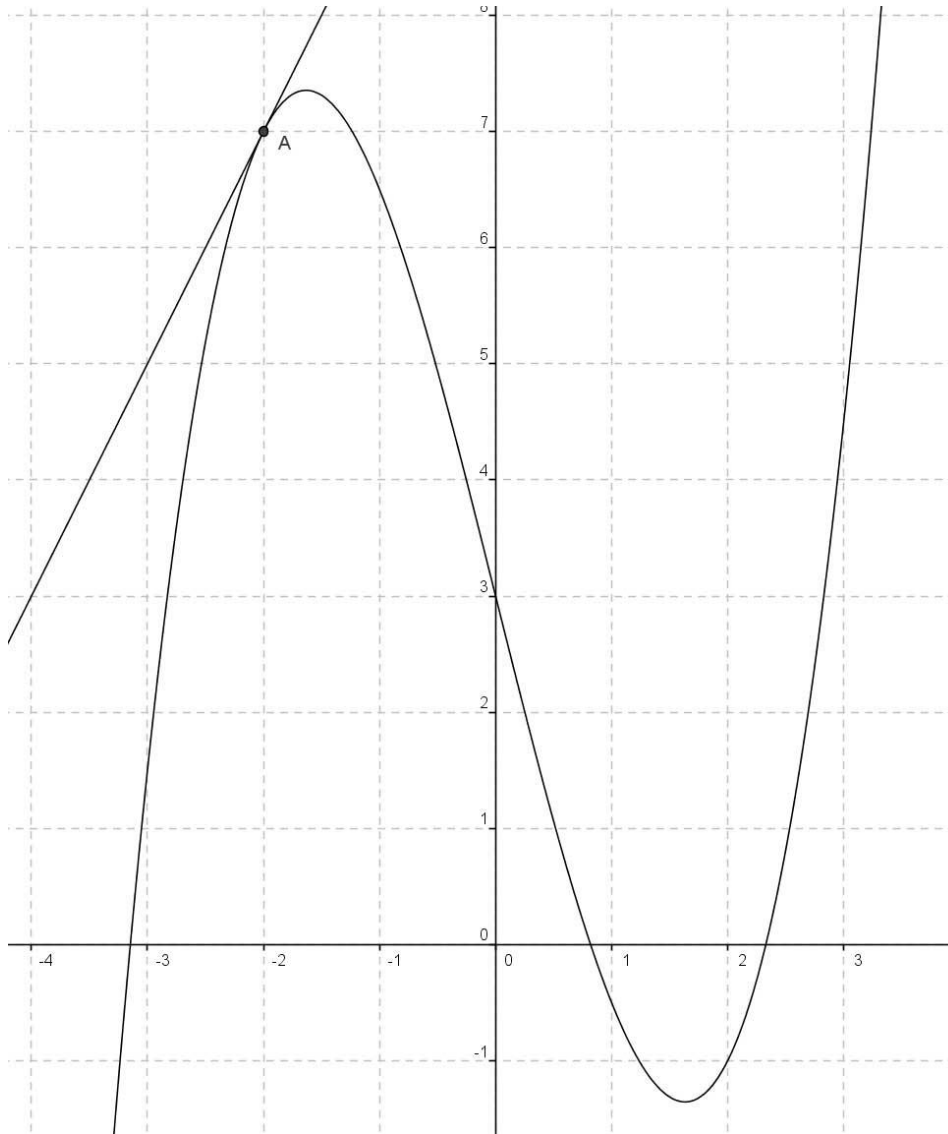
$$g(x) = 7x^5 + 3px^2 + 13$$

$$\begin{aligned} \text{geeft } g'(x) &= 5 \cdot 7x^4 + 2 \cdot 3px^2 \\ &= 35x^4 + 6px^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= (3x^6 + 5x)(2x^3 - 7x) \\ &= 6x^9 - 21x^7 + 10x^4 - 35x^2 \end{aligned}$$

$$\text{geeft } h'(x) = 54x^8 - 147x^6 + 40x^3 - 70x$$

10.3 Raaklijnen en extreme waarden [1]



$$f(x) = 0.5x^3 - 4x + 3$$

De rechte lijn raakt de grafiek van f in het punt A met x -coördinaat -2 . Deze raaklijn heeft in het punt A dezelfde richtingscoëfficiënt als de grafiek van f .

10.3 Raaklijnen en extreme waarden [1]

Voorbeeld:

Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn k in het punt A met $x_A = -2$ van de grafiek $f(x) = 0.5x^3 - 4x + 3$.

Stap 1:

Bereken de afgeleide van $f(x)$: $f'(x) = 1.5x^2 - 4$

Stap 2:

Bereken de richtingscoëfficiënt van $f(x)$ in het punt A met $x_A = -2$:

$$f'(-2) = 1.5 \cdot (-2)^2 - 4 = 2$$

Stap 3:

Vul de uitkomst van stap 2 in in de formule van de raaklijn:

$$k: y = ax + b \Rightarrow k: y = 2x + b$$

10.3 Raaklijnen en extreme waarden [1]

Voorbeeld:

Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn k in het punt A met $x_A = -2$ van de grafiek $f(x) = 0.5x^3 - 4x + 3$.

Stap 4:

Bereken de y -coördinaat van punt A : $f(-2) = 7$

Stap 5:

Bereken de onbekende b in de formule van de raaklijn

$$y = 2x + b$$

$$7 = 2 \cdot -2 + b$$

$$7 = -4 + b$$

$$b = 11$$

De raaklijn k wordt nu: $k : y = 2x + 11$

10.3 Raaklijnen en extreme waarden [2]

Er zijn verschillende manieren om de afgeleide van een functie te noteren:

$$f(x) = 6x^5 + 3x$$

Manier 1:

$$f'(x) = 30x^4 + 3$$

Manier 2:

$$\frac{d(6x^5 + 3x)}{dx} = 30x^4 + 3$$

Manier 3:

$$\frac{d}{dx}(6x^5 + 3x) = 30x^4 + 3$$

Manier 4:

$$\frac{dy}{dx} = 30x^4 + 3$$

10.3 Raaklijnen en extreme waarden [3]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de functie $N(t) = 480t^2 - 40t^3$

Bereken algebraïsch de extreme waarden van deze functie.

Stap 1:

Bereken de afgeleide van de gegeven functie.

$$N'(t) = 960t - 120t^2$$

Stap 2:

Los algebraïsch $N'(t) = 0$ op.

$$960t - 120t^2 = 0$$

$$t(960 - 120t) = 0$$

$$t = 0 \vee 960 - 120t = 0$$

$$t = 0 \vee 120t = 960$$

$$t = 0 \vee t = 8$$

10.3 Raaklijnen en extreme waarden [3]

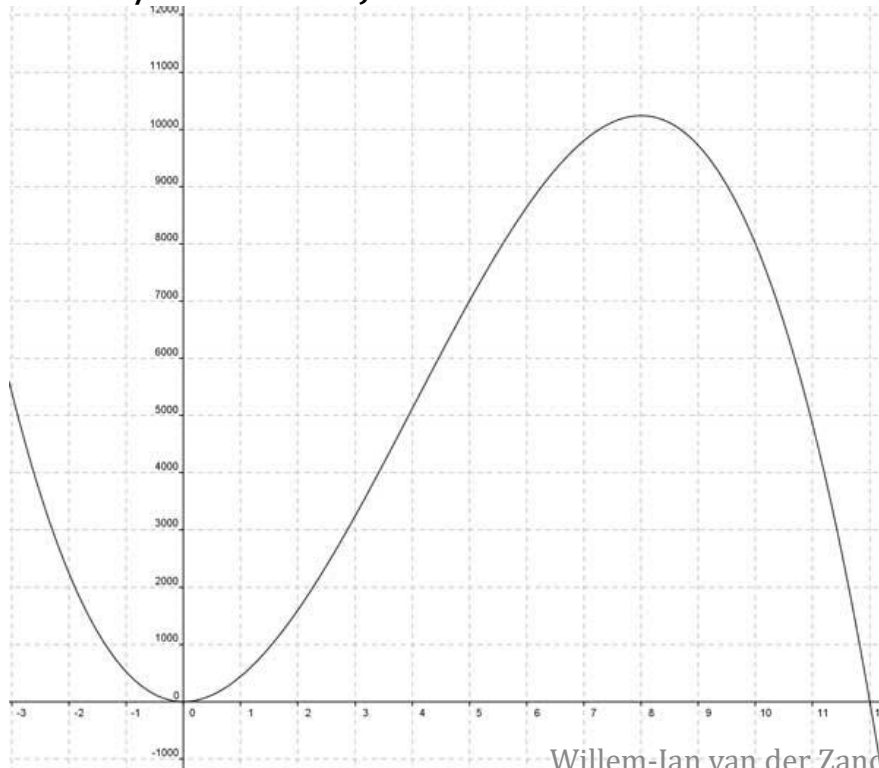
Voorbeeld 1:

Gegeven is de functie $N = 480t^2 - 40t^3$

Bereken algebraïsch de extreme waarden van deze functie.

Stap 3:

Schets de grafiek van de gegeven functie en kijk of de gevonden waarden maxima/minima zijn.



Uit de schets volgt dat er bij $t = 0$ een minimum ligt en bij $t = 8$ een maximum.

10.3 Raaklijnen en extreme waarden [3]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de functie $N = 480t^2 - 40t^3$

Bereken algebraïsch de extreme waarden van deze functie.

Stap 4:

Bereken de extreme waarden:

$$N(0) = 480 \cdot 0^2 - 40 \cdot 0^3 = 0$$

$$N(8) = 480 \cdot 8^2 - 40 \cdot 8^3 = 30.720 - 20.480 = 10.240$$

10.3 Raaklijnen en extreme waarden [3]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de functie $N(t) = 480t^2 - 40t^3$

Toon met **de afgeleide aan** dat de grafiek stijgend is bij $t = 5,75$

Stap 1:

Bereken de afgeleide van N :

$$N'(t) = 960t - 120t^2$$

Stap 2:

Vul $t = 5,75$ in, in $N'(t)$:

$$N'(5,75) = 960 \cdot 5,75 - 120 \cdot 5,75^2 = 1552,5 > 0$$

10.4 De afgeleide van $y = ax^n$ [1]

Herhaling:

De afgeleide van $f(x) = ax^n$ is: $f'(x) = nax^{n-1}$

Deze regel geldt voor elk geheel getal n .

Voorbeeld 1:

$$f(x) = \frac{9}{x^3} = 9x^{-3}$$

$$f'(x) = -3 \cdot 9x^{-4} = -27x^{-4} = \frac{-27}{x^4}$$

Voorbeeld 2:

$$g(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^3} = x + \frac{2}{x^2} = x + 2x^{-2}$$

$$g'(x) = 1 - 2 \cdot 2x^{-3} = 1 - 4x^{-3} = 1 - \frac{4}{x^3}$$

10.4 De afgeleide van $y = ax^n$ [1]

Herhaling:

De afgeleide van $f(x) = ax^n$ is: $f'(x) = nax^{n-1}$

Deze regel geldt voor elk getal uit de verzameling van reële getallen $\mathbb{R}$

Voorbeeld 3:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Afspraak:

Laat in je antwoord geen gebroken of negatieve exponenten staan.

10.4 De afgeleide van $y = ax^n$ [2]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de formule $f(x) = 5x^{0,79} - 3x^{1,18} + 3$ met $x > 0$

Bereken algebraïsch in twee decimalen nauwkeurig de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = 8$.

Stap 1:

Bereken de afgeleide:

$$f'(x) = 0,79 \cdot 5x^{-0,21} - 1,18 \cdot 3x^{0,18} = 3,95x^{-0,21} - 3,54x^{0,18}$$

Stap 2:

Bereken de snelheid met behulp van de afgeleide.

$$f'(8) = 3,95 \cdot 8^{-0,21} - 3,54 \cdot 8^{0,18} \approx -2,59$$

10.4 De afgeleide van $y = ax^n$ [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de formule $f(x) = 5x^{0,79} - 3x^{1,18} + 3$ met $x > 0$

Bereken algebraïsch voor welke waarde van x de waarde van y maximaal is.
Rond af op twee decimalen. Bereken ook y_{max} in twee decimalen nauwkeurig.

Stap 1:

Bereken de afgeleide:

$$f'(x) = 0,79 \cdot 5x^{-0,21} - 1,18 \cdot 3x^{0,18} = 3,95x^{-0,21} - 3,54x^{0,18}$$

10.4 De afgeleide van $y = ax^n$ [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de formule $f(x) = 5x^{0,79} - 3x^{1,18} + 3$ met $x > 0$

Bereken algebraïsch voor welke waarde van x de waarde van y maximaal is.
Rond af op twee decimalen. Bereken ook y_{max} in twee decimalen nauwkeurig.

Stap 2:

Los $f'(x) = 0$ op.

$$3,95x^{-0,21} - 3,54x^{0,18} = 0$$

$$3,95x^{-0,21} = 3,54x^{0,18}$$

$$3,95x^{-0,21-0,18} = 3,54$$

$$3,95x^{-0,39} = 3,54$$

$$x^{-0,39} = \frac{3,54}{3,95}$$

$$x = \left(\frac{3,54}{3,95} \right)^{\frac{1}{-0,39}} = 1,324...$$

Deel links en rechts door $x^{0,18}$

Neem links en rechts tot de macht $\frac{-1}{0,39}$

10.4 De afgeleide van $y = ax^n$ [2]

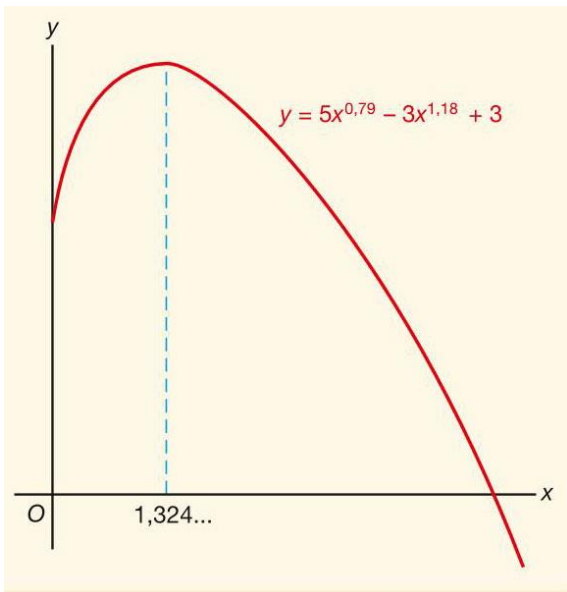
Voorbeeld 2:

Gegeven is de formule $f(x) = 5x^{0,79} - 3x^{1,18} + 3$ met $x > 0$

Bereken algebraïsch voor welke waarde van x de waarde van y maximaal is. Rond af op twee decimalen. Bereken ook y_{max} in twee decimalen nauwkeurig.

Stap 3:

Teken een schets en controleer of de gevonden oplossing een maximum is.



Het **maximum** bevindt zich bij $x \approx 1,32$.

10.4 De afgeleide van $y = ax^n$ [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de formule $f(x) = 5x^{0,79} - 3x^{1,18} + 3$ met $x > 0$

Bereken algebraïsch voor welke waarde van x de waarde van y maximaal is. Rond af op twee decimalen. Bereken ook y_{max} in twee decimalen nauwkeurig.

Stap 4:

Bereken de waarde van y_{max} :

$$y_{max} = 5 \cdot 1,324...^{0,79} - 3 \cdot 1,324...^{1,18} + 3 \approx 5,06$$

10.5 Regels voor het differentiëren [1]

Voorbeeld 1:

Bereken de afgeleide van $p(x) = (x + 6)(2x + x^2)$

Een manier om dit te doen is het wegwerken van de haakjes en vervolgens term voor term differentiëren.

Differentiëren kan ook met behulp van de productregel:

Productregel:

De afgeleide van $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ bereken je met:

$$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Let op:

$p(x)$ is dus het product van de functies $f(x)$ en $g(x)$

In dit voorbeeld geldt:

$$f(x) = x + 6$$

$$g(x) = 2x + x^2$$

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) = (x + 6) \cdot (2x + x^2)$$

10.5 Regels voor het differentiëren [1]

Voorbeeld 1:

Bereken de afgeleide van $p(x) = (x + 6)(2x + x^2)$

Productregel:

$$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= [x + 6]' \cdot (2x + x^2) + (x + 6) \cdot [2x + x^2]' \\ &= 1 \cdot (2x + x^2) + (x + 6) \cdot (2 + 2x) \\ &= 2x + x^2 + 2x + 2x^2 + 12 + 12x \\ &= 3x^2 + 16x + 12 \end{aligned}$$

10.5 Regels voor het differentiëren [2]

Voorbeeld 2:

Bereken de afgeleide van $q(x) = \frac{5x^2 + 8x}{3x + 6}$

Differentiëren gebeurt nu met de quotiëntregel:

Quotiëntregel:

De afgeleide van $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ wordt nu:

$$q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2} = \frac{nat - tan}{n^2}$$

$$q'(x) = \frac{(3x+6) \cdot [5x^2+8x]' - (5x^2+8x) \cdot [3x+6]'}{(3x+6)^2}$$

$$q'(x) = \frac{(3x+6) \cdot (10x+8) - (5x^2+8x) \cdot 3}{(3x+6)^2}$$

$$q'(x) = \frac{30x^2 + 24x + 60x + 48 - 15x^2 - 24x}{(3x+6)^2}$$

$$q'(x) = \frac{15x^2 + 60x + 48}{(3x+6)^2}$$

Let op:

De haakjes in de noemer mag je laten staan.

10.5 Regels voor het differentiëren [3]

Voorbeeld 1:

$f(x) = \text{schakels } (x^2 - x + 6)^4$ is een **samengestelde functie**, die bestaat uit de $u(v) = v^4$ en $v(x) = x^2 - x + 6$.

Een functie die geschreven is als een ketting van schakels heeft een **kettingfunctie**.

Kettingregel:

$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

$u(v) = v^4$ heeft als afgeleide $u'(v) = 4v^3$

$v(x) = x^2 - x + 6$ heeft als afgeleide $v'(x) = 2x - 1$

De afgeleide van $(x^2 - x + 6)^4$ wordt nu:

$$f'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = 4v^3 \cdot (2x - 1) = 4(x^2 - x + 6)(2x - 1)$$

10.5 Regels voor het differentiëren [3]

Voorbeeld 2:

Bereken de afgeleide van de gegeven functie $g(x)$:

$$g(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + x}} = 4(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u(v) = 4v^{-\frac{1}{2}} \text{ met } u'(v) = -2v^{-\frac{1}{2}}$$

$$v(x) = x^2 + x \text{ met } v'(x) = 2x + 1$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(v) \cdot v'(x) \\ &= -2v^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) \\ &= -2(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}}(2x + 1) \\ &= \frac{-2(2x + 1)}{(x^2 + x)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-4x - 2}{(x^2 + x)\sqrt{x^2 + x}} \end{aligned}$$