

Voorkennis

$y = -4x + 8$ is de **vergelijking van een lijn**. Hier wordt y **uitgedrukt in x** .

$y = -4x + 8$ kan herschreven worden als $y + 4x = 8$

Dit is een **lineaire vergelijking met twee variabelen**.

Als je twee punten op deze lijn weet, kun je de grafiek van deze vergelijking tekenen.

Punt 1: Neem $x = 0 \Rightarrow y = 8$, dus het punt $(0, 8)$ ligt op de lijn;

Punt 2: Neem $y = 0 \Rightarrow x = 2$, dus het punt $(2, 0)$ ligt op de lijn.

Algemeen:

Een lineaire vergelijking met de variabelen x en y wordt geschreven als:

$$ax + by = c$$

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.

Voorkennis

Voorbeeld:

Stel een vergelijking op van de lijn p die evenwijdig is met de lijn $q: 3x - 5y = 10$ en die door het punt $(8, 15)$ gaat.

Stap 1:

De beide lijnen zijn evenwijdig. Hieruit volgt:

$$p: 3x - 5y = c.$$

Stap 2:

Invullen van $(8, 15)$ in de vergelijking van p geeft:

$$p: 3 \cdot 8 - 5 \cdot 15 = 24 - 75 = -51$$

Hieruit volgt: $p: 3x - 5y = -51.$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 140/141):

Doel:

Je kunt een stelsel van twee lineaire vergelijkingen oplossen door deze vergelijkingen bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 1 t/m 3

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 140/141):

Voorbeeld:

Gegeven zijn de lijnen l : $3x + y = 6$ en m : $x + y = 4$.

Bepaal het snijpunt van de beide lijnen.

Met behulp van **eliminieren** kun je een **stelsel van lineaire vergelijkingen** oplossen.

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Invullen van $x = 1$ in één van de vergelijkingen geeft $y = 3$.

Het oplossen van het stelsel doe je door de vergelijkingen op te tellen of van elkaar af te halen.

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 141/142):

Doel:

Je kunt een stelsel van twee lineaire vergelijkingen oplossen door deze vergelijkingen bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken. Indien nodig vermenigvuldig je de vergelijkingen eerst met bepaalde getallen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 4 t/m 10

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 141/142):

Voorbeeld:

Gegeven zijn de vergelijkingen $3x - 4y = 7$ en $2x + 3y = 16$.

Los het stelsel van deze vergelijkingen algebraïsch op.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 & |2| \\ 2x + 3y = 16 & |3| \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 8y = 14 \\ 6x + 9y = 48 \end{cases}$$

$$-17y = -34$$

$$y = 2$$

Indien nodig vermenigvuldig je de vergelijkingen om bij het aftellen of optrekken een van de variabelen te kunnen elimineren.

Invullen van $y = 2$ in één van de twee vergelijkingen geeft $x = 5$.

Leerdoel 3 (Theorie A – pagina 147/148):

Doel:

Je kunt als je een lijn met vergelijking $ax + by = c$ getekend hebt, het juiste halfvlak selecteren.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 11 t/m 13

Leerdoel 3 (Theorie A – pagina 147/148):

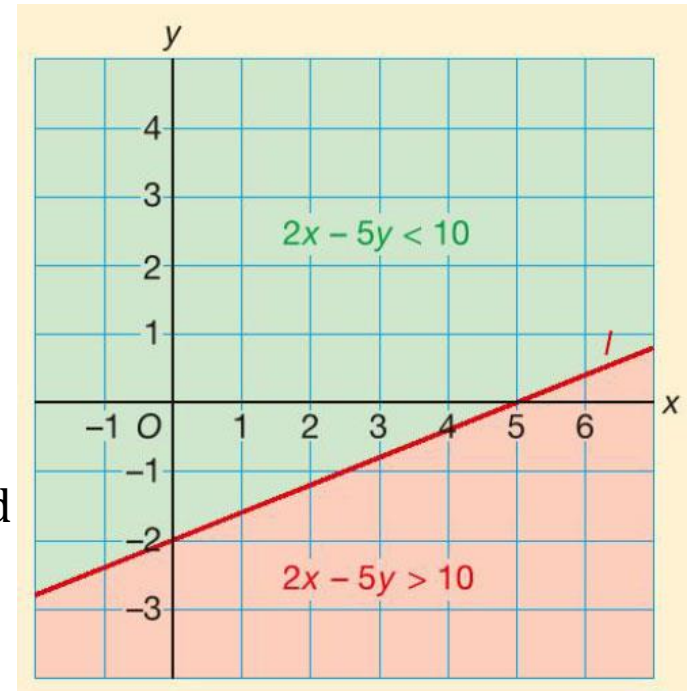
Voorbeeld:

De lijn l : $2x - 5y = 10$ verdeelt het vlak in twee **halfvlakken**.

Invullen van het punt $(0, 0)$ geeft als uitkomst 0 en dit is kleiner dan 10, Dit betekent dat het groene deel het halfvlak $2x - 5y < 10$ is.

Algemeen:

De grafiek van $ax + by \leq c$ is een halfvlak begrensd Door de lijn met vergelijking $ax + by = c$.



Leerdoel 4 (Theorie B – pagina 148/149):

Doel:

Je kunt de grafiek tekenen van een gecombineerde ongelijkheid. Dit is het gedeelte waar de halfvlakken elkaar overlappen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 14 t/m 18

Leerdoel 4 (Theorie B – pagina 148/149):

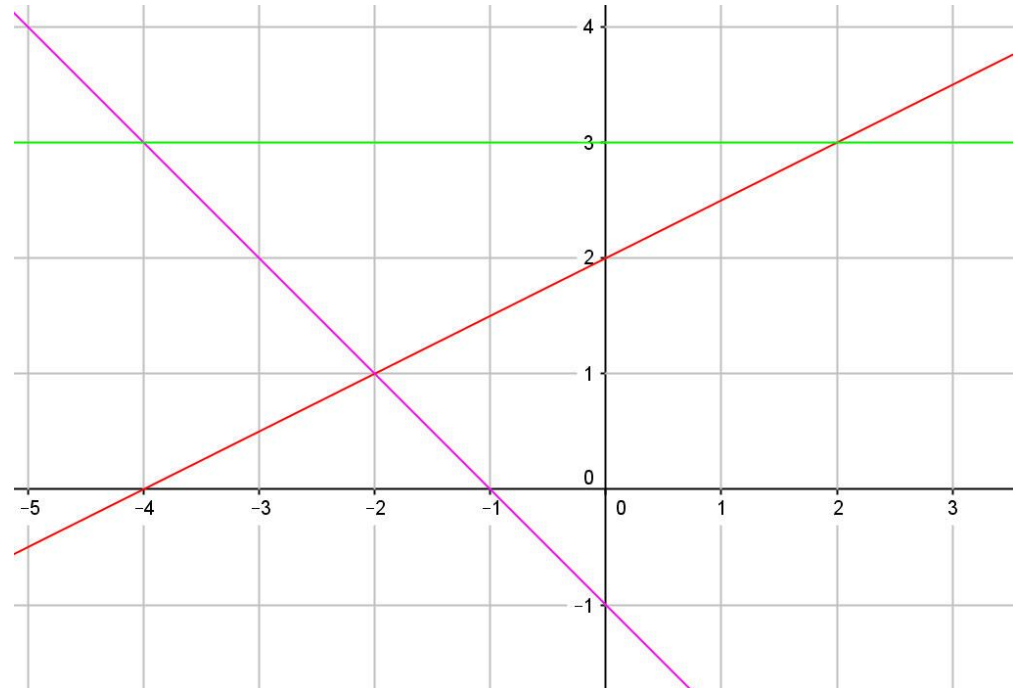
Voorbeeld:

Teken de grafiek van $x - 2y \leq -4$ en $x + y \geq -1$
en $y \leq 3$.

Dit is een **gecombineerde ongelijkheid**.

Stap 1:

Teken de lijnen $x - 2y = -4$,
 $x + y = -1$ en $y = 3$
met verschillende kleuren.



Leerdoel 4 (Theorie B – pagina 148/149):

Voorbeeld:

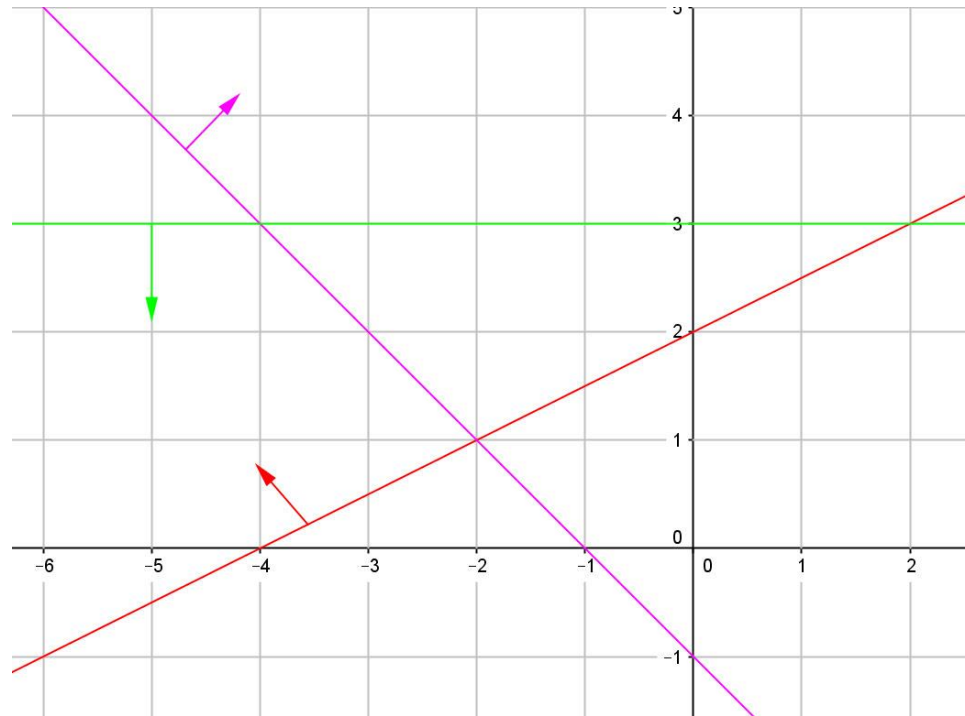
Teken de grafiek van $x - 2y \leq -4$ en $x + y \geq -1$
en $y \leq 3$.

Dit is een **gecombineerde ongelijkheid**.

Stap 2:

Geef met behulp van pijltjes
aan welke halfvlakken je moet
hebben.

Vul steeds $(0, 0)$ in om te
bepalen wat het juiste halfvlak
is.



Leerdoel 4 (Theorie B – pagina 148/149):

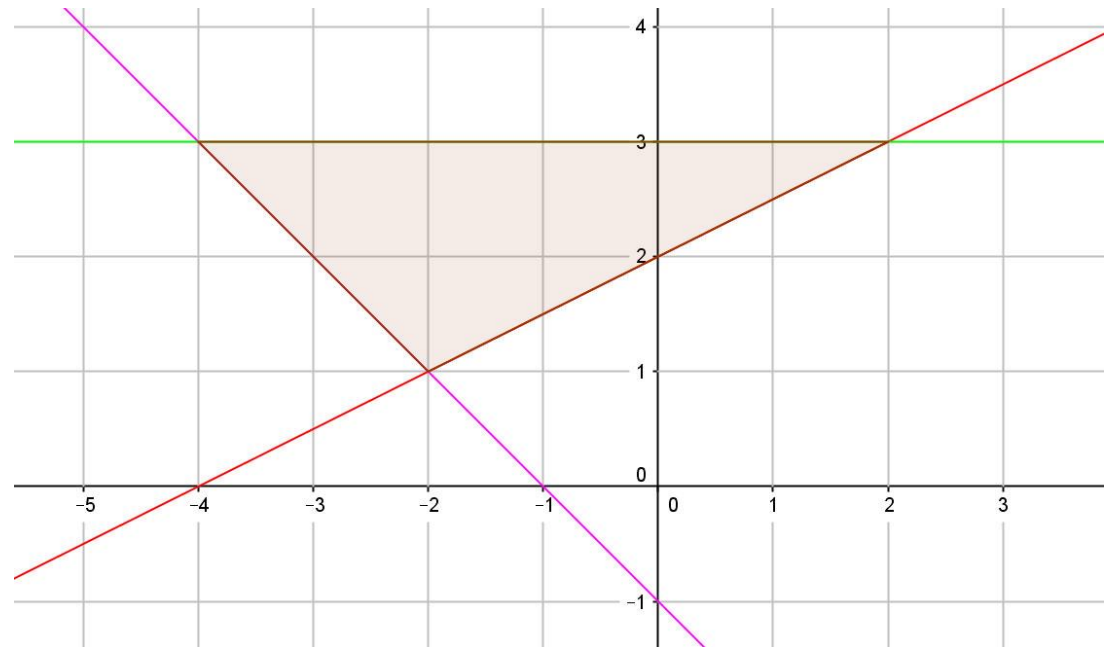
Voorbeeld:

Teken de grafiek van $x - 2y \leq -4$ en $x + y \geq -1$
en $y \leq 3$.

Dit is een **gecombineerde ongelijkheid**.

Stap 3:

Arceer het juiste gebied.



Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 152/153):

Doel:

Je kunt als een aantal beperkende voorwaarden zijn gegeven:

- ✓ de vergelijkingen van de bijbehorende ongelijkheden opstellen;
- ✓ In een grafiek het toegestane gebied tekenen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 19 t/m 21

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 152/153):

Voorbeeld:

Een zuivelfabrikant produceert twee soorten desserts.

x = aantal liter van dessert M;

y = aantal liter van dessert R.

Een liter melk van soort M bestaat voor 20% uit melk en voor 15% uit room.

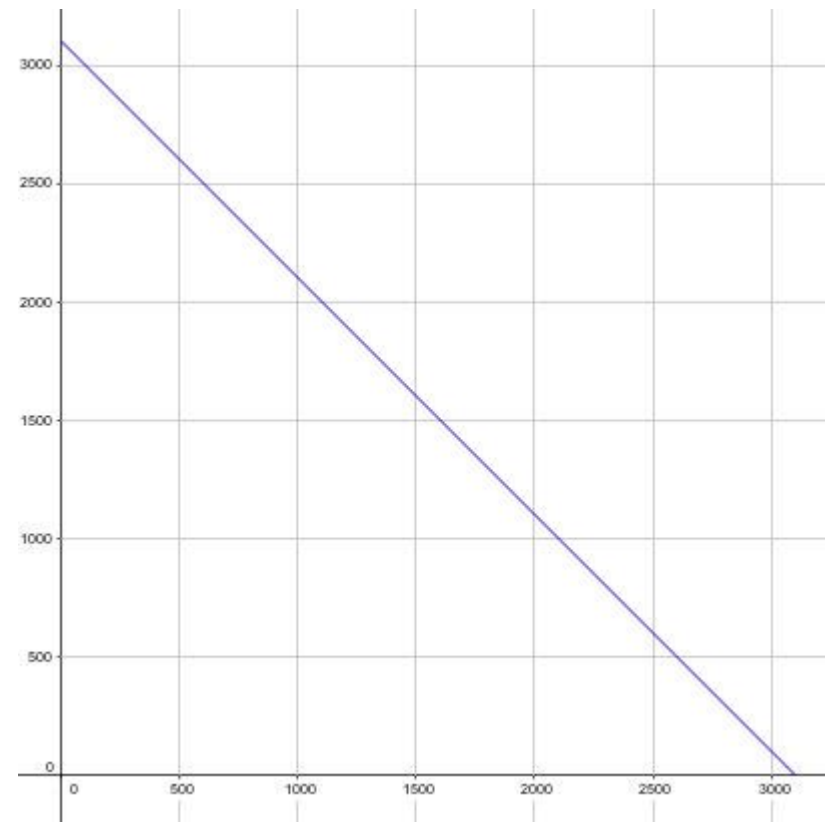
Een liter melk van soort R bestaat voor 20% uit melk en voor 30% uit room.

Er gelden een aantal **beperkende voorwaarden**:

1) Er is maximaal 620 liter melk beschikbaar.

$0,2x + 0,2y \leq 620$ (blauwe lijn)

Alles links van de blauwe lijn is nu mogelijk qua productie.



Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 152/153):

Voorbeeld:

Een zuivelfabrikant produceert twee soorten desserts.

x = aantal liter van dessert M;

y = aantal liter van dessert R.

Een liter melk van soort M bestaat voor 20% uit melk en voor 15% uit room.

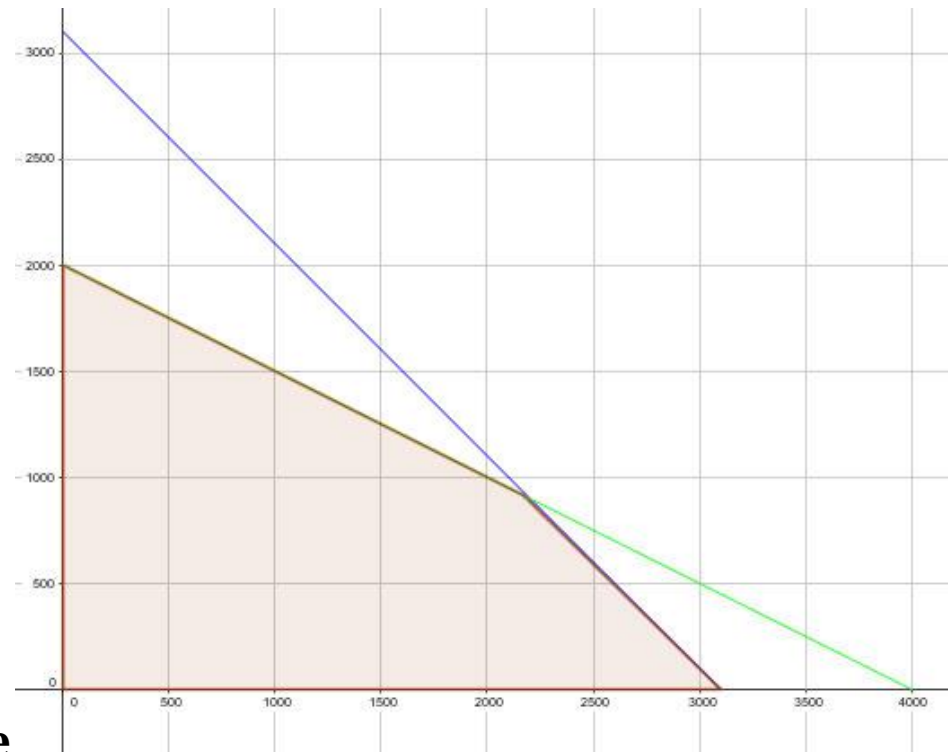
Een liter melk van soort R bestaat voor 20% uit melk en voor 30% uit room.

Er gelden een aantal **beperkende voorwaarden** :

2) Er is maximaal 600 liter room beschikbaar.

$$0,15x + 0,30y \leq 600 \text{ (groene lijn)}$$

Het gekleurde vlak is nu het **toegestane gebied**.



Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 152/153):

Voorbeeld:

Een zuivelfabrikant produceert twee soorten desserts.

x = aantal liter van dessert M;

y = aantal liter van dessert R.

Een liter melk van soort M bestaat voor 20% uit melk en voor 15% uit room.

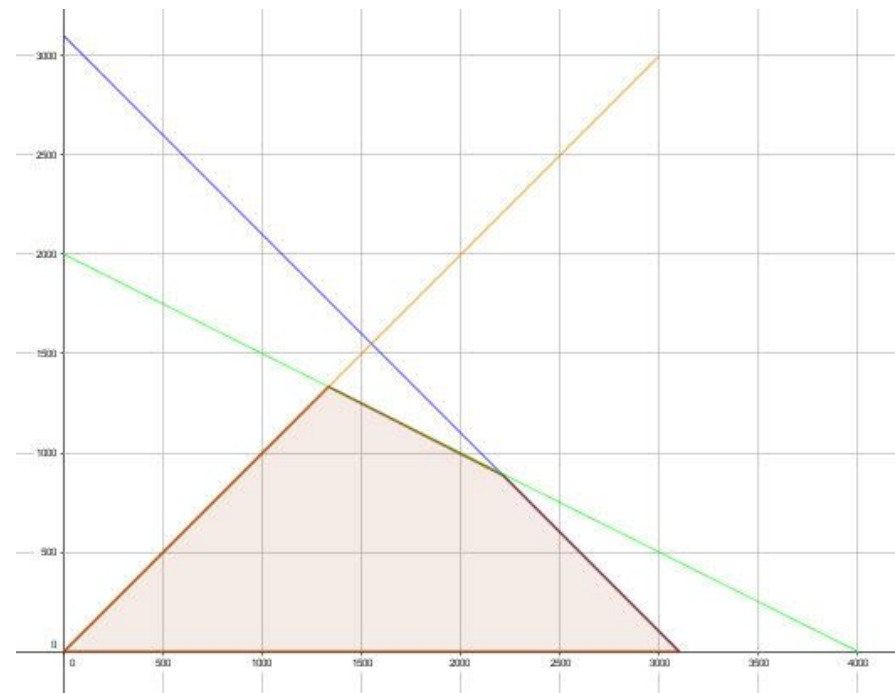
Een liter melk van soort R bestaat voor 20% uit melk en voor 30% uit room.

Er gelden een aantal **beperkende voorwaarden** :

3) Er mag niet meer R dan M gemaakt worden.

$y \leq x$ (oranje lijn)

Het gekleurde vlak is nu het **toegestane gebied**.



Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 152/153):

Voorbeeld:

Een zuivelfabrikant produceert twee soorten desserts.

x = aantal liter van dessert M;

y = aantal liter van dessert R.

Er gelden een aantal **beperkende voorwaarden**:

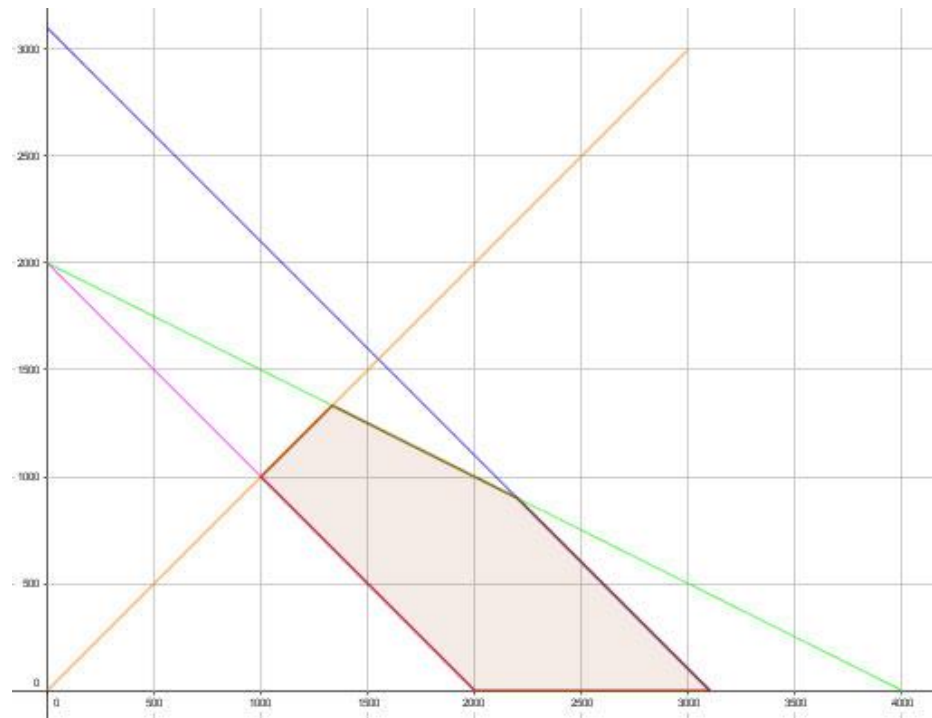
4) Er moet in totaal minstens 2000 liter gemaakt worden.

$x + y \leq 2000$ (paarse lijn)

Het gekleurde vlak is nu het **toegestane gebied**.

Verder geldt natuurlijk $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

Elke combinatie binnen het gekleurde vlak is nu toegestaan. Bij **lineair programmeren** heb je een aantal beperkende voorwaarden, die een toegestaan gebied bepalen.



Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 154/156):

Doel:

Je kunt een gegeven doelfunctie minimaliseren (of maximaliseren) op een toegestaan gebied als de ongelijkheden van de beperkende voorwaarden zijn gegeven. Hierbij maak je gebruik van iso-lijnen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

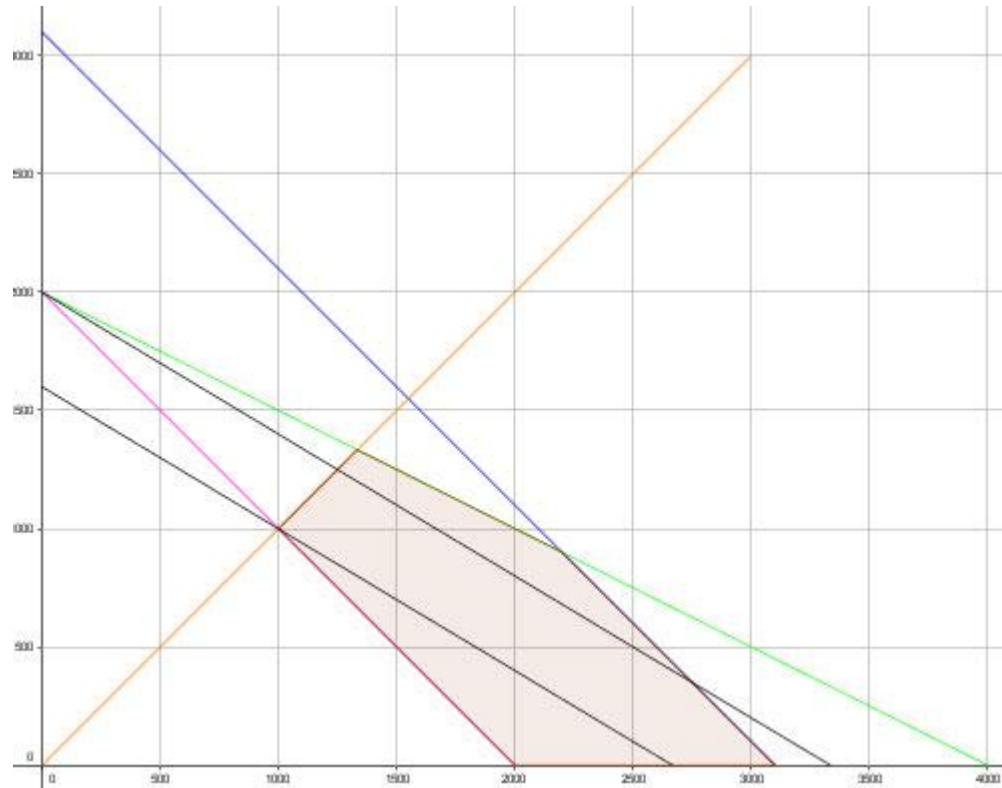
Opgave 19 t/m 21

Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 154/156):

Voorbeeld:

Er geldt dat voor één liter M de winst €0,45 is en voor één liter R €0,75.

De functie van de totale winst W is:
 $W = 0,45x + 0,75y$. Dit heet een **doelfunctie**. Het is nu de bedoeling om een punt (x, y) te vinden binnen het toegestane gebied waarvoor de winst maximaal is. Voor verschillende waarden van de winst kun je **iso-winstlijnen** tekenen. Voorbeelden zijn de twee zwarte lijnen. Je moet nu de hoogstgelegen iso-winstlijn vinden, die nog juist door het toegestane gebied gaat. Dit zoeken naar de optimale oplossing heet **optimaliseren**.



Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 154/156):

Voorbeeld:

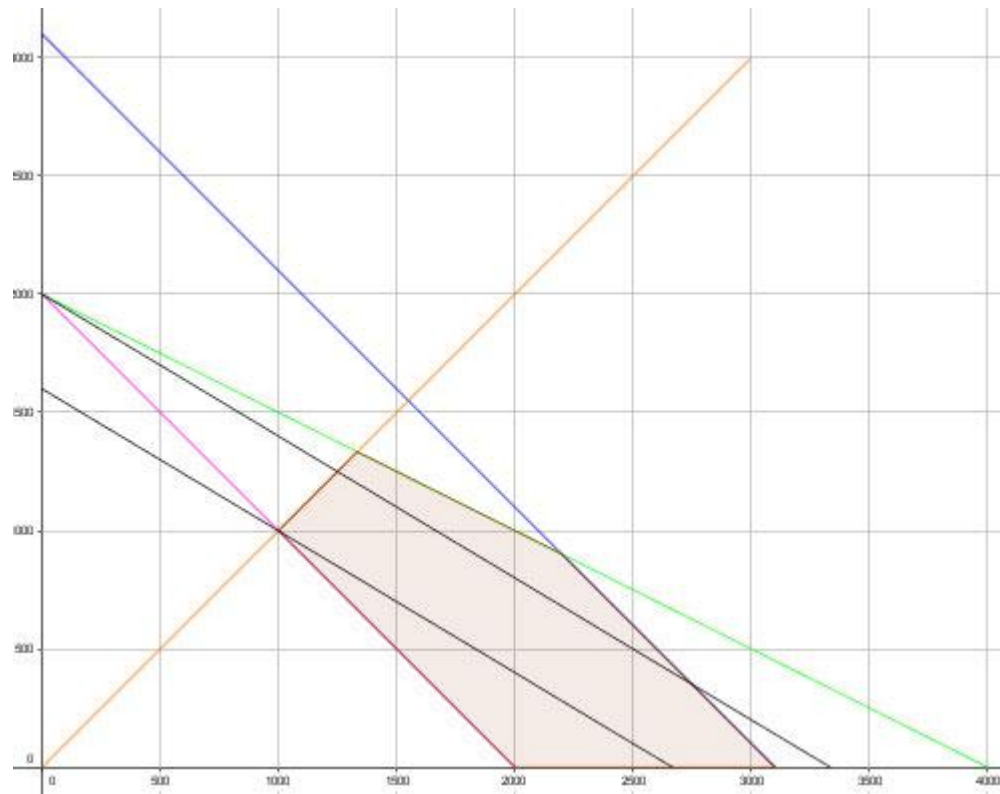
Een zuivelfabrikant produceert twee soorten desserts.

x = aantal liter van dessert M;

y = aantal liter van dessert R.

Uit het plaatje volgt dat de verste iso-lijn ligt op het snijpunt van de groene en blauwe lijn.

Bepalen van dit snijpunt geeft het (x, y) punt waar de winst maximaal is.



Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 154/156):

Voorbeeld:

Stap 1:

Bepaal het snijpunt van de lijnen

$$0,2x + 0,2y = 620 \text{ en } 0,15x + 0,3y = 600$$

$$\begin{cases} 0,2x + 0,2y = 620 & |3| \\ 0,15x + 0,3y = 600 & |2| \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,6x + 0,6y = 1860 \\ 0,3x + 0,6y = 1200 \end{cases}$$

$$0,3x = 660$$

$$x = 2200$$

Invullen van $x = 2200$ geeft het snijpunt $(2200, 900)$.

Stap 2:

Bepaal de maximale winst.

Invullen van $(2200, 900)$ in de winstfunctie geeft een winst van € 1.665

Leerdoel 7 (Theorie C – pagina 157/158):

Doel:

Je kunt op basis van gegeven informatie de formules van de doelfunctie en de beperkende voorwaarden opstellen. Vervolgens kun je dit lineair programmeringsprobleem oplossen met behulp van het gebruik van iso-lijnen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 22 t/m 28

Leerdoel 7 (Theorie C – pagina 157/158):

Voorbeeld:

Gegeven is het onderstaande schema van een fabriek die twee producten maakt. Per machine is aangegeven hoe lang het duurt om één product op een bepaalde machine te produceren en hoeveel uur deze machine per week beschikbaar is. Ook de winst per product is bekend.

	Product A	Product B	Beschikbare tijd
Machine I	6 minuten	6 minuten	60 uur
Machine II	6 minuten	4 minuten	50 uur
Machine III	3 minuten	12 minuten	90 uur
Winst per product	5 euro	3 euro	

Hoeveel producten moet de fabrikant per week fabriceren om een maximale winst te bereiken en wat is deze maximale winst?

Leerdoel 7 (Theorie C – pagina 157/158):

Voorbeeld:

Hoeveel producten moet de fabrikant per week fabriceren om een maximale winst te bereiken en wat is deze maximale winst?

Stap 1:

Definieer de variabelen

x = aantal van product A per week

y = aantal van product B per week

Stap 2:

Stel de doelfunctie W van de winst per week op.

$$W = 5x + 3y$$

Leerdoel 7 (Theorie C – pagina 157/158):

Voorbeeld:

Hoeveel producten moet de fabrikant per week fabriceren om een maximale winst te bereiken en wat is deze maximale winst?

Stap 3:

Stel de beperkende voorwaarden op:

$x \geq 0$ (hoeveelheid van product A mag niet negatief zijn)

$y \geq 0$ (hoeveelheid van product B mag niet negatief zijn)

$6x + 6y \leq 3600 \Leftrightarrow x + y \leq 600$ (productie machine I)

$6x + 4y \leq 3000 \Leftrightarrow 3x + 2y \leq 1500$ (productie machine II)

$3x + 12y \leq 5400 \Leftrightarrow x + 4y \leq 1800$ (productie machine III)

Leerdoel 7 (Theorie C – pagina 157/158):

Voorbeeld:

Hoeveel producten moet de fabrikant per week fabriceren om een maximale winst te bereiken en wat is deze maximale winst?

Stap 4:

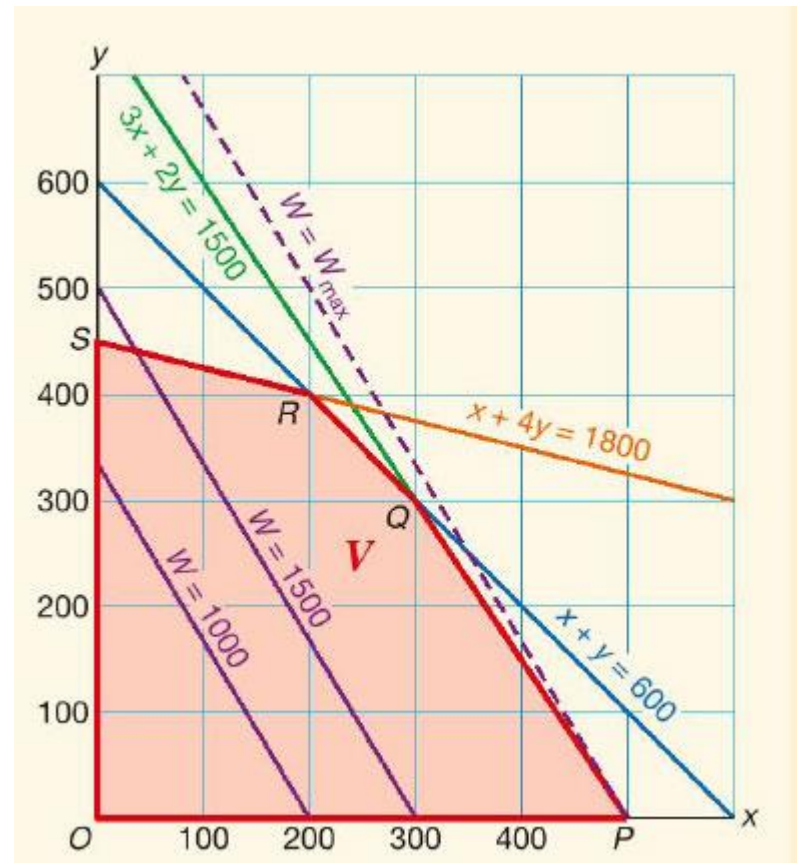
Teken het toegestane gebied en een aantal iso-lijnen. In dit voorbeeld zie je dat de iso-lijn met de maximale winst op de horizontale as snijdt met de groene lijn.

Stap 5:

Bereken de productie met de maximale winst en de maximale winst.

Invullen van $y = 0$ in $3x + 2y = 1500$ geeft een productie van $(500, 0)$

Invullen van dit punt in de doelfunctie geeft een **winst van € 2.500**.



Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 162):

Doel:

Je kunt een gegeven doelfunctie minimaliseren (of maximaliseren) op een toegestaan gebied als de ongelijkheden van de beperkende voorwaarden zijn gegeven. Dit kun je ook voor de situatie dat een van de randen van het toegestane gebied evenwijdig loopt met de iso-lijnen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 29, 30

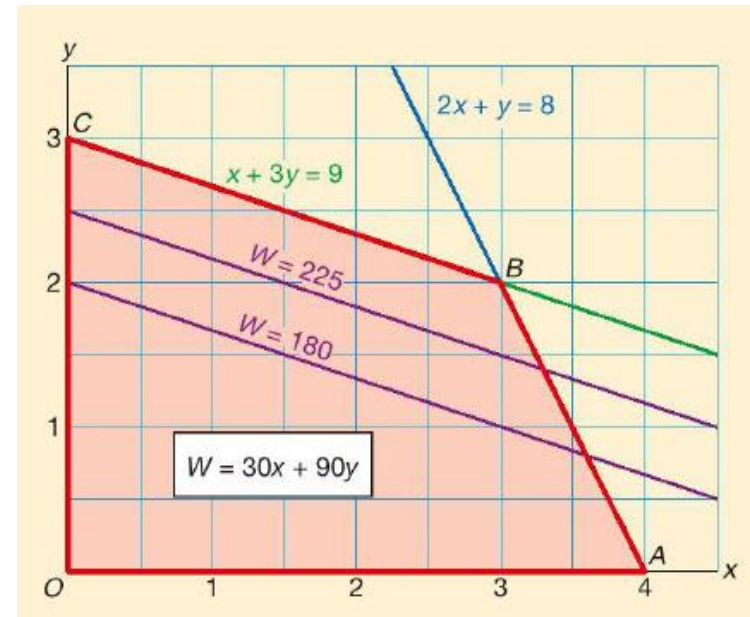
Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 162):

Voorbeeld:

In het onderstaande voorbeeld zie je dat de isolijnen van de doelfunctie $W = 30x + 90y$ evenwijdig lopen met rand BC . Dit betekent dat elk punt (x, y) op het lijnstuk BC zorgt voor een maximale W .

Algemeen:

Een lineair programmeringsprobleem heeft meer dan één oplossing als de isolijnen van de doelfunctie evenwijdig zijn met één van de randen van het toegestane gebied.



Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 163/164):

Doel:

Je kunt op basis van gegeven informatie de formules van de doelfunctie en de beperkende voorwaarden opstellen. Vervolgens kun je dit lineair programmeringsprobleem oplossen met behulp van de hoekpuntmethode.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 31 t/m 35

Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 163/164):

Met behulp van de **hoekpuntmethode** kun je zonder het tekenen van iso-lijnen optimaliseren. Hiervoor bereken je bij elk hoekpunt, de waarde van de doelfunctie en kies je vervolgens het hoekpunt met de grootste waarde voor de doelfunctie.

Voorbeeld:

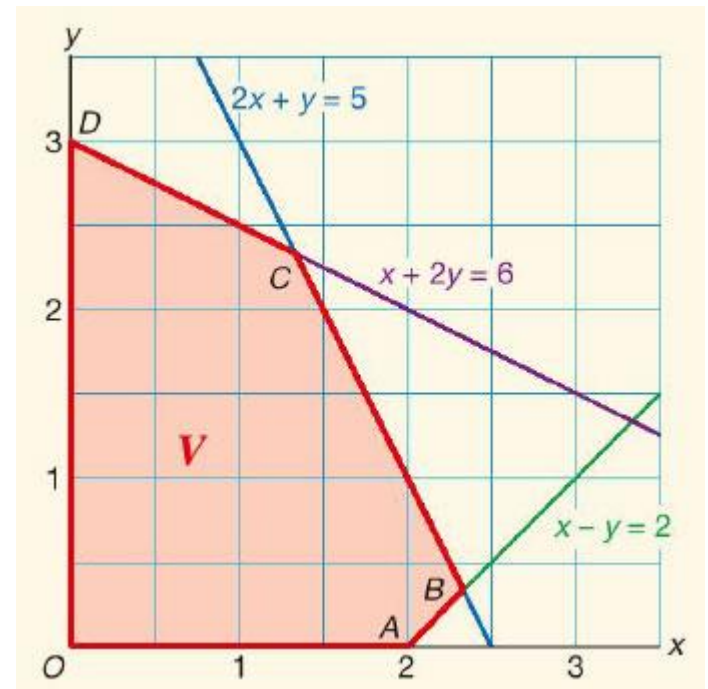
Gegeven is het toegestane gebied V :

$$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 6, 2x + y \leq 5 \text{ en } x - y \leq 2.$$

Maximaliseer met behulp van de hoekpuntmethode de doelfunctie $W = 4x + 3y$ op V .

Stap 1:

Bereken de hoekpunten.



Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 163/164):

Voorbeeld:

Maximaliseer met behulp van de hoekpuntmethode de doelfunctie $W = 4x + 3y$ op V .

Stap 1:

Bereken de hoekpunten.

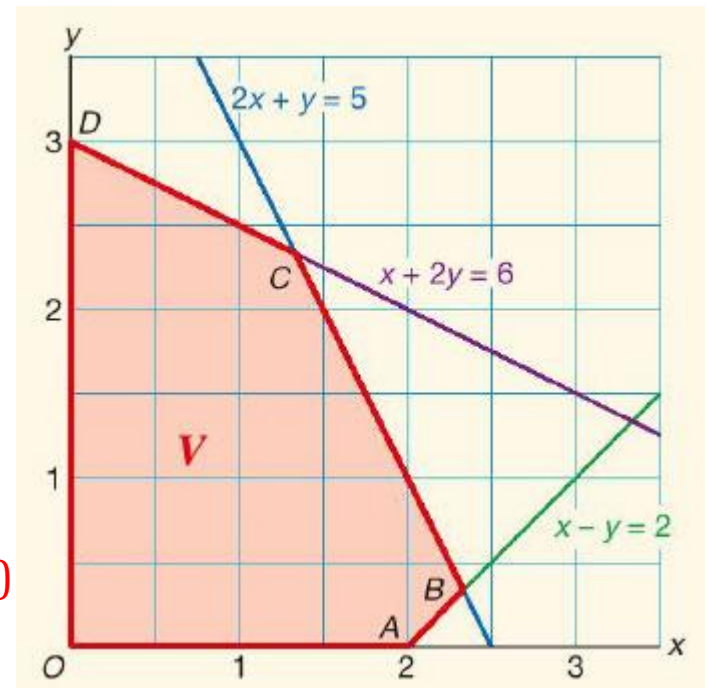
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

----- +

$$3x = 7$$

$$x = 2\frac{1}{3}$$

Invullen in $x - y = 2$ geeft $y = \frac{1}{3}$ en het punt $B(2\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$



Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 163/164):

Voorbeeld:

Maximaliseer met behulp van de hoekpuntmethode de doelfunctie $W = 4x + 3y$ op V .

Stap 2:

Bereken de hoekpunten.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & | 1 \\ x + 2y = 6 & | 2 \end{cases}$$

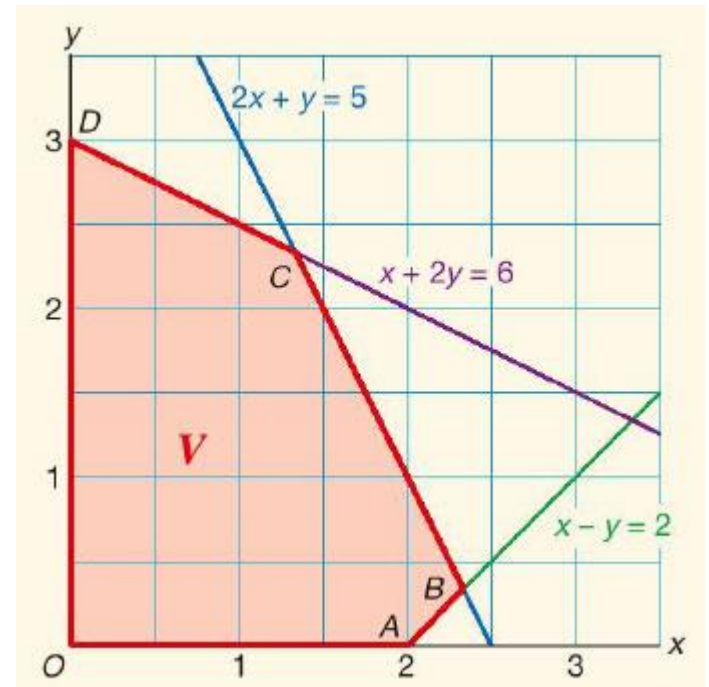
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$-3y = -7$$

$$y = 2\frac{1}{3}$$

Invullen in $2x + y = 5$ geeft $x = 1\frac{1}{3}$ en het punt $C(1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$

De andere drie hoekpunten O , A en B volgen uit het plaatje.



Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 163/164):

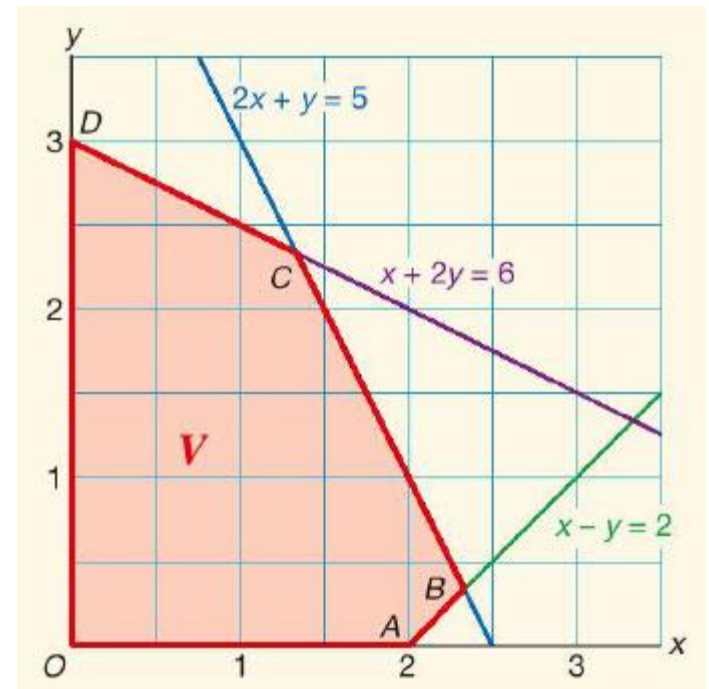
Voorbeeld:

Maximaliseer met behulp van de hoekpuntmethode de doelfunctie $W = 4x + 3y$ op V .

Stap 3:

Bereken voor elk hoekpunt de waarde van W .

Hoekpunt	W
$A(2, 0)$	8
$B(2\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$10\frac{1}{3}$
$C(1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$	$12\frac{1}{3}$
$D(0, 3)$	9
$O(0, 0)$	0



Uit de tabel volgt dat het **maximum ligt bij hoekpunt C**.

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 167/168):

Doel:

Je kunt op basis van gegeven informatie de formules van de doelfunctie en de beperkende voorwaarden opstellen van een transportprobleem opstellen. Vervolgens kun je dit transportprobleem oplossen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 36 t/m 41

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 167/168):

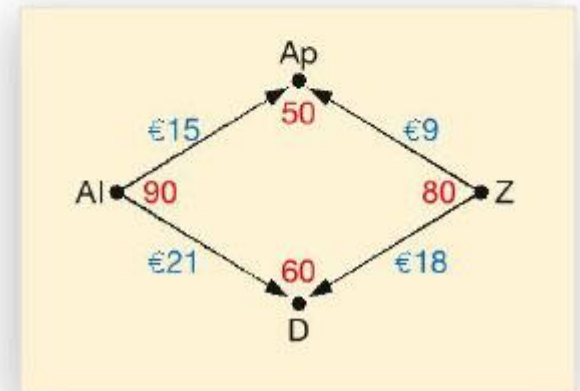
Voorbeeld:

Een groothandel in tv-toestellen heeft een magazijn in Almelo met 90 tv's en een magazijn in Zutphen met 80 tv's. Er komt een bestelling binnen voor 50 tv's van een winkel in Apeldoorn en voor 60 tv's van een winkel in Doetinchem.

In het plaatje hiernaast staan de vervoerskosten.

x = tv's die van Almelo naar Apeldoorn gaan.
 y = tv's die van Almelo naar Doetinchem gaan.
 z = tv's die van Zutphen naar Apeldoorn gaan.
 t = tv's die van Zutphen naar Doetinchem gaan.

VERVOERSKOSTEN IN EURO'S PER TV		
naar	van	
	Almelo	Zutphen
Apeldoorn	15	9
Doetinchem	21	18



Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 167/168):

Voorbeeld:

Apeldoorn heeft 50 tv's nodig, dus geldt: $x + z = 50$.
Dit valt te herschrijven als $z = 50 - x$.
Doetinchem heeft 60 tv's nodig, dus geldt: $y + t = 60$.
Dit valt te herschrijven als $t = 60 - y$.

Dit **transportprobleem** kun je op de volgende manier oplossen:

Stap 1:

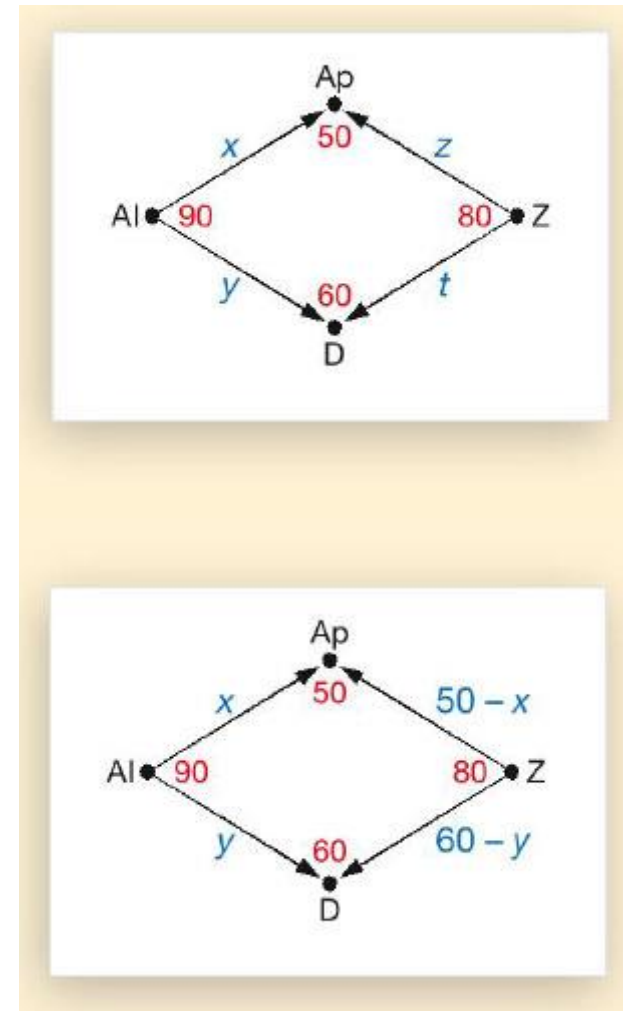
Stel de beperkende voorwaarden op:

$x \geq 0, y \geq 0, 50 - x \geq 0$ en $60 - y \geq 0$ (aantallen)

$x + y \leq 90$ (in Almelo zijn 90 tv's aanwezig)

$(50 - x) + (60 - y) \leq 80 \Leftrightarrow x + y \geq 30$.

(In Zutphen zijn 80 tv's aanwezig)



Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 167/168):

Stap 2:

Stel de doelfunctie op.

Het doel is om de transportkosten T te minimaliseren.

De transportkosten tussen de locaties zijn gegeven.

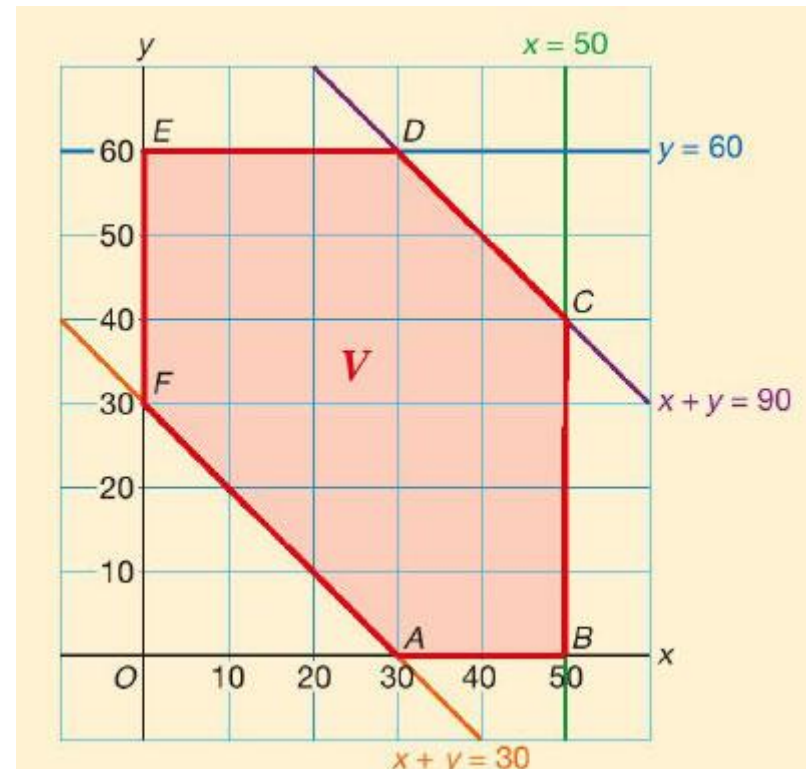
De variabelen om de hoeveelheden die tussen de locaties worden getransporteerd zijn eerder geïntroduceerd.

$$\begin{aligned} T &= 15x + 21y + 9(50 - x) + 18(60 - y) \\ &= 15x + 21y + 450 - 9x + 1080 - 18y \\ &= 6x + 3y + 1530 \end{aligned}$$

Stap 3:

Teken het toegestane gebied met behulp van de in stap 1 opgestelde beperkende voorwaarden.

Bereken indien nodig de hoekpunten van het toegestane gebied.

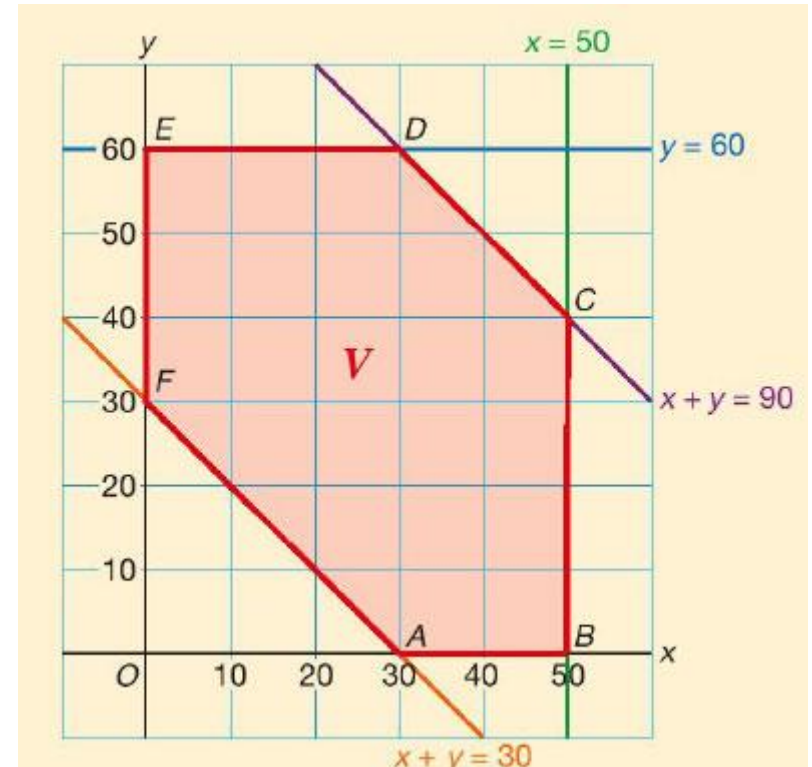


Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 167/168):

Stap 4:

Bereken de waarde van de doelfunctie in de hoekpunten (**hoekpuntmethode**)

Hoekpunt	Waarde T
$A(30, 0)$	1710
$B(50, 0)$	1830
$C(50, 40)$	1950
$D(30, 60)$	1890
$E(0, 60)$	1710
$F(0, 30)$	1620



De minimale transportkosten zijn 1620 euro.
Er gaan dan 30 tv's van Almelo naar Doetinchem,
50 van Zutphen naar Apeldoorn en 30 van Zutphen naar Doetinchem.