

Voorkennis

$y = -4x + 8$ is de **vergelijking van een lijn**. Hier wordt y **uitgedrukt in x** .

Algemeen:

Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt a en het snijpunt met de y -as $(0, b)$

$y = -4x + 8$ kan herschreven worden als $y + 4x = 8$

Dit is een **lineaire vergelijking met twee variabelen**.

Als je twee punten op deze lijn weet, kun je de grafiek van deze vergelijking tekenen.

Punt 1: Neem $x = 0 \Rightarrow y = 8$, dus het punt $(0, 8)$ ligt op de lijn;

Punt 2: Neem $y = 0 \Rightarrow x = 2$, dus het punt $(2, 0)$ ligt op de lijn.

Algemeen:

Een lineaire vergelijking met de variabelen x en y wordt geschreven als:
 $ax + by = c$. De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.

Voorkennis

De lijn k in de figuur hiernaast kan genoteerd worden als:

$$x = 3t + 2 \text{ en } y = t + 3$$

$$k: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 3 \end{cases}$$

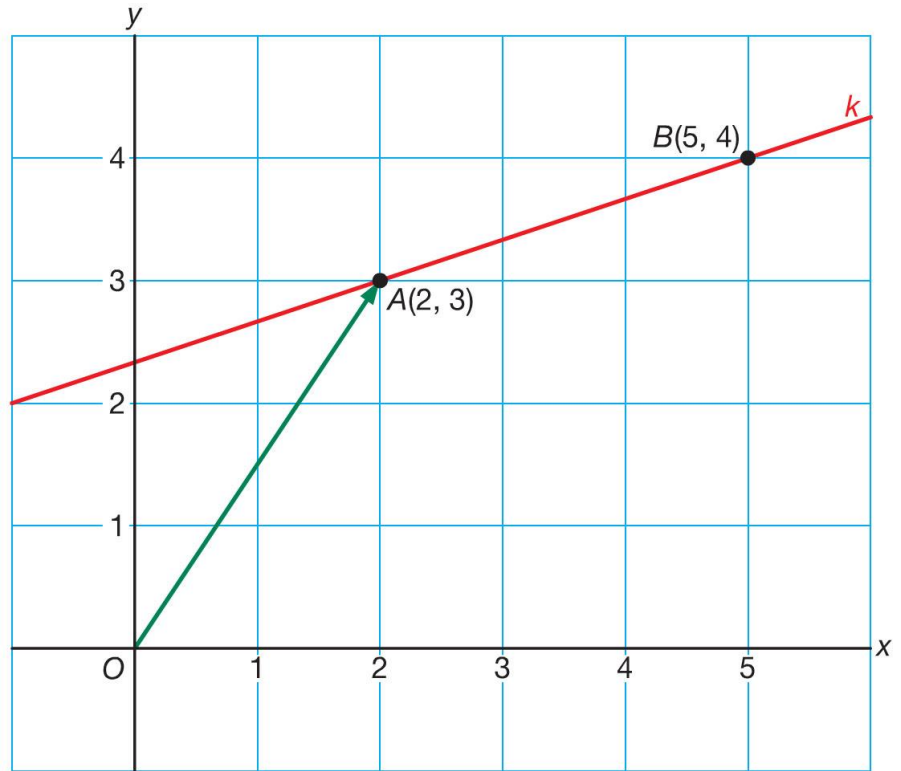
Je komt van punt A naar punt B door 3 naar rechts te gaan en 1 omhoog te gaan.

Voor $t = 0$ krijg je punt $A(2, 3)$

Voor $t = 1$ krijg je punt $B(5, 4)$

Voor elke waarde van t kom je uit op een punt op de lijn k .

Dit is de **parametervoorstelling** van lijn k .

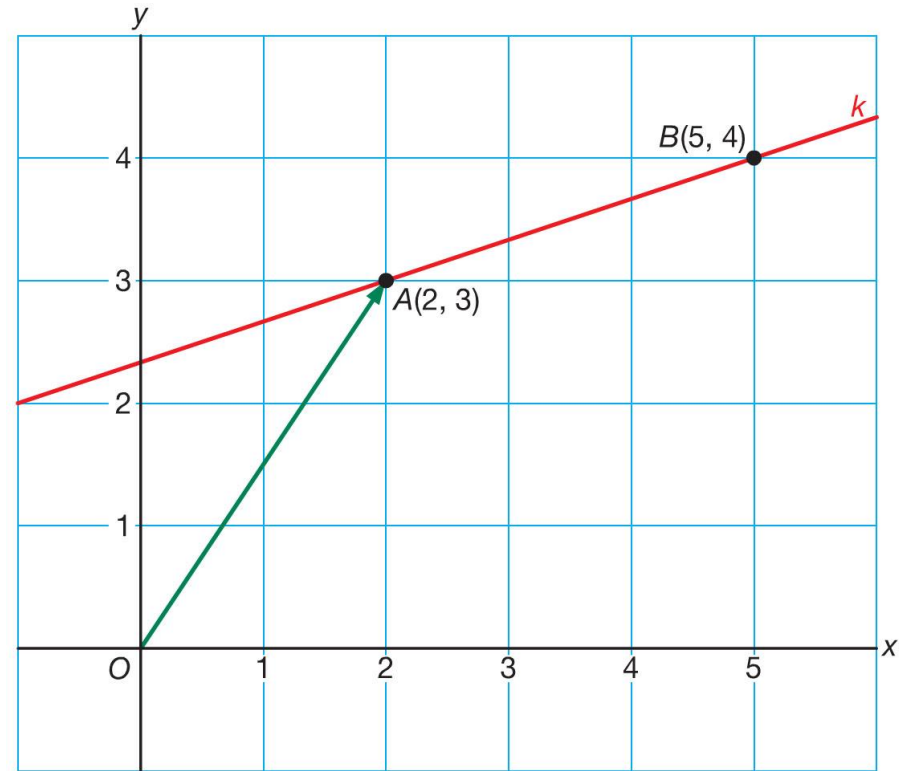


Voorkennis

De lijn k in de figuur hiernaast kan ook genoteerd worden als:
 $x = 6t + 5$ en $y = 2t + 4$

Zo zijn er oneindig veel parametervoorstellingen van deze lijn.

Dit is ook een **parametervoorstelling** van lijn k .



$$\begin{cases} x = 3t + 2 & |1| \\ y = t + 3 & |3| \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ 3y = 3t + 9 \end{cases}$$

$$x - 3y = -7$$

Het elimineren van t uit de parametervoorstelling van de lijn, geeft de vergelijking van de lijn.

Voorkennis

Voorbeeld:

Bereken exact de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn $k: 3x + 2y = 12$.

Stap 1:

Stel de vergelijking op van de lijn l .

De lijn l gaat door het punt $A(5, 5)$ en staat loodrecht op lijn k .

$$l: 2x - 3y = c$$

Invullen van het punt $A(5,5)$ geeft:

$$2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = -5 = c$$

$$\text{Dus: } l: 2x - 3y = 5.$$

Voorkennis

Voorbeeld:

Bereken exact de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn k : $3x + 2y = 12$.

Stap 2:

Bepaal het snijpunt B van de lijnen k en l .

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 & |3| \\ 2x - 3y = -5 & |2| \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 6y = 36 \\ 4x - 6y = -10 \end{cases}$$

$$13x = 26$$

$$x = 2$$

Invullen geeft: $3 \cdot 2 + 2y = 12 \Rightarrow y = 3$ en dus het snijpunt $B(2, 3)$

Voorkennis

Voorbeeld:

Bereken exact de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn $k: 3x + 2y = 12$.

Stap 3:

Bereken de afstand van punt A tot de lijn k .

Er geldt nu: $d(A, k) = d(A, B)$.

$$d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(2-5)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 59/62):

Doel:

Je weet van vectoren de volgende dingen:

- ✓ Je weet wat een vector is;
- ✓ Je kunt de lengte van een vector berekenen;
- ✓ Je kunt de somvector van twee vectoren berekenen;
- ✓ Je kunt vectoren optellen met de kop-staart constructie;
- ✓ Je weet wat tegengestelde vectoren zijn;
- ✓ Je weet hoe een vector in twee onderling loodrechte componenten ontbonden kan worden.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 59/62):

De pijlen van $O(0, 0)$ naar $A(4, 2)$
en van $A(4, 2)$ naar $B(2, 3)$ zijn **vectoren**.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Het bovenste **kengetal** geeft aan hoeveel de vector naar links of rechts gaat.

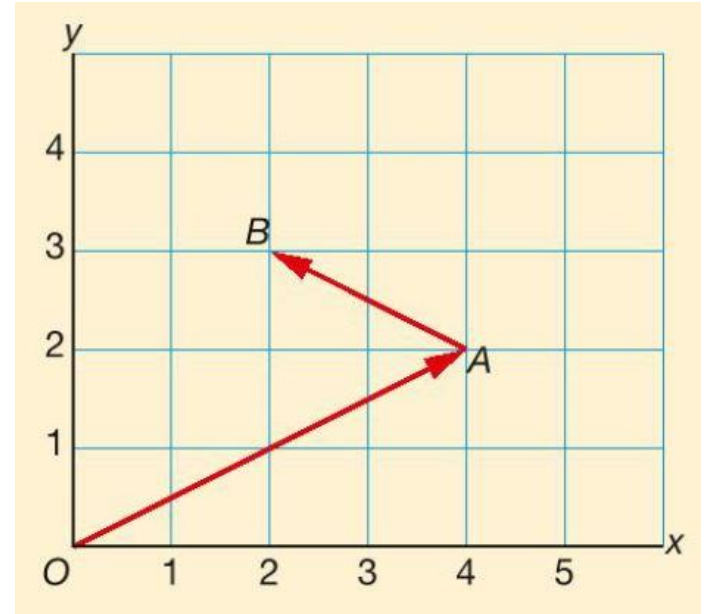
Het onderste **kengetal** geeft aan hoeveel de vector naar boven of beneden gaat.

Elke vector heeft een **richting** en een **lengte**.

De lengte van de vector die in de oorsprong start is te berekenen met de stelling van Pythagoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Gelijke vectoren hebben dezelfde lengte en dezelfde richting.



Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 59/62):

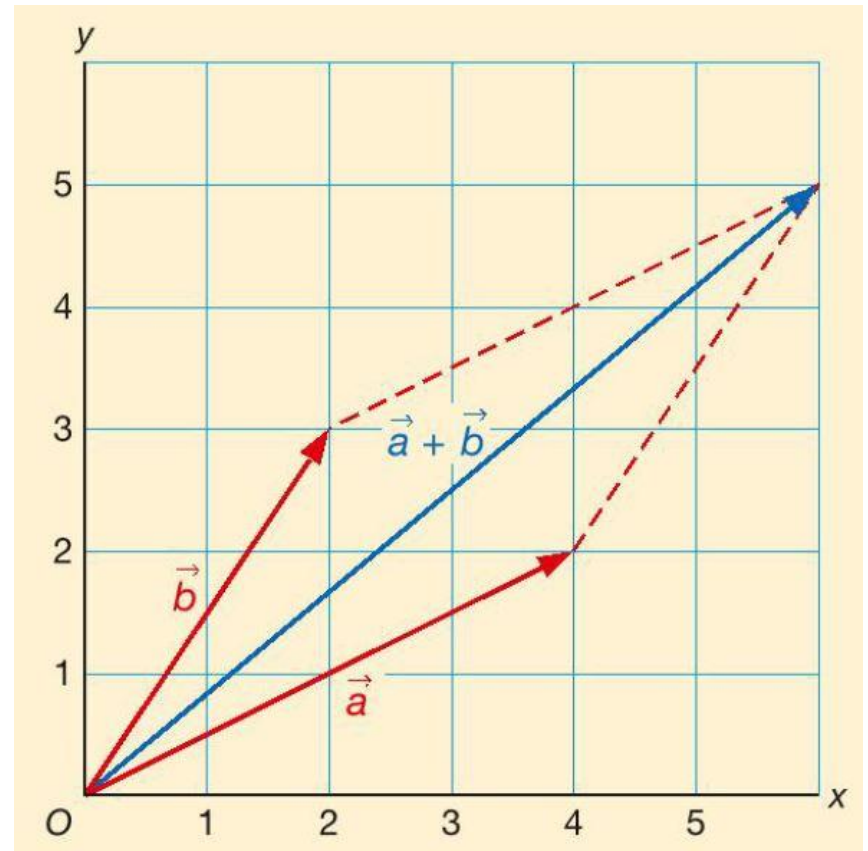
Optellen van vectoren met de parallellogramconstructie:

Gegeven zijn de vectoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De **somvector** is de diagonaal van het parallellogram waarvan de twee gegeven vectoren zijden zijn.



Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 59/62):

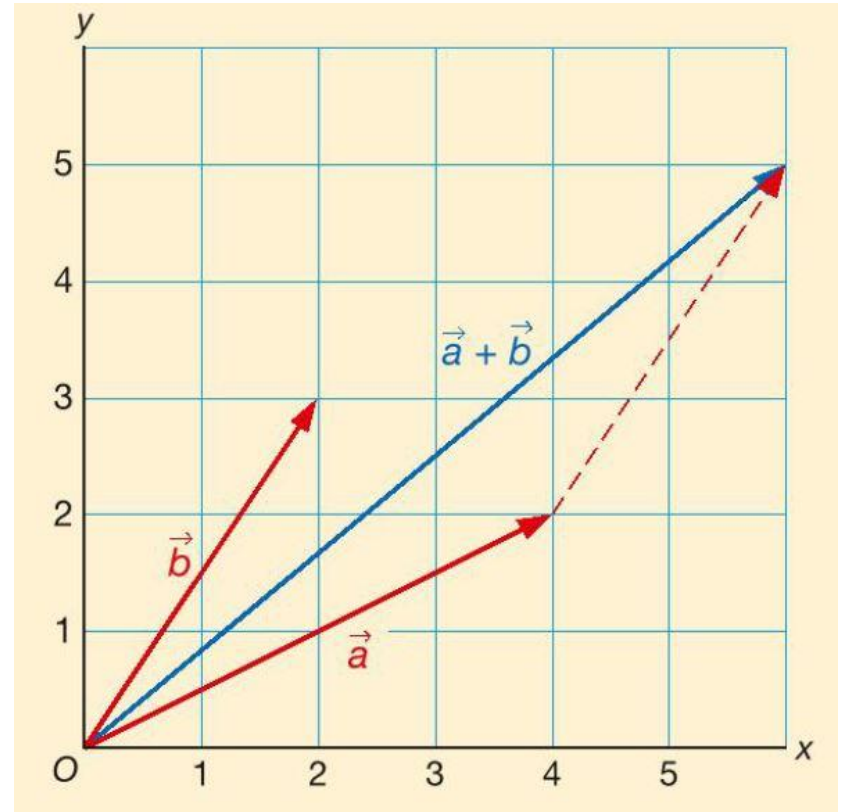
Optellen van vectoren met de kop-staartconstructie:

Gegeven zijn de vectoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De vector $\vec{b}$ wordt verschoven zo, dat zijn “staart” aansluit bij de “kop” van $\vec{a}$.



Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 59/62):

Optellen van vectoren met de kop-staartconstructie:

Gegeven zijn de vectoren:

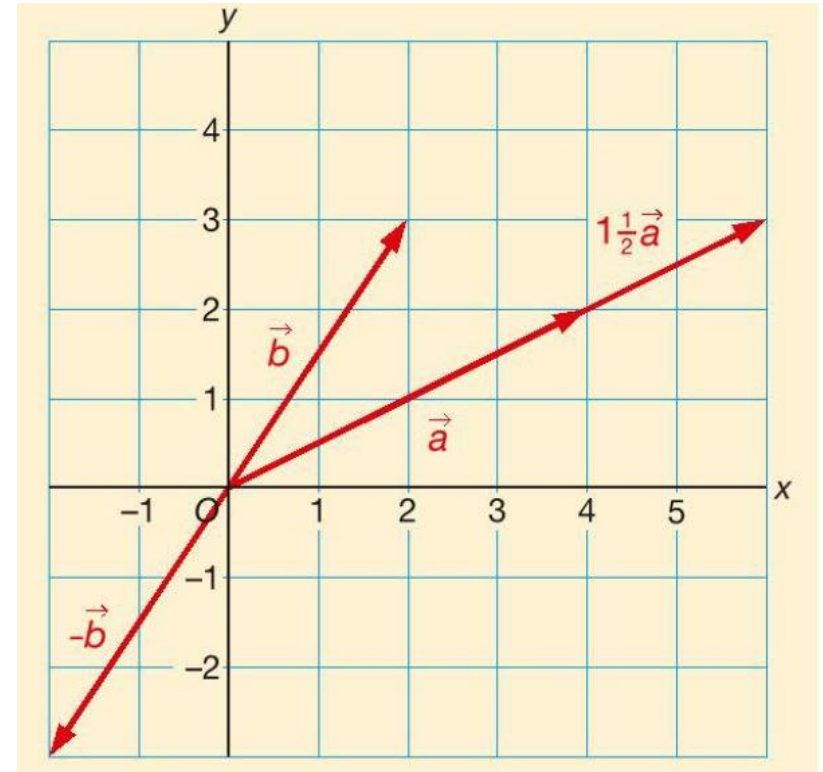
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

In het plaatje staan ook de vectoren:

$$1\frac{1}{2}\vec{a} = 1\frac{1}{2} \cdot \vec{a} = 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

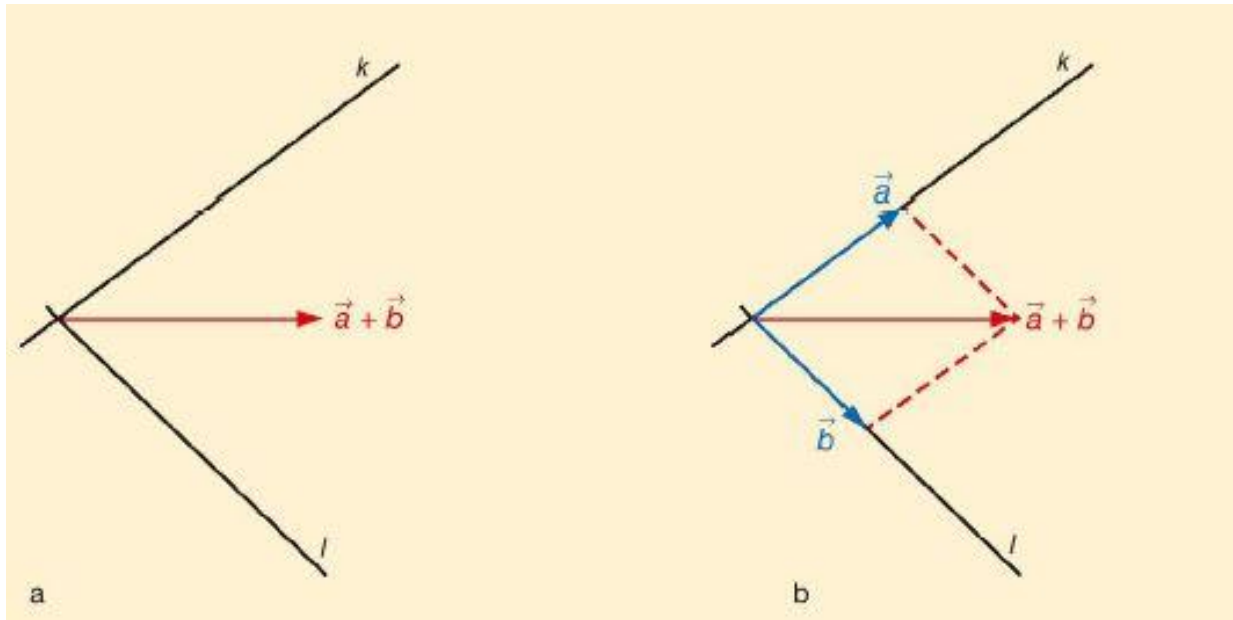
$$-\vec{b} = -1 \cdot \vec{b} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } -\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ zijn}$$



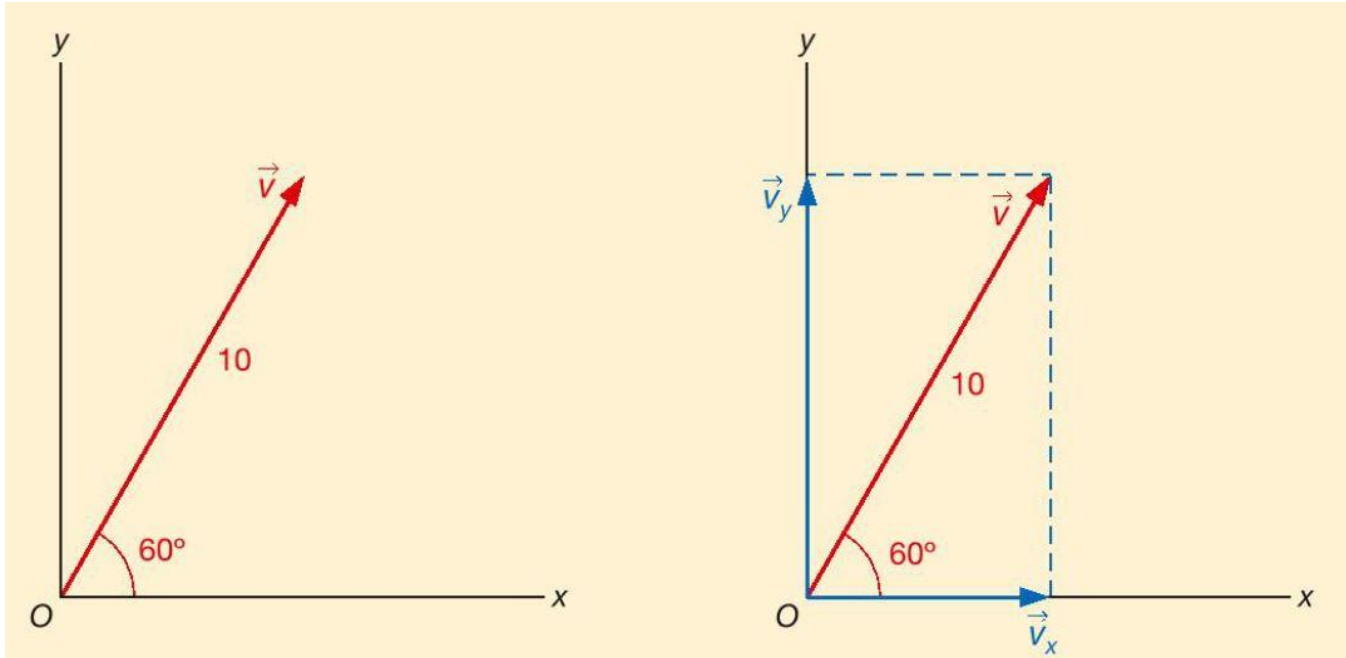
tegengestelde vectoren. Deze hebben dezelfde lengte en een tegengestelde richting.

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 59/62):



Links staat de somvector $\vec{a} + \vec{b}$. Deze somvector kan **ontbonden worden in de componenten** $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Dit kan door het tekenen van een parallellogram. De twee vectoren waaruit de somvector is opgebouwd liggen op de gegeven lijnen. De rode stippellijnen zijn evenwijdig aan de gegeven lijnen getekend.

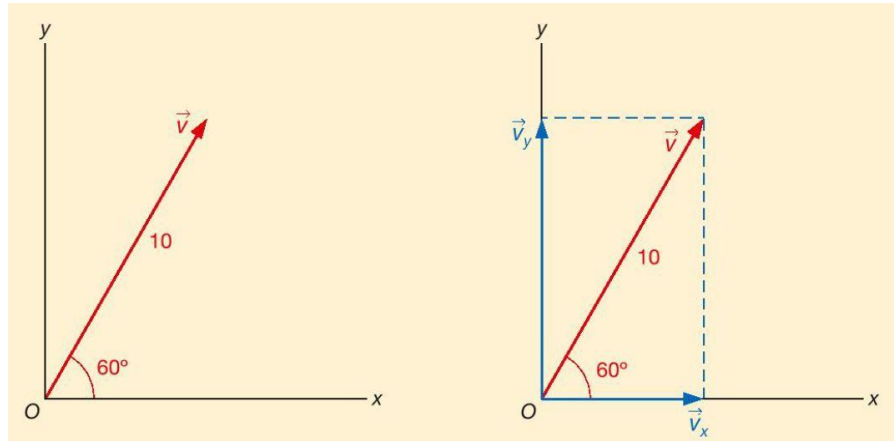
Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 59/62):



In het rechterplaatje is de vector $\vec{v}$ ontbonden in twee **loodrechte componenten** $\vec{v}_x$ en $\vec{v}_y$

Hierdoor ontstaan rechthoekige driehoeken. Dit maakt het mogelijk om van deze loodrechte componenten de lengte te berekenen.

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 59/62):



$$\cos(60^\circ) = \frac{|\vec{v}_x|}{10} \Leftrightarrow 10 \cdot \cos(60^\circ) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{|\vec{v}_y|}{10} \Leftrightarrow 10 \cdot \sin(60^\circ) = 10 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

In zijn algemeenheid geldt dus voor een vector die in twee onderling loodrechte componenten is ontbonden:

$$|\vec{v}_x| = |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi) \quad \text{en} \quad |\vec{v}_y| = |\vec{v}| \cdot \sin(\varphi) \quad \text{met } \varphi \text{ als hoek van de vector.}$$

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 64/65):

Doel:

- Je kunt van een lijn een vectorvoorstelling opstellen bestaande uit een steunvector en een richtingsvector;
- Je kunt de vectorvoorstelling opstellen van een lijn door een tweetal gegeven punten;

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 13, 14, 16 t/m 20

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 64/65):

De lijn k in de figuur hiernaast kan genoteerd worden als:

$$x = 2 + 3\lambda \text{ en } y = 3 + \lambda$$

$$k: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$$

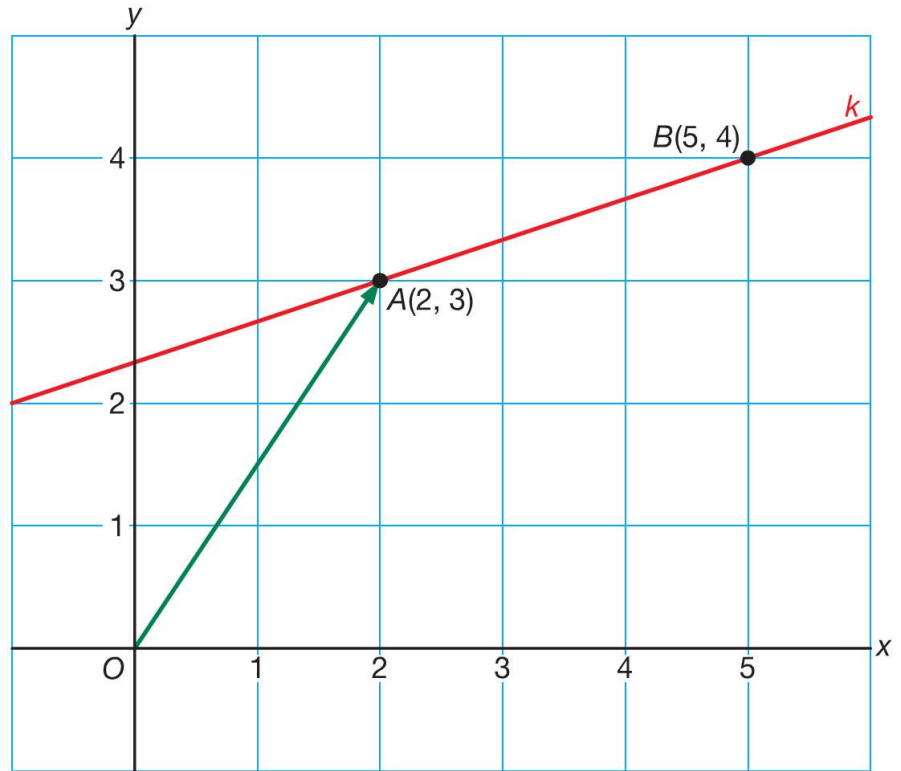
Je komt van punt A naar punt B door 3 naar rechts te gaan en 1 omhoog te gaan.

Voor $\lambda = 0$ krijg je punt $A(2, 3)$

Voor $\lambda = 1$ krijg je punt $B(5, 4)$

Voor elke waarde van λ kom je uit op een punt op de lijn k .

Dit is de **parametervoorstelling** van lijn k .



Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 64/65):

De lijn k in de figuur hiernaast kan ook genoteerd worden als:

$$k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dit is de **vectorvoorstelling** van de lijn.

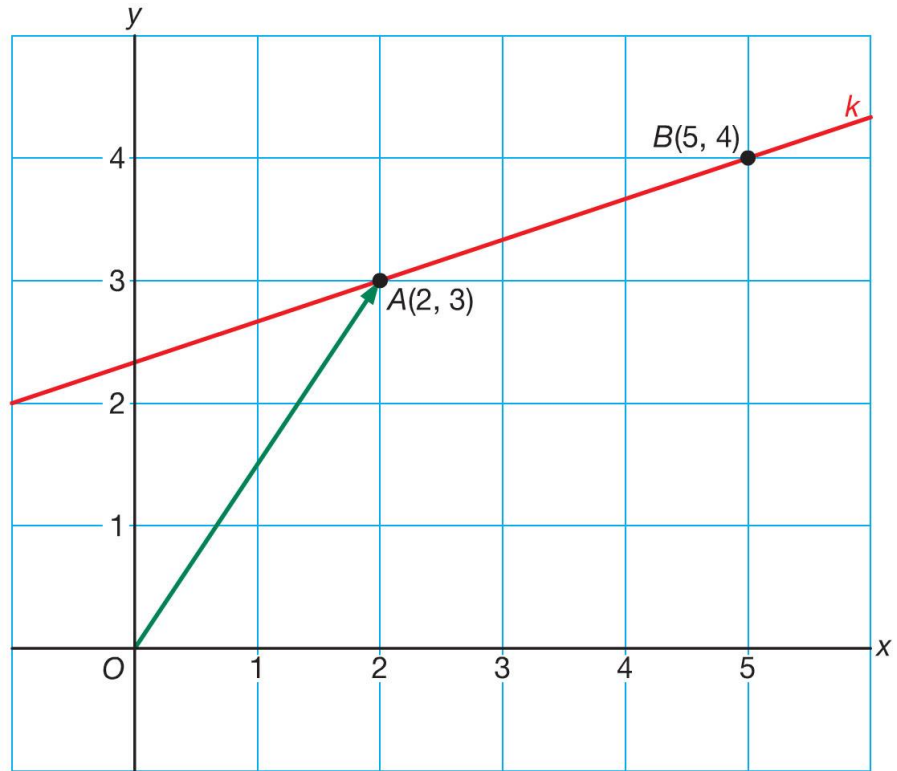
De **steunvector** is $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

De **richtingsvector** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Let op:

$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ is ook een steunvector van de lijn, want het punt $(5, 4)$ ligt ook op de lijn k .

$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ is ook een richtingsvector van de lijn.

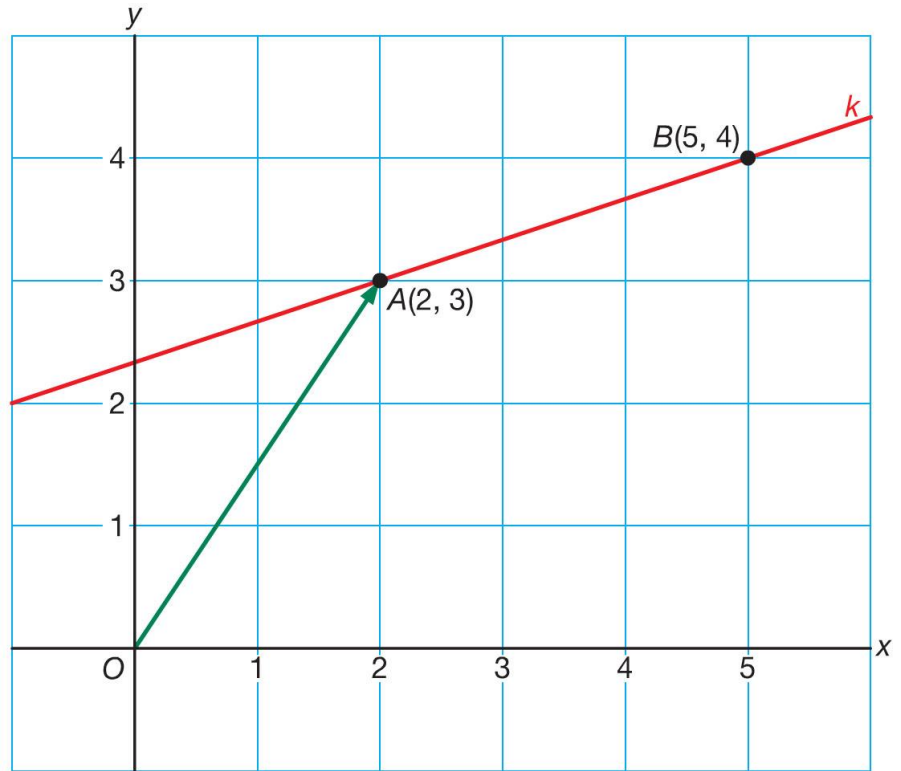


Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 64/65):

Algemeen:

Een vectorvoorstelling van de lijn door de punten A en B is gelijk aan:

$$k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$



Leerdoel 3 (Theorie A – pagina 69/70):

Doel:

- Je kunt de afstand van een punt tot een lijn berekenen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 22 t/m 28

Leerdoel 3 (Theorie A – pagina 69/70):

Hiernaast is de lijn $k: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

ofwel $k: bx + ay = ab$ getekend.

Er geldt: $OA = |a|$, $OB = |b|$ en $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

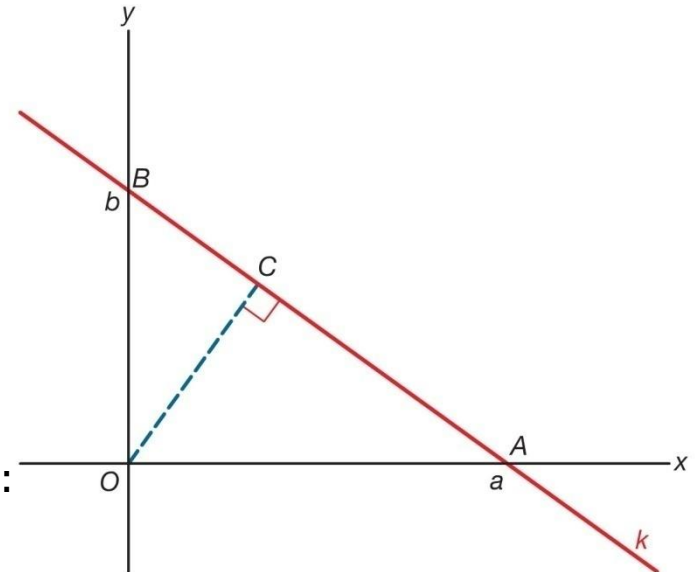
De afstand van O tot lijn k is $OC = d(O, k)$.

Met behulp van de zijde x hoogte – methode krijg je:

$$d(O, k) \cdot AB = OA \cdot OB$$

$$d(O, k) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |ab|$$

$$d(O, k) = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



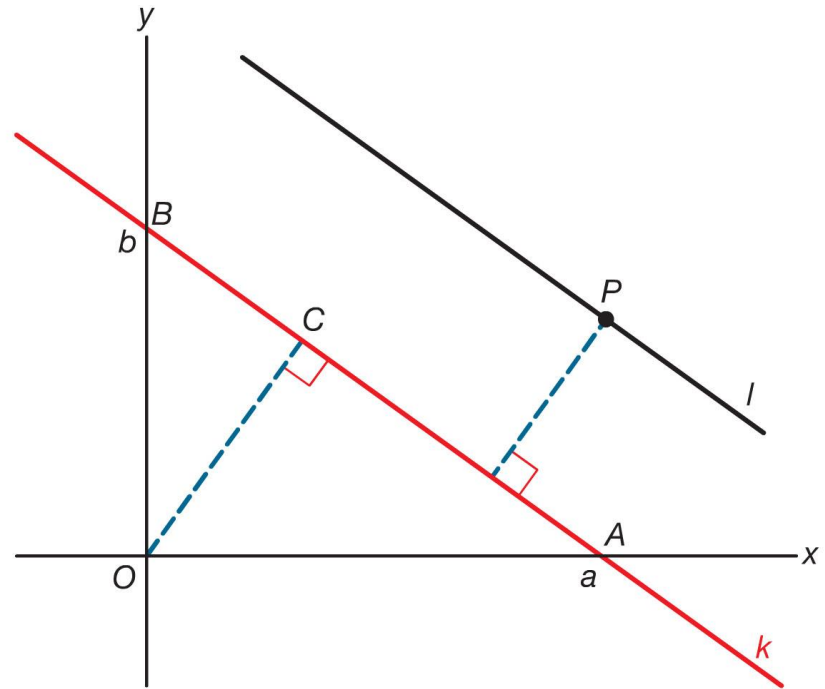
Leerdoel 3 (Theorie A – pagina 69/70):

Hiernaast is de lijn $k : ax + by = c$ getekend. l is een hulplijn evenwijdig aan lijn k door het punt P . Dus $l : ax + by = ax_p + by_p$.

$$d(P, k) = d(l, k) = |d(O, l) - d(O, k)|$$

De afstand van punt $P(x_p, y_p)$ tot de lijn

$$k: ax + by = c \text{ is } d(P, k) = \frac{|ax_p + by_p - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Leerdoel 3 (Theorie A – pagina 69/70):

Voorbeeld:

Gegeven is het punt $P(5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

Stel vergelijkingen op van de lijnen k die door het punt $(6,0)$ gaan en op afstand $\sqrt{10}$ van P liggen.

Stap 1:

Stel voor zover mogelijk de vergelijkingen op van de lijnen k .

Er geldt: $k: y = ax + b$

Omdat $(6, 0)$ op k ligt, geldt er $6a + b = 0$ en dus $b = -6a$

Voor de lijnen k geldt nu: $k: y = ax - 6a \Leftrightarrow k: ax - y - 6a = 0$

Stap 2:

Bepaal de waarden van a .

Omdat $d(A, k) = \sqrt{10}$ is, geldt er:
$$\frac{|ax_p + by_p - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{|5\frac{1}{2}a - 3\frac{1}{2} - 6a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

Leerdoel 3 (Theorie A – pagina 69/70):

Voorbeeld:

Gegeven is het punt $P(5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

Stel vergelijkingen op van de lijnen k die door het punt $(6,0)$ gaan en op afstand $\sqrt{10}$ van P liggen.

Stap 2:

Bepaal de waarden van a .

$$\frac{|5\frac{1}{2}a - 3\frac{1}{2} - 6a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|-\frac{1}{2}a - 3\frac{1}{2}| = \sqrt{10a^2 + 10}$$

$$\frac{1}{4}a^2 + 3\frac{1}{2}a + 12\frac{1}{4} = 10a^2 + 10$$

$$9\frac{3}{4}a^2 - 3\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{4} = 0$$

$$39a^2 - 14a - 9 = 0$$

$$D = (-14)^2 - 4 \cdot 39 \cdot -9 = 1600$$

$$a = \frac{14 - 40}{78} = -\frac{1}{3} \vee a = \frac{14 + 40}{78} = \frac{9}{13}$$

Leerdoel 3 (Theorie A – pagina 69/70):

Voorbeeld:

Gegeven is het punt $P(5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

Stel vergelijkingen op van de lijnen k die door het punt $(6,0)$ gaan en op afstand $\sqrt{10}$ van P liggen.

Stap 3:

Stel de vergelijkingen van de lijnen van k .

In stap 1 heb je vastgesteld: $k: y = ax - 6a$

Invullen van de oplossingen van a , gevonden in stap 2 geeft:

$$k_1 : y = -\frac{1}{3}x - 6 \cdot -\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad k_1 : y = -\frac{1}{3}x + 2$$

$$k_2 : y = \frac{9}{13}x - 6 \cdot \frac{9}{13} \quad \Leftrightarrow \quad k_2 : y = \frac{9}{13}x - 4\frac{2}{13}$$

Leerdoel 4 (Theorie B – pagina 71/72):

Doel:

- Je kunt de vergelijking opstellen van een lijn met een gegeven richtingscoëfficiënt die een gegeven cirkel raakt;
- Je kunt de vergelijking opstellen van een lijn die door een gegeven punt gaat en een gegeven cirkel raakt.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 32 t/m 35

Leerdoel 4 (Theorie B – pagina 71/72):

De afstand van het middelpunt $M(a, b)$ van de cirkel en een punt A op de cirkel is gelijk aan:

$$d(A, M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Algemeen:

Een vergelijking van de cirkel kan op de volgende manier geschreven worden:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

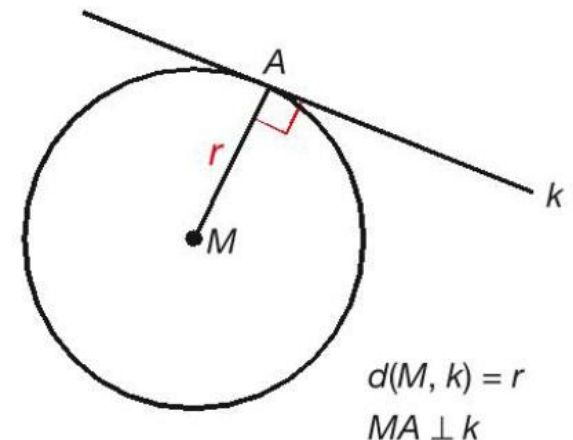
Dit is een cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r .

Stelling van raaklijn aan cirkel:

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Als $d(M, A) = r$ dan ligt A op de cirkel.

In hoofdstuk 8 heb je gerekend met de discriminant-methode
En het feit dat een raaklijn aan een cirkel loodrecht op de straal staat.



Leerdoel 4 (Theorie B – pagina 71/72):

Voorbeeld:

Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ en het punt $A(9,2)$

Stel de vergelijking op van de lijnen k_1 en k_2 met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$ die c raken.

Stap 1:

Herschrijf de gegeven vergelijking van de cirkel.

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 12 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

De cirkel heeft middelpunt $M(2, 3)$ en $r = 5$.

Stap 2:

Stel voor zover mogelijk de vergelijking op van de gevraagde lijnen:

$$k: y = \frac{3}{4}x + b \Leftrightarrow k: \frac{3}{4}x - y + b = 0 \Leftrightarrow k: 3x - 4y + 4b = 0$$

Leerdoel 4 (Theorie B – pagina 71/72):

Voorbeeld:

Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ en het punt $A(9,2)$

Stel de vergelijking op van de lijnen k_1 en k_2 met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$ die c raken.

Stap 3:

Maak gebruik van het gegeven dat de lijnen k_1 en k_2 de cirkel c raken.

Omdat $d(M, k) = r$ is, geldt er: $\frac{|ax_M + by_M - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5$

Met behulp van stap 2 waarin is aangetoond dat geldt: $k: 3x - 4y + 4b = 0$ volgt nu:

$$\frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 4b|}{\sqrt{9 + 16}} = 5$$

$$|4b - 6| = 25$$

$$4b - 6 = 25 \vee 4b - 6 = -25$$

$$4b = 31 \vee 4b = -19$$

Dit geeft de lijnen $k_1: 3x - 4y + 31 = 0$ en $k_2: 3x - 4y - 19 = 0$

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 75/76):

Doel:

- Je kunt het inproduct van twee vectoren berekenen;
- Je kunt de hoek tussen twee vectoren berekenen;
- Je kunt de hoek tussen twee snijdende lijnen berekenen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 37 t/m 42

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 75/76):

Algemeen:

De hoek φ tussen de twee vectoren kan berekend worden met behulp van de cosinusregel in driehoek OAB .

$$AB^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

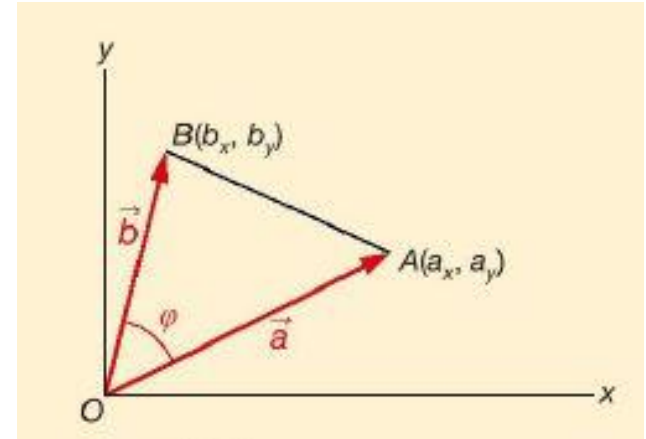
Deze regel valt te herleiden tot:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - AB^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Je mag nu aannemen dat geldt:

$$\cos(\varphi) = \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

De teller is hierbij het **inproduct** van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$



Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 75/76):

Voorbeeld 1:

Bereken de hoek tussen de twee vectoren in het plaatje rechts.

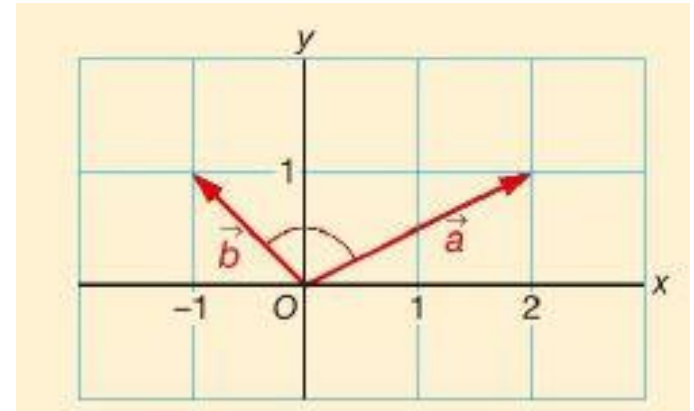
$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \text{en} \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$



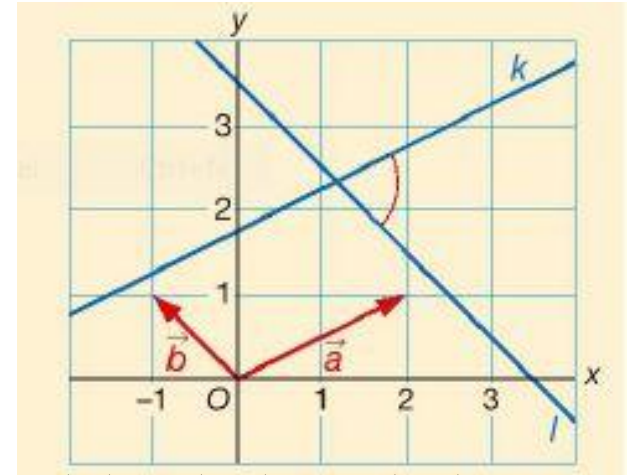
Uitrekenen met behulp van de GR ($\cos^{-1}$) geeft als antwoord **108,4°**.

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 75/76):

Algemeen:

De hoek φ tussen de twee snijdende lijnen kan als volgt berekend worden:

$$\cos(\angle(k,l)) = \cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l)) = \frac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}$$



Voorbeeld 2:

Gegeven zijn de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bereken $\angle(k,l)$

$$\cos(\angle(k,l)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|2 \cdot -3 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{130}}$$

Hieruit volgt $\angle(k,l) \approx 74,7^\circ$

Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 79/80):

Doel:

- Je weet wanneer twee vectoren loodrecht op elkaar staan;
- Je weet wat een normaalvector van een lijn is;
- Bij het opstellen van de vergelijking van een lijn of de vectorvoorstelling van een lijn kun je gebruik maken van de normaalvector.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 45 t/m 52

Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 79/80):

Algemeen:

De hoek φ tussen de twee vectoren kan berekend worden met behulp van de cosinusregel in driehoek OAB .

$$\cos(\varphi) = \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ geeft $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 0$ en dus $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$

Als het bovenstaande geldt, staan de twee vectoren loodrecht op elkaar.

Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 79/80):

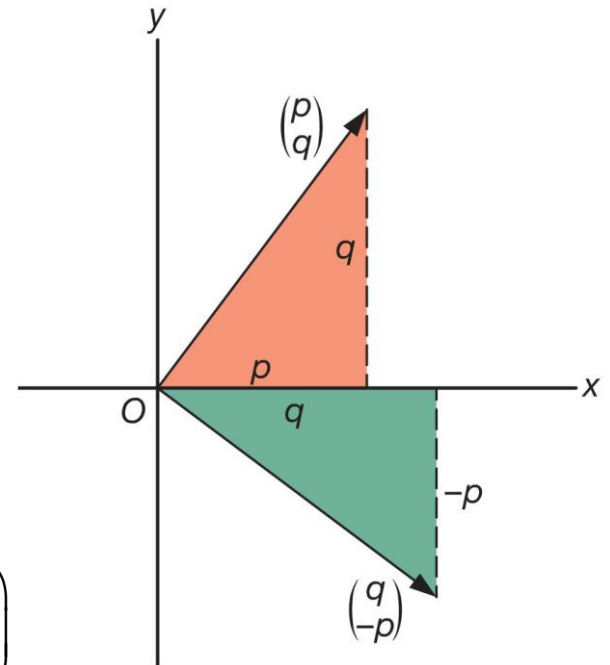
De vector $\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de vector $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Dit volgt uit het plaatje hiernaast.

De vector $\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ is de **normaalvector**.

Een normaalvector van een lijn is een vector die loodrecht op een lijn staat.

Een normaalvector $\vec{n}_l$ van de lijn $l: ax + by = c$ is $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 79/80):

Voorbeeld 1:

Gegeven is de lijn $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Stel de vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$

$$\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ geeft } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$k: 5x - 4y = c$$

Het punt $(2, 3)$ ligt op de lijn k . Invullen hiervan geeft:

$$c = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -2.$$

De gevraagde vergelijking is dus $k: 5x - 4y = 2$

Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 79/80):

Voorbeeld 2:

Gegeven is de lijn l : $3x - 7y = 8$

Stel een vectorvoorstelling op van l .

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ geeft } \vec{r}_l = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(5, 1) \text{ ligt op } l \text{ en dit geeft } \vec{s}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hieruit volgt } l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Let op:

Als steunvector kun je elk punt van l gebruiken. Gebruik bij voorkeur een punt met gehele coördinaten.

Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 79/80):

Voorbeeld 3:

Gegeven zijn de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $l: 3x - 7y = 8$

Bereken de coördinaten van het snijpunt S van deze lijnen.

Invullen van $x = 2 + 4\lambda$ en $y = 3 + 5\lambda$ in $3x - 7y = 8$ geeft:

$$3(2 + 4\lambda) - 7(3 + 5\lambda) = 8$$

$$6 + 12\lambda - 21 - 35\lambda = 8$$

$$-23\lambda = 23$$

$$\lambda = -1$$

$\lambda = -1$ geeft $x = 2 + 4 \cdot -1$ en $y = 3 + 5 \cdot -1 = -2$

Het snijpunt is $S(-2, -2)$.

Leerdoel 7 (Theorie A – pagina 83/84):

Doel:

- Je kunt de coördinaten van een punt berekenen met behulp van vectoren.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 54 t/m 61

Leerdoel 7 (Theorie A – pagina 83/84):

In het plaatje hiernaast is de vector

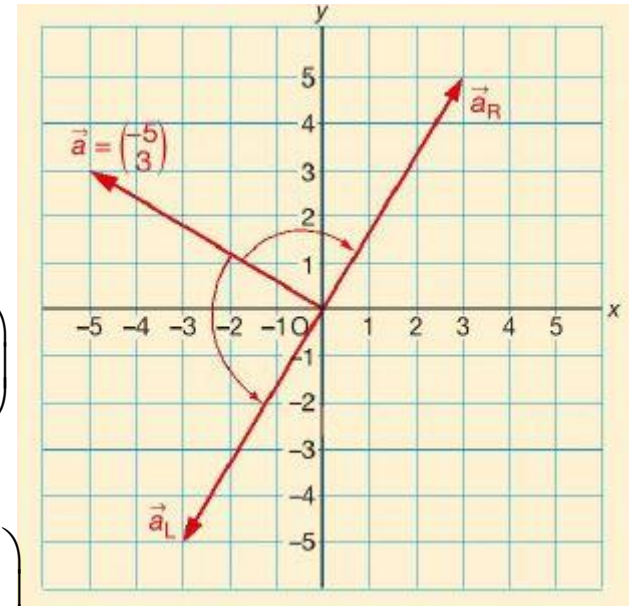
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ getekend.}$$

Als de vector 90° naar rechts gedraaid

(met de klok mee) wordt ontstaat de vector $\vec{a}_R = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Als de vector 90° naar links gedraaid

(tegen de klok in) wordt ontstaat de vector $\vec{a}_L = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$



Algemeen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ rechtsom draaien over } 90^\circ \text{ geeft } \vec{a}_R = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ linksom draaien over } 90^\circ \text{ geeft } \vec{a}_L = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$$

Leerdoel 7 (Theorie A – pagina 83/84):

Voorbeeld 1:

Bereken de coördinaten van hoekpunt C van vierkant $ABCD$ met behulp van vectoren.

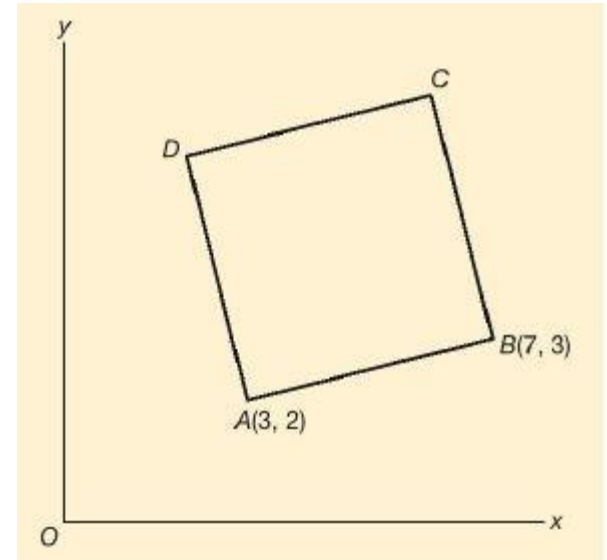
Er geldt: $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \overrightarrow{AD} = \vec{b} + \overrightarrow{AB}_L$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en dus geldt:} \quad \overrightarrow{AB}_L = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{AB}_L = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

De coördinaten van hoekpunt C zijn: $C(6, 7)$



Leerdoel 7 (Theorie A – pagina 83/84):

Voorbeeld 2:

Getekend is het vierkant $ABCD$ met $A(1, -2)$ en $C(5, 8)$.
Bereken de coördinaten van B .

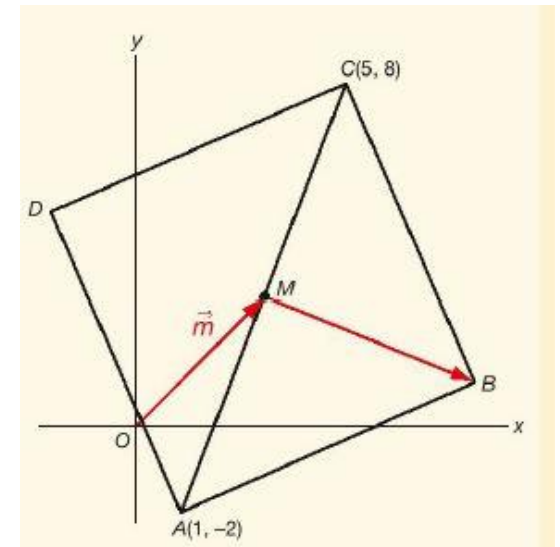
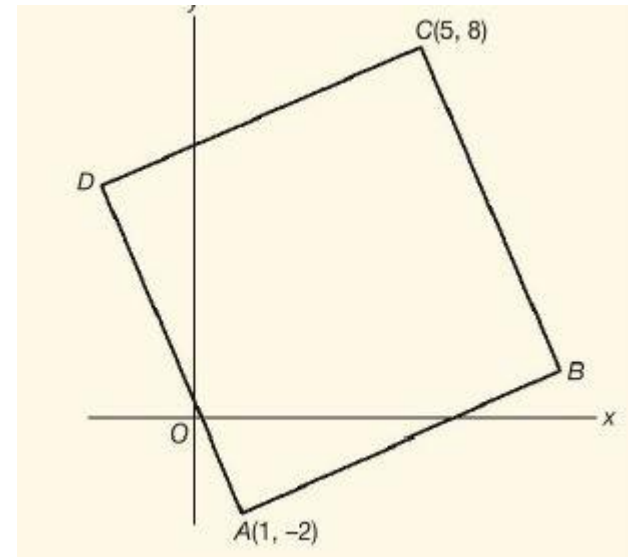
Er geldt: $\vec{b} = \vec{m} + \overrightarrow{MB} = \vec{m} + \overrightarrow{AM}_R$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} = \vec{m} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{er geldt: } \overrightarrow{AM}_R = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \vec{m} + \overrightarrow{AM}_R = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De coördinaten van hoekpunt B zijn: $B(8, 1)$



Leerdoel 8 (Theorie B – pagina 87):

Doel:

- Je kunt de coördinaten van een punt berekenen met behulp van vectoren en hierbij indien nodig gebruik maken van de stelling van Van Aubel.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 63 t/m 66

Leerdoel 8 (Theorie B – pagina 87):

Voorbeeld 1:

Getekend is de vierkant $OABC$ met $A(8, 0)$, $B(5, 7)$ en $C(2, 5)$. Op elk van de zijden is een gelijkbenige rechthoekige driehoek getekend.

Bereken de coördinaten van punt P .

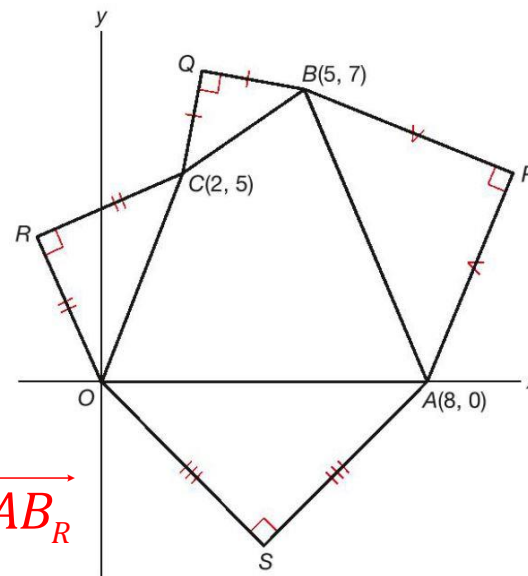
We noemen met midden van lijnstuk AB , punt M .

Er geldt: $\vec{p} = \vec{m} + \vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{AM}_R = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}\vec{AB}_R$

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{er geldt: } \vec{AB}_R = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}\vec{AB}_R = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De coördinaten van punt P zijn: $P(10, 5)$



Leerdoel 8 (Theorie B – pagina 87):

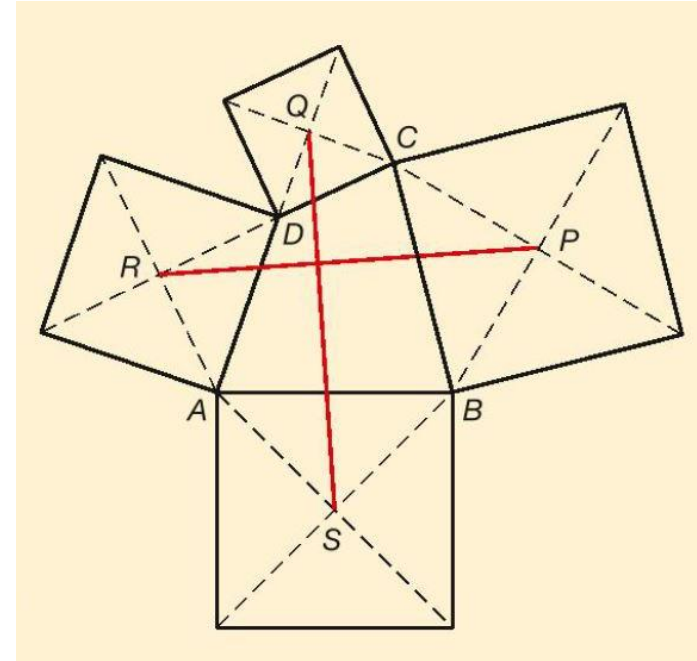
Voorbeeld 1:

Getekend is de vierkant $OABC$ met $A(8, 0)$, $B(5, 7)$ en $C(2, 5)$. Op elk van de zijden is een gelijkbenige rechthoekige driehoek getekend.

Op dezelfde manier zijn nu te berekenen:
 $Q(2\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$, $R(-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$ en $S(4, -4)$

In het plaatje rechts is de **stelling van Aubel** weergegeven:

Er geldt: $PR \perp QS$ en $PR = QS$



Leerdoel 8 (Theorie B – pagina 87):

Voorbeeld 2 (Opgave 63):

Gegeven zijn de gelijkbenige rechthoekige driehoeken OAB en OCD .

Bewijs dat $AC = BD$ en $AC \perp BD$.

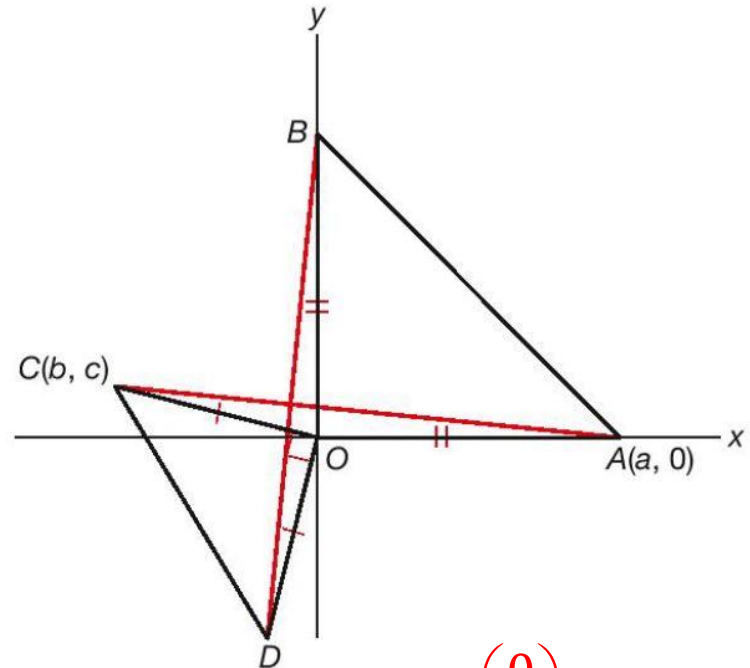
Er geldt: $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ c \end{pmatrix}$

en: $\vec{d} = \vec{c}_L = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}$

Vanwege de gelijkbenigheid van driehoek OAB geldt $B(0, a)$ en dus $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b-a \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt dat $AC = BD$ en $AC \perp BD$.



Leerdoel 9 (Theorie A – pagina 93):

Doel:

- Je weet hoe de baan van een punt beschreven kan worden door bewegingsvergelijkingen;
- Je weet dat de bewegingsvergelijkingen samen een parametervoorstelling van de baan vormen;
- Je kunt de kromme die bij een parametervoorstelling hoort plotten op je GR;
- Je kunt de plaatsvector, snelheidsvector en baansnelheid van een punt opstellen en hier berekeningen mee uitvoeren.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 73 t/m 76

Leerdoel 9 (Theorie A – pagina 93):

Voorbeeld 1:

De baan van een punt P (**parameterkromme**) is gegeven door de

parametervoorstelling
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t - 6 \end{cases}$$

t	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12
y	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6

Als je in de beide **bewegingsvergelijkingen** voor t de waarde 1 invult, krijg je de bijbehorende uitkomsten voor x en y . Op deze manier ontstaat de bovenstaande tabel.

Leerdoel 9 (Theorie A – pagina 93):

Voorbeeld 1:

De kromme die bij deze parametervoorstelling hoort,

kun je plotten op je GR:
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t - 6 \end{cases}$$

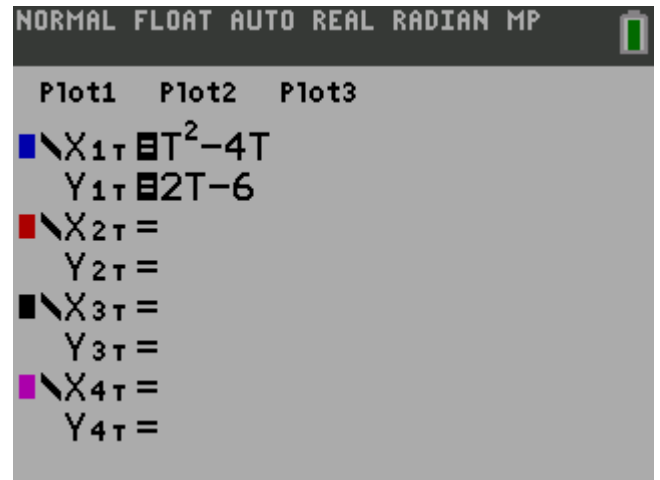
Stap 1:

Kies in het MODE menu op de derde regel RADIAN en op de vierde regel PAR.



Stap 2:

Vul bij Y= de parametervoorstelling in.



Leerdoel 9 (Theorie A – pagina 93):

Voorbeeld 1:

De kromme die bij deze parametervoorstelling hoort,

kun je plotten op je GR:
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t - 6 \end{cases}$$

Stap 3:

Kies WINDOW en vul de volgende waarden in:

$$T_{\min} = -2 \mid T_{\max} = 6$$

$$X_{\min} = -5 \mid X_{\max} = 15 \mid Y_{\min} = -10 \mid Y_{\max} = 10$$

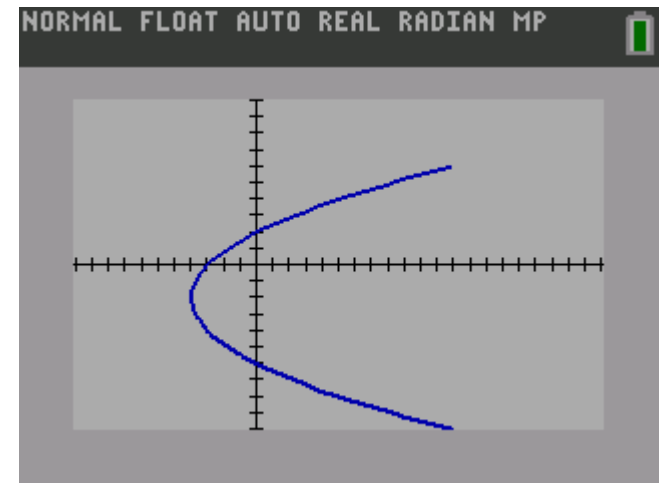
Stap 4:

Kies ZOOM | ZOOM | 5: ZSquare | ENTER

Let op:

Je hebt de parametervoorstelling nu geplot voor waarden van t van -2 tot en met 6.

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
DISTANCE BETWEEN TICK MARKS ON AXIS
WINDOW
Tmin=-2
Tmax=6
Tstep=.13089969389957
Xmin=-5
Xmax=15
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=1
```



Leerdoel 9 (Theorie A – pagina 93):

In het plaatje hiernaast is de vector $\vec{r}(t)$ getekend, die vanuit O het punt P aanwijst. Dit is de plaatsvector van P .

Bij de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

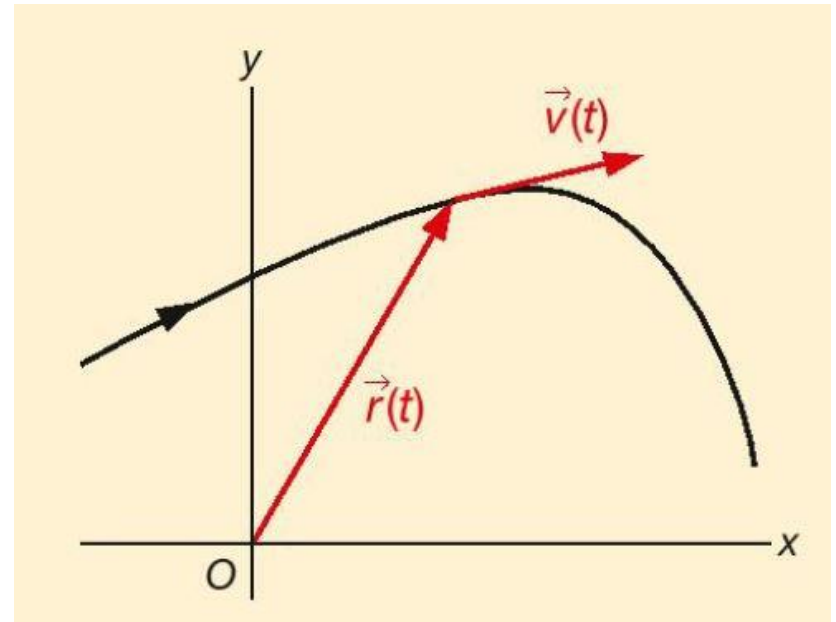
van een punt P hoort de **snelheidsvector**

$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. De snelheidsvector is een

richtingsvector van de raaklijn aan de baan op het tijdstip t .

De lengte van de snelheidsvector is de baansnelheid van P op het tijdstip t .

De baansnelheid van P is te berekenen met: $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$



Leerdoel 9 (Theorie A – pagina 93):

Voorbeeld 2:

De baan van een punt P is gegeven door de

parameter voorstelling $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t - 6 \end{cases}$

Bereken de coördinaten van het punt van de baan waarin de raaklijn evenwijdig aan de y -as is.

$$x(t) = t^2 - 4t \quad x'(t) = 2t - 4$$

$$y(t) = 2t - 6 \quad y'(t) = 2$$

Evenwijdig aan de y -as betekent $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

Oplossen van $2t - 4 = 0$ geeft $t = 2$.

Leerdoel 9 (Theorie A – pagina 93):

Voorbeeld 3:

De baan van een punt P is gegeven door de

parametervoorstelling
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t - 6 \end{cases}$$

Stel een vergelijking op van de lijn k die de baan van P raakt in het punt met $t = 3$.

$$\vec{r}_k = \begin{pmatrix} x'(3) \\ y'(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{en dus} \quad \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt: $k: 2x - 2y = c$.

Bij $t = 3$ volgt uit de tabel het punt $(-3, 0)$.

Dit invullen in de vergelijking van k geeft: $2x - 2y = -6$.

Leerdoel 10 (Theorie B – pagina 97):

Doel:

- Je kunt de plaatsvector, versnellingsvector en baanversnelling opstellen en hier berekeningen mee uitvoeren.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 80, 82, 83

Leerdoel 10 (Theorie B – pagina 97):

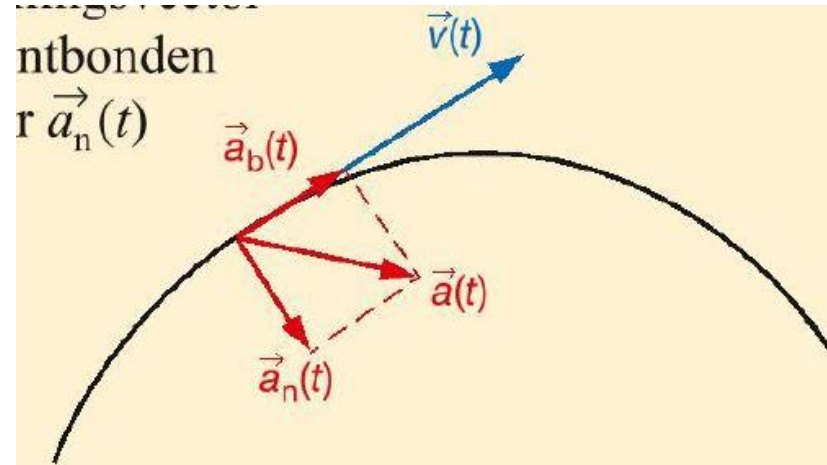
In het plaatje hiernaast zijn de snelheidsvector $\vec{v}(t)$ en de versnellingsvector $\vec{a}(t)$ op tijdstip t getekend. De lengte van de vector $\vec{a}_n(t)$ heeft te maken met de kromming van de baan. De lengte van de vector $\vec{a}_b(t)$ geeft de grootte van de baanversnelling van punt P .

Bij de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

van een punt P hoort de **snelheidsvector** $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

en de versnellingsvector $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$

en de baanversnelling $a_b(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|}$



Leerdoel 10 (Theorie B – pagina 97):

Voorbeeld:

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2t \end{cases}$

Druk de baanversnelling $a_b(t)$ uit in t .

Er geldt: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ \frac{1}{4}t^4 - 2t \end{pmatrix}$ en $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^3 - 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$

$$a_b(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{\begin{pmatrix} 2t \\ t^3 - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(2t)^2 + (t^3 - 2)^2}} = \frac{3t^5 - 6t^2 + 4t}{\sqrt{4t^2 + t^6 - 4t^3 + 4}}$$