

Voorkennis

Herhaling rekenregels voor machten:

Vermenigvuldigen is exponenten optellen:

$$a^3 \cdot a^5 = a^8$$

Optellen alleen bij gelijknamige termen:

$$3a^3 + 4a^3 = 7a^3$$

Bij macht van een macht exponenten vermenigvuldigen:

$$(a^5)^4 = a^{20}$$

Delen is exponenten aftrekken:

$$\frac{a^8}{a^2} = a^6$$

Macht van een product:

$$(2a^3)^4 = 16a^{12}$$

Algemeen:

$$1) a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$2) \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$3) (a^p)^q = a^{pq}$$

$$4) (ab)^p = a^p b^p$$

Voorkennis

Meer rekenregels:

$$5) a^0 = 1$$

$$\text{want } \frac{a^6}{a^6} = a^{6-6} = a^0 = 1$$

$$6) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{want } \frac{a^2}{a^7} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{a^2}{a^7} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}$$

Voorbeeld 1:

Schrijf als macht van a:

$$\frac{1}{a^8} : a^{-3} = a^{-8} : a^{-3} = a^{-8-(-3)} = a^{-5}$$

Voorbeeld 2:

Schrijf zonder negatieve exponenten:

$$\left(\frac{3}{7}a\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{7}a\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{243}a^3} \cdot \frac{243}{243} = \frac{243}{27a^3}$$

Voorkennis

Voorbeeld 3:

$$f(x) = x\sqrt{2x+1}$$

$$f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot [\sqrt{2x+1}]' \text{ (productregel)}$$

$$[x]' = 1 \quad \text{en} \quad [g(x)]' = [\sqrt{2x+1}]'$$

$$u(v) = \sqrt{v} \quad \text{met} \quad u'(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

$$v(x) = 2x+1 \quad \text{met} \quad v'(x) = 2$$

$$[g(x)]' = u'(v) \cdot v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot [\sqrt{2x+1}]'$$

$$= 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$$

Voorkennis

Voorbeeld 4:

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}\pi x^3$

Druk $f(2p) - f(p)$ uit in p .

$$f(2p) - f(p) = \frac{1}{2}\pi \cdot (2p)^3 - \frac{1}{2}\pi p^3 = \frac{1}{2}\pi \cdot 8p^3 - \frac{1}{2}\pi p^3 = 4\pi p^3 - \frac{1}{2}\pi p^3 = 3\frac{1}{2}\pi p^3.$$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 108):

Doel:

- ✓ Je weet wat een primitieve functie is;
- ✓ Je kunt aantonen dat de functie F een primitieve is van f .

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 2

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 108):

Definitie:

- Een functie O met $O' = f$ heet een **primitieve functie** van f ;
- De functie F is een **primitieve** van de functie f als $F' = f$.

Voorbeeld 1:

$F(x) = 5x^3$ is de primitieve van $f(x) = 15x^2$ want $F'(x) = 15x^2$.

Voorbeeld 2:

$F(x) = 5x^3 + 3$ is de primitieve van $f(x) = 15x^2$ want $F'(x) = 15x^2$.

Voorbeeld 3:

$F(x) = 5x^3 + c$ is de primitieve van $f(x) = 15x^2$ want $F'(x) = 15x^2$.

Let op:

- Primitiveren (of integreren) is dus het omgekeerde van differentiëren;
- Het getal c heet de **integratieconstante**.

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 109/110):

Doel:

✓ Je kunt een aantal functies primitiveren;

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 6, 8, 10, 11

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 109/110):

Let op:

Primitiveren (of integreren) is dus het omgekeerde van differentiëren.

Met behulp van het bovenstaande is te controleren dat de onderstaande primitieven kloppen.

$$f(x) = ax^n \Rightarrow F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c \text{ met } n \neq -1$$

$$f(x) = g^x \Rightarrow F(x) = \frac{g^x}{\ln(g)} + c$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln|x| + c$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow F(x) = x \ln(x) - x + c$$

$$f(x) = {}^g \log(x) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(g)} (x \ln(x) - x) + c$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x) + c$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x) + c$$

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 109/110):

Voorbeeld 1:

$$f(x) = {}^3 \log(3x) = {}^3 \log(3) + {}^3 \log(x) = 1 + {}^3 \log(x)$$

$$[f(x) = {}^g \log(x) \quad \text{geeft} \quad F(x) = \frac{1}{\ln(g)}(x \ln(x) - x) + c]$$

$$F(x) = x + \frac{1}{\ln(3)}(x \ln(x) - x) + c$$

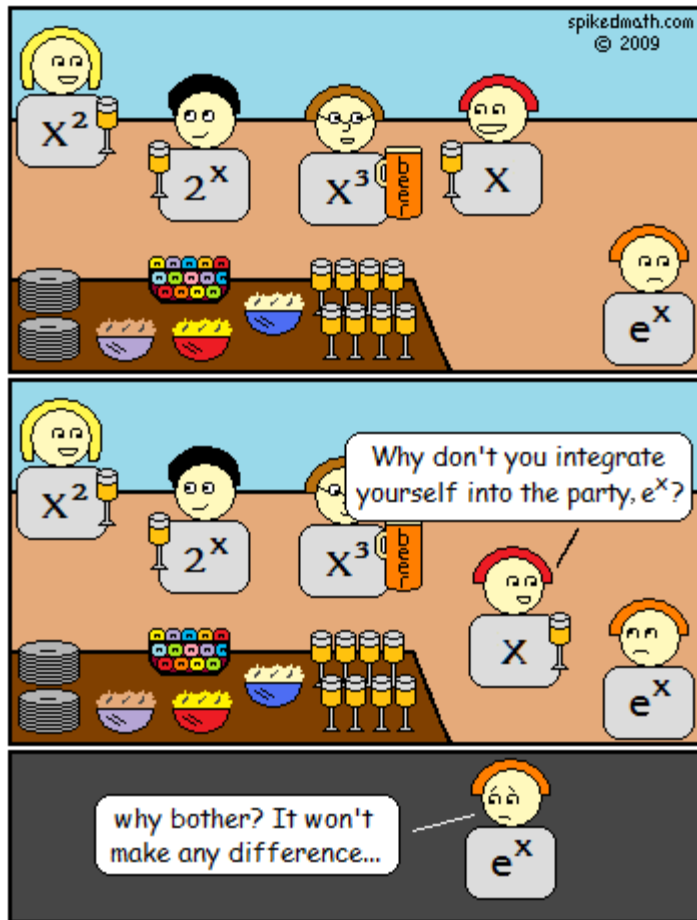
Voorbeeld 2:

$$g(x) = \frac{x^6 + 2x^2 - 7}{x^2} = x^4 + 2 - 7x^{-2}$$

$$[f(x) = ax^n \quad \text{geeft} \quad F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c]$$

$$G(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2x + 7x^{-1} + c$$

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 109/110):



$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

spikedmath.com
© 2009

De constante k (een getal) mag je voor het Integraalteken verschuiven.

De functie e^x is niet alleen gelijk aan zijn afgeleide maar ook aan zijn primitieve (integraal).

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 112/113):

Doel:

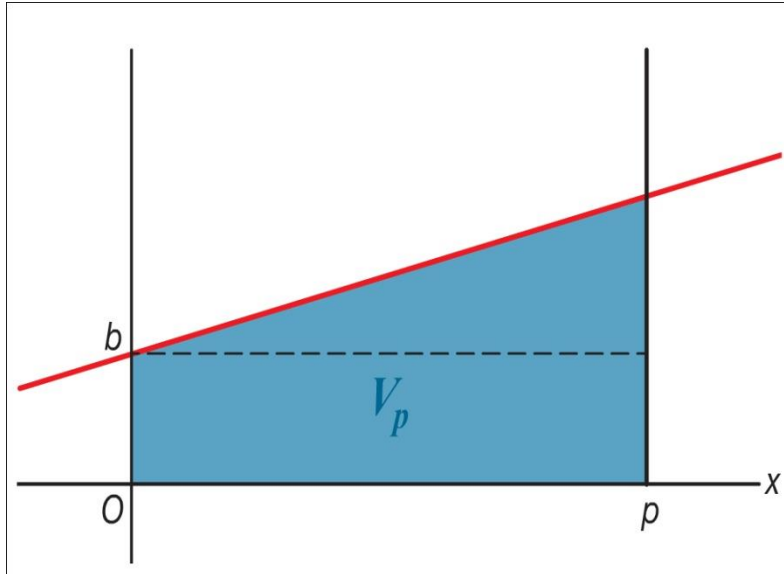
- ✓ Je kunt exact de oppervlakte berekenen van een vlakdeel;
- ✓ Je kunt een oppervlakte verdelen in twee delen met een gelijke oppervlakte.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 14 t/m 17

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 112/113):



Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f(x) = ax + b$

De oppervlakte van het blauwe gebied kan als volgt berekend worden:

$$O(V_p) = O(\text{rechthoek}) + O(\text{driehoek})$$

$$\begin{aligned} O(V_p) &= p \cdot b + \frac{1}{2} \cdot p \cdot ((ap + b) - b) \\ &= bp + \frac{1}{2} \cdot p \cdot ap = \frac{1}{2} ap^2 + bp \end{aligned}$$

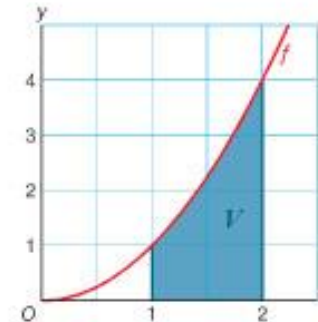
$$O'(V_p) = ap + b = (f(p))$$

Dus de afgeleide van de oppervlakte functie is in dit voorbeeld de originele functie.

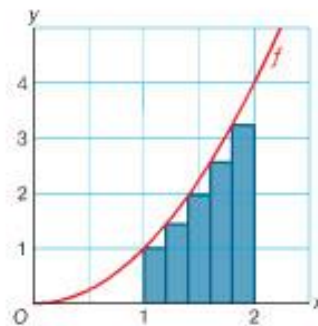
Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 112/113):

o 1

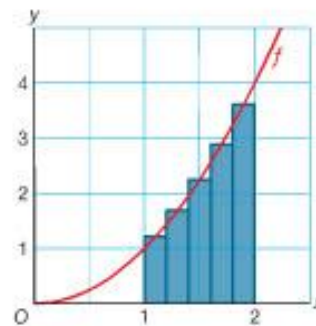
We vragen ons af wat de oppervlakte is van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van $f(x) = x^2$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 2$. Zie de figuur hiernaast. In de figuur hieronder zie je drie mogelijkheden om de oppervlakte van V te benaderen met behulp van vijf rechthoeken, elk met breedte 0,2. Welke benadering is volgens jou de beste?



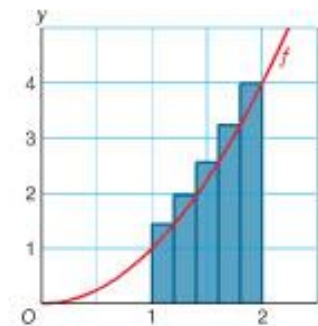
figuur 10.1 $f(x) = x^2$



a



b



c

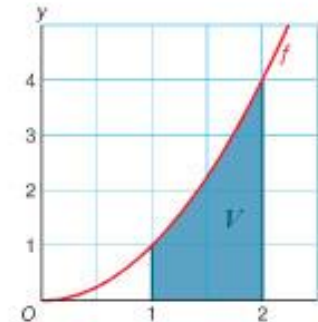
figuur 10.2 Drie verschillende benaderingen van de oppervlakte van het vlakdeel V met vijf rechthoeken.

In plaatje 10.1 is de functie $f(x) = x^2$ getekend. Het blauwe deel is de oppervlakte tussen de grafiek van $f(x)$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 2$

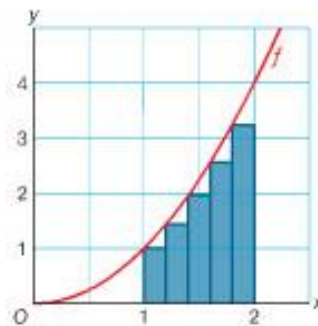
Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 112/113):

o 1

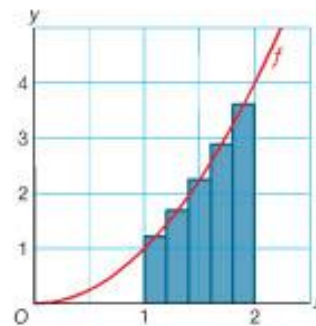
We vragen ons af wat de oppervlakte is van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van $f(x) = x^2$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 2$. Zie de figuur hiernaast. In de figuur hieronder zie je drie mogelijkheden om de oppervlakte van V te benaderen met behulp van vijf rechthoeken, elk met breedte 0,2. Welke benadering is volgens jou de beste?



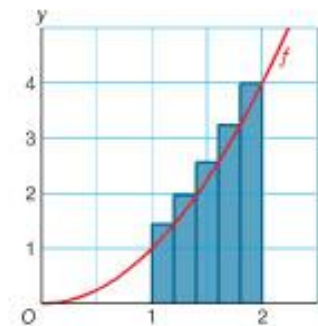
figuur 10.1 $f(x) = x^2$



a



b



c

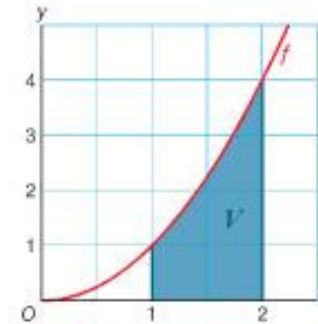
figuur 10.2 Drie verschillende benaderingen van de oppervlakte van het vlakdeel V met vijf rechthoeken.

In plaatje 10.2a is een benadering te zien van deze oppervlakte. Dit heet een **Ondersom $O(V)$** . De ondersom zal minder zijn dan de werkelijke oppervlakte.

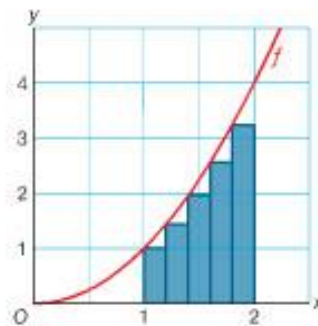
Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 112/113):

o 1

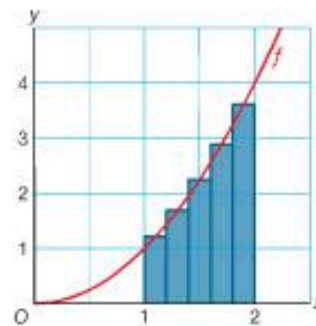
We vragen ons af wat de oppervlakte is van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van $f(x) = x^2$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 2$. Zie de figuur hiernaast. In de figuur hieronder zie je drie mogelijkheden om de oppervlakte van V te benaderen met behulp van vijf rechthoeken, elk met breedte 0,2. Welke benadering is volgens jou de beste?



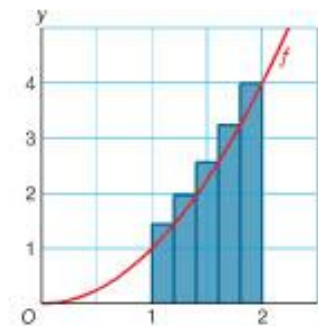
figuur 10.1 $f(x) = x^2$



a



b



c

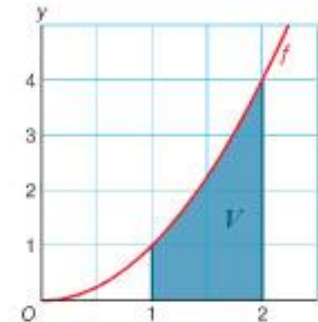
figuur 10.2 Drie verschillende benaderingen van de oppervlakte van het vlakdeel V met vijf rechthoeken.

In plaatje 10.2b is een andere benadering van deze oppervlakte te zien. Hier is voor de hoogte van de driehoek steeds de functiewaarde midden in het deelinterval gekozen.

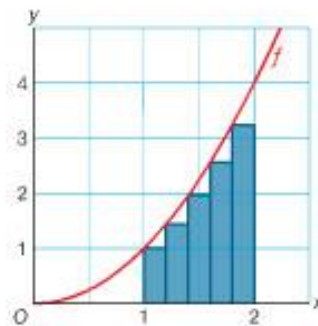
Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 112/113):

o 1

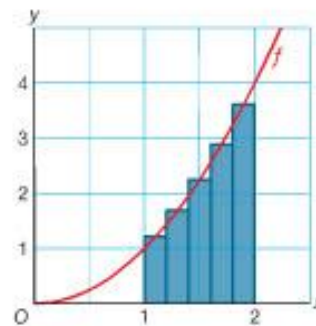
We vragen ons af wat de oppervlakte is van het vlakdeel V dat ingesloten wordt door de grafiek van $f(x) = x^2$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 2$. Zie de figuur hiernaast. In de figuur hieronder zie je drie mogelijkheden om de oppervlakte van V te benaderen met behulp van vijf rechthoeken, elk met breedte 0,2. Welke benadering is volgens jou de beste?



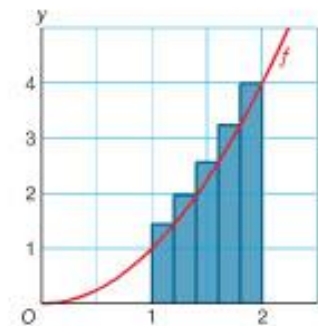
figuur 10.1 $f(x) = x^2$



a



b

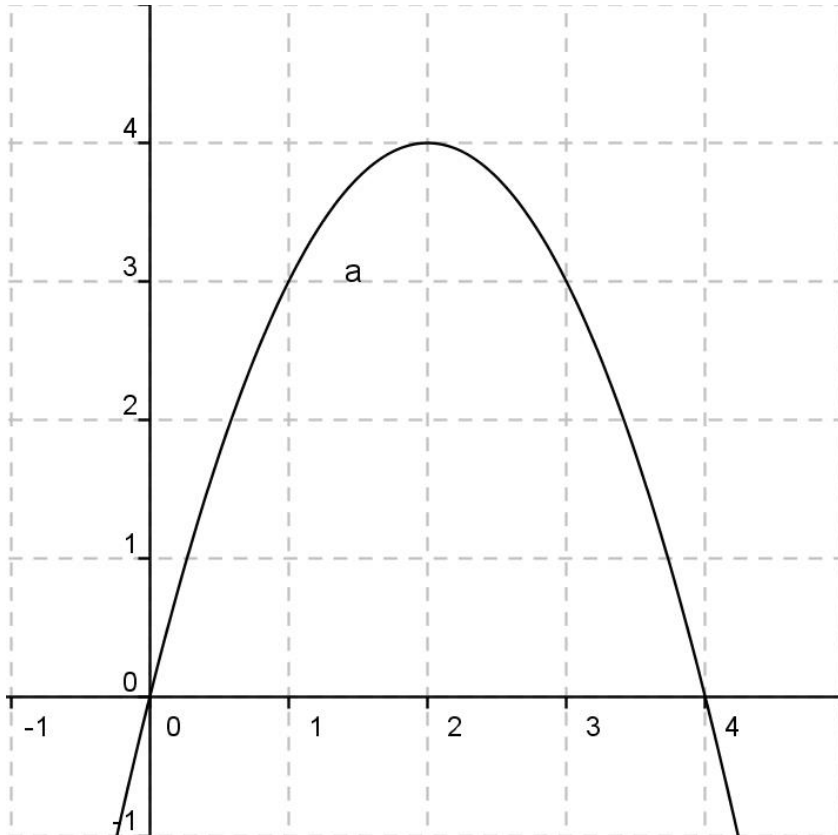


c

figuur 10.2 Drie verschillende benaderingen van de oppervlakte van het vlakdeel V met vijf rechthoeken.

In plaatje 10.2c is een andere benadering te zien van deze oppervlakte. Dit heet een **bovensom** $B(V)$. De bovensom zal meer zijn dan de werkelijke oppervlakte.

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 112/113):

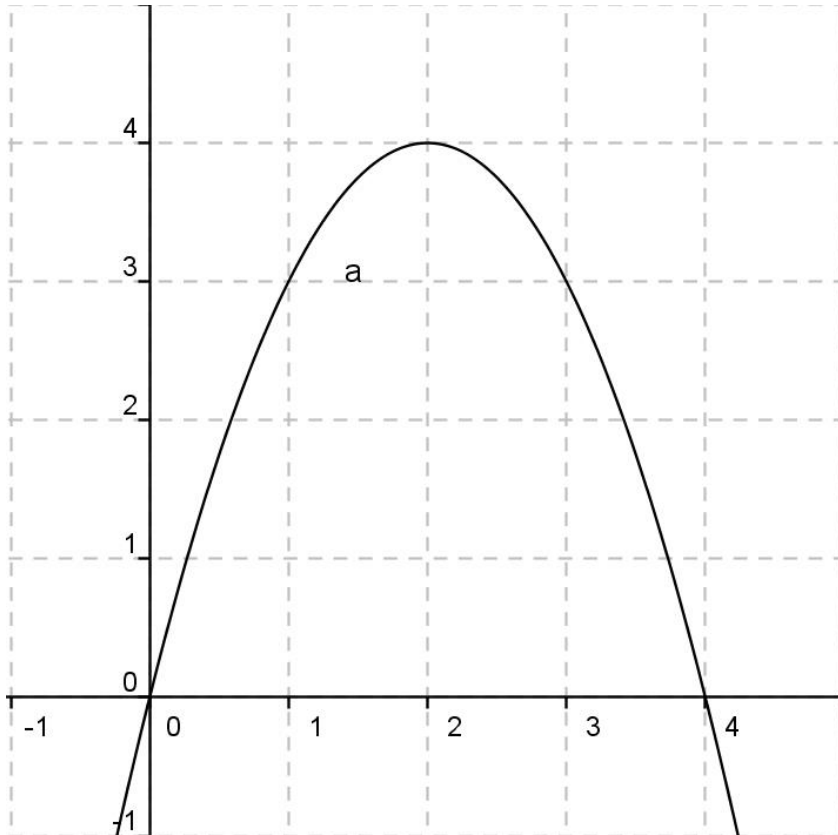


Getekend is de grafiek van $f(x) = 4x - x^2$.
De oppervlakte van het gebied

onder de grafiek is: $\int_0^4 f(x) dx$

$$\int_0^4 f(x) dx = [F(x)]_0^4 = F(4) - F(0)$$

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 112/113):



Voorbeeld 1:

Bereken de oppervlakte van vlakdeel V ingesloten door de $f(x) = 4x - x^2$ en de x -as en y -as.

$$O(V) = \int_0^4 (4x - x^2) dx =$$

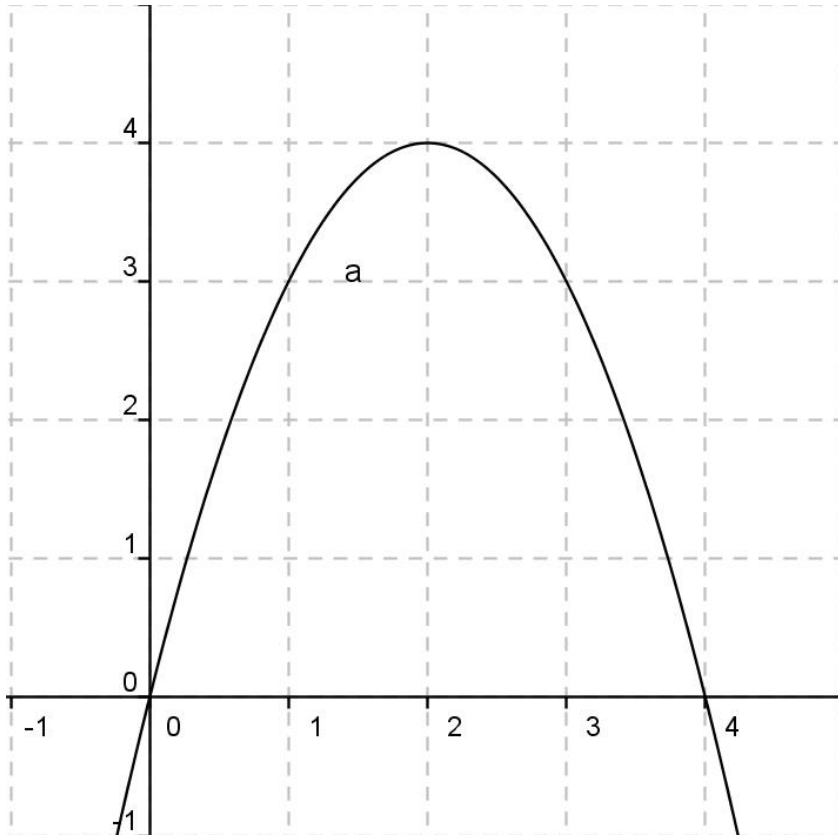
$$\left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 =$$

$$(2 \cdot 4^2 - \frac{1}{3} \cdot 4^3) - (0 - 0) = 10\frac{2}{3}$$

Let op:

Een oppervlakte is altijd positief.

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 117):



Voorbeeld 2:

De lijn $x = p$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte. Bereken p .

$$\int_0^p (4x - x^2) dx = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{2}{3}$$

$$\left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^p = 5 \frac{1}{3}$$

$$2p^2 - \frac{1}{3}p^3 = 5 \frac{1}{3}$$

Uitrekenen met INTERSECT geeft als oplossing $p = 2$

Leerdoel 4 (Theorie A – pagina 117):

Doel:

- ✓ Je kunt bij primitiveren gebruik maken van de “kettingregel voor primitiveren” bij een lineaire kettingfunctie.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 21 t/m 28

Leerdoel 4 (Theorie A – pagina 117):

Voorbeeld 1:

Bereken de afgeleide van de functie $F(x) = (2x - 1)^3$

$$F(x) = (2x - 1)^3 = u^3 \text{ met } 2x - 1$$

$$F'(x) = 3u^2 \cdot u' = 3(2x - 1)^2 \cdot 2 = 3 \cdot 2(2x - 1)^2 = 6(2x - 1)^2$$

Hieruit volgt dat de primitieve van $6(2x - 1)^2$ gelijk is aan $(2x - 1)^3 + C$

“Kettingregel voor primitiveren”:

De primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\frac{1}{a}F(ax + b) + c$

Je berekent de primitieve dus op de “normale” manier en vermenigvuldigd de uitkomst dan met $1/a$.

Leerdoel 4 (Theorie A – pagina 117):

Voorbeeld 2:

Bereken de primitieve van de functie $f(x) = \sqrt{4x-1}$

$$f(x) = \sqrt{4x-1} = (4x-1)^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = ax^n \quad \text{geeft} \quad F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{0,5+1} \cdot u^{1\frac{1}{2}} \right) + c = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (4x-1)^{1\frac{1}{2}} \right) + c = \frac{1}{6} (4x-1)^{1\frac{1}{2}} + c$$

Leerdoel 5 (Theorie B – pagina 120/121):

Doel:

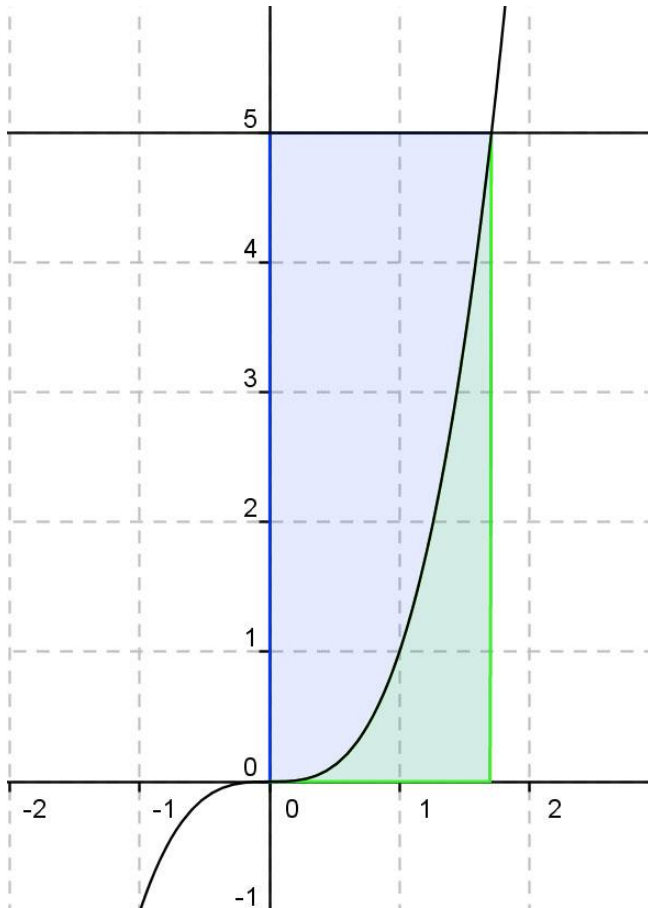
- ✓ Je kunt (exact) de oppervlakte van een vlakdeel V berekenen dat wordt ingesloten door twee verticale lijnen en de grafieken van twee functies

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 32 t/m 39

Leerdoel 5 (Theorie B – pagina 120/121):



Voorbeeld:

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek $f(x) = x^3$, de y -as en de lijn $y = 5$. Bereken exact de oppervlakte van V (het blauwe gebied)

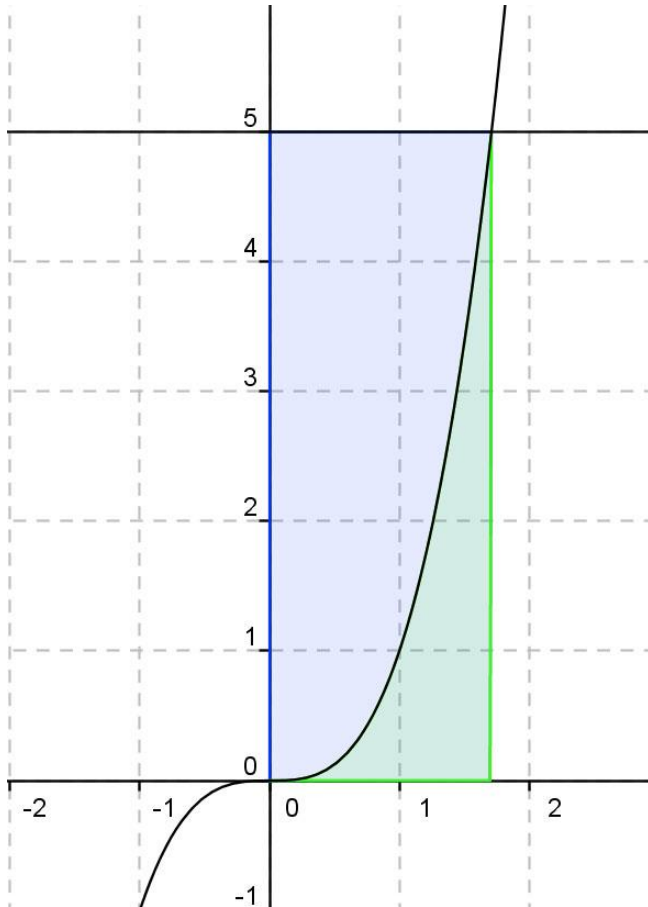
Stap 1:

Bereken exact het snijpunt van de grafiek van $f(x)$ en de lijn $y = 5$.

$$x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$$

Leerdoel 5 (Theorie B – pagina 120/121):

Stap 2:



$$O(V) = O(\text{onder grafiek } y = 5) \\ - O(\text{onder grafiek } f(x))$$

$$O(\text{onder grafiek } y = 5) =$$

$$\int_0^{\sqrt[3]{5}} 5dx = [5x]_0^{\sqrt[3]{5}} = 5 \cdot \sqrt[3]{5} - 5 \cdot 0 = 5 \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$O(\text{onder grafiek } f(x)) =$$

$$\int_0^{\sqrt[3]{5}} f(x)dx = \int_0^{\sqrt[3]{5}} x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^{\sqrt[3]{5}} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt[3]{5} \right)^4 - 0 = \frac{1}{4} \cdot \left(5^{\frac{1}{3}} \right)^4 = \frac{1}{4} \cdot 5^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$O(V) = 5 \cdot \sqrt[3]{5} - 1\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{5} = 3\frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{5}$$

Leerdoel 6 (Theorie A – pagina 125/126):

Doel:

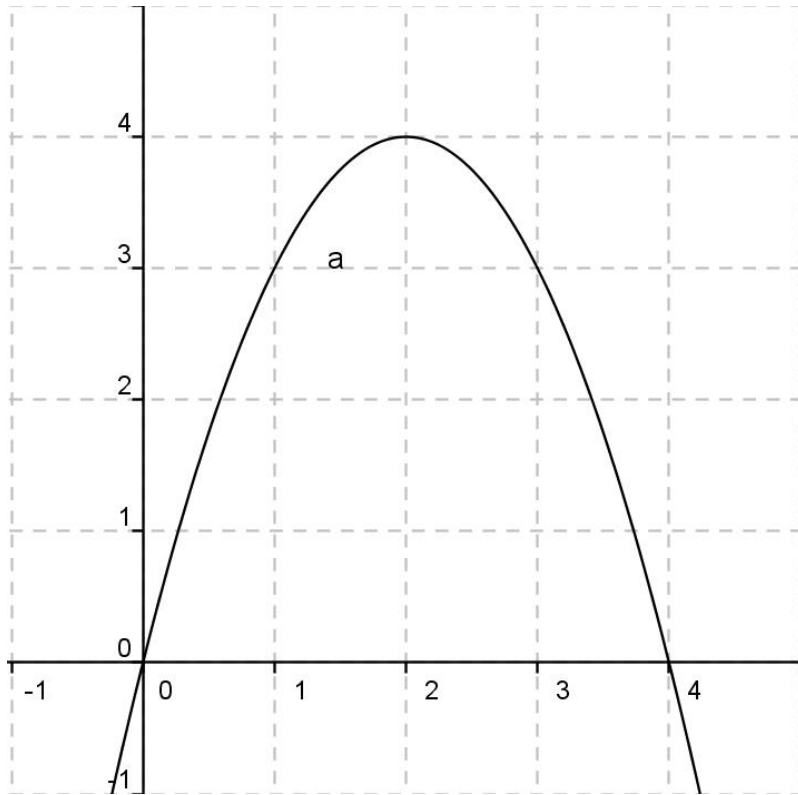
- ✓ Je kunt (exact) de inhoud van een lichaam L berekenen dat ontstaat als een vlakdeel V dat wordt ingesloten door twee verticale lijnen en de grafiek van een functie om de x -as wentelt.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 41 t/m 47

Leerdoel 6 (Theorie A – pagina 125/126):



Voorbeeld:

Bereken de inhoud van het **Omwentelingslichaam** L dat ontstaat als het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek $f(x) = 4x - x^2$ en de x -as om deze x -as gewenteld wordt.

Stap 1:

Bereken de snijpunten van $f(x)$ en de x -as.

$$f(x) = 0$$

$$4x - x^2 = 0$$

$$x(4-x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

Leerdoel 6 (Theorie A – pagina 125/126):

Voorbeeld:

Stap 2:

Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam met :

$$I(L) = \int_0^4 \pi(f(x))^2 dx = \int_0^4 \pi(4x - x^2)^2 dx =$$

$$\int_0^4 \pi(16x^2 - 8x^3 + x^4) dx =$$

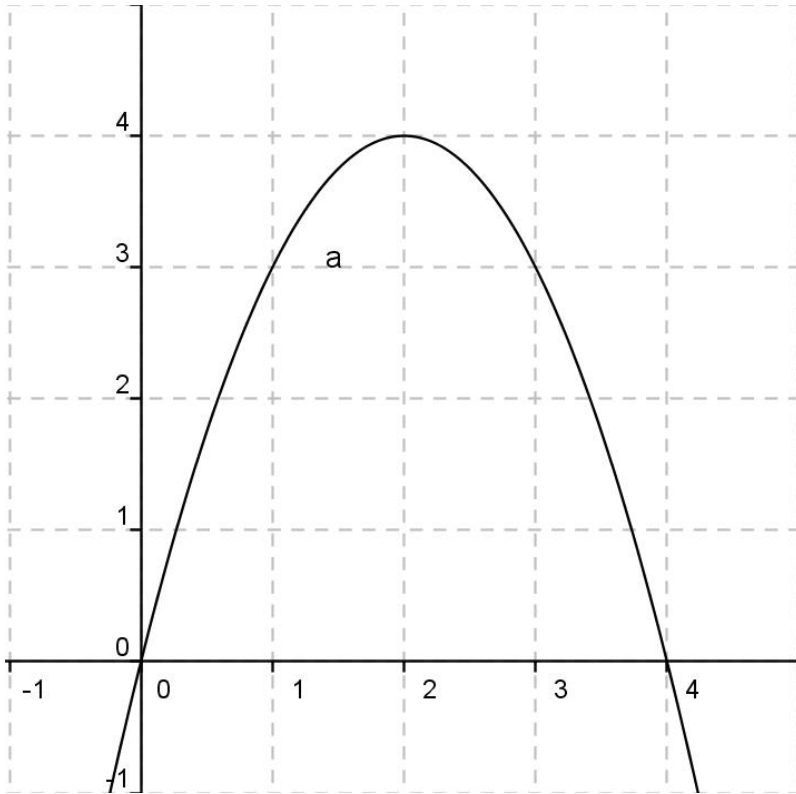
$$\pi \left[\frac{16}{3} x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^4 =$$

$$\pi \left(\frac{16}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^4 + \frac{1}{5} \cdot 4^5 \right) =$$

$$\pi \left(341 \frac{1}{3} - 512 + 204 \frac{4}{5} \right) =$$

$$\pi \left(-170 \frac{2}{3} + 204 \frac{4}{5} \right) =$$

$$\pi \left(-170 \frac{10}{15} + 204 \frac{20}{25} \right) = 34 \frac{2}{15} \pi$$



Leerdoel 7 (Theorie B – pagina 128/129):

Doel:

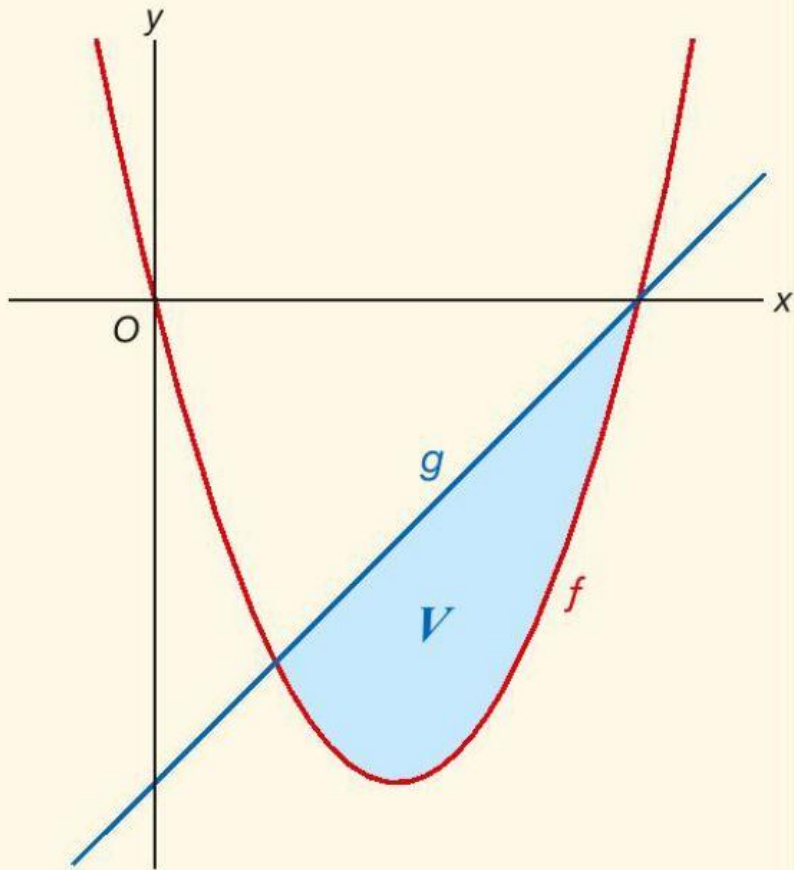
- ✓ Je kunt (exact) de inhoud van een lichaam L berekenen dat ontstaat als een vlakdeel V dat wordt ingesloten door twee verticale lijnen en de grafieken van twee functies om de x -as wentelt.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 49 t/m 51

Leerdoel 7 (Theorie B – pagina 128/129):



Voorbeeld:

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = x - 4$.

Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x -as.

Stap 1:

Bereken de snijpunten van de beide grafieken.

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 4x = x - 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 4$$

Leerdoel 7 (Theorie B – pagina 128/129):

Stap 2:

Bereken de inhoud van het lichaam L op de volgende manier:

$$I(L) = \pi \int_1^4 ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx =$$

$$\pi \int_1^4 ((x^2 - 4x)^2 - (x - 4)^2) dx =$$

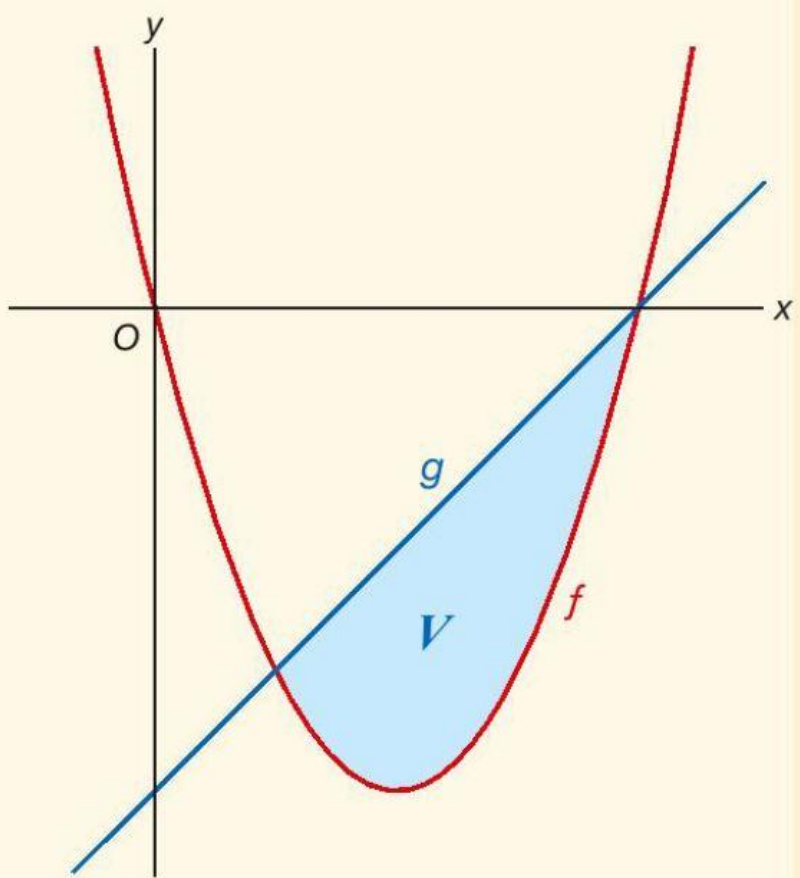
$$\pi \int_1^4 (x^4 - 8x^3 + 16x^2 - (x^2 - 8x + 16)) dx =$$

$$\pi \int_1^4 (x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 8x - 16) dx =$$

$$\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 16x \right]_1^4 =$$

$$\pi \left(\frac{1}{5} \cdot 4^5 - 2 \cdot 4^4 + 5 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 - \left(\frac{1}{5} - 2 + 5 + 4 - 16 \right) \right) =$$

$$\pi \left(12\frac{4}{5} - -8\frac{4}{5} \right) = 21\frac{3}{5}\pi$$



Let op:

Je neemt de “buitenste inhoud” min de “binnenste inhoud”

Leerdoel 8 (Theorie C – pagina 130):

Doel:

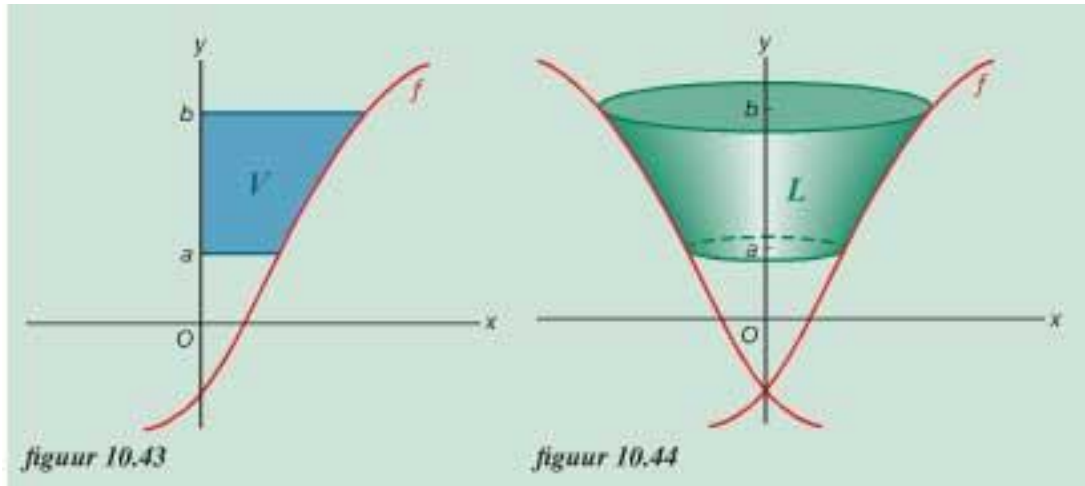
- ✓ Je kunt (exact) de inhoud van een lichaam L berekenen dat ontstaat als een vlakdeel V dat wordt ingesloten door twee horizontale lijnen en de grafiek van een functie om de y -as wentelt.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 52 t/m 54

Leerdoel 8 (Theorie C – pagina 130):



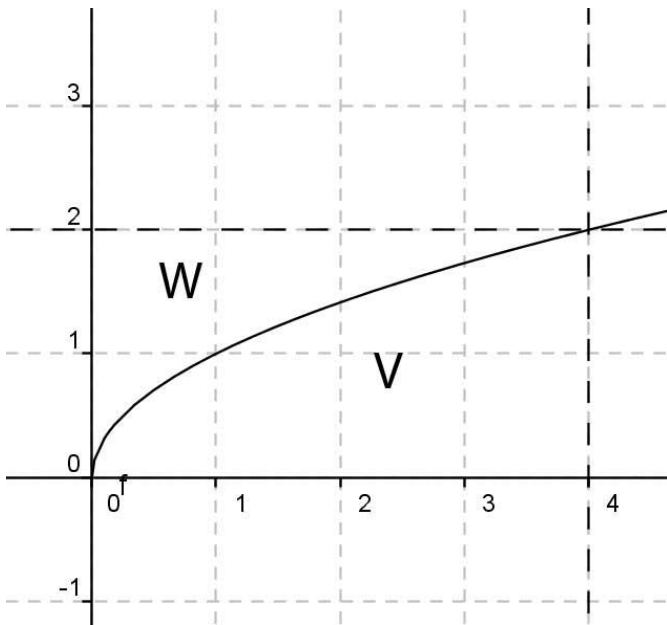
Het vlakdeel V ligt rechts van de y -as en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f , de y -as en de lijnen $y = a$ en $y = b$.

De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de y -as wentelt is dan: $I(L) = \int_a^b \pi x^2 dy$

Leerdoel 8 (Theorie C – pagina 130):

Voorbeeld:

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$, de x -as en de lijn $x = 4$. Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y -as



Stap 1: Bereken de inhoud van de cilinder met straal 4 en hoogte 2:

$$I(\text{Cilinder}) = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi$$

Stap 2: Bereken de inhoud van het lichaam M dat Ontstaat als W om de y -as gewenteld wordt:

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_0^{f(4)} \pi x^2 dy = \int_0^2 \pi y^4 dy = \\ &= \left[\frac{1}{5} \pi y^5 \right]_0^2 = \left(\frac{32}{5} \pi - 0 \right) = \frac{32}{5} \pi \end{aligned}$$

Stap 3: Bereken de inhoud van lichaam L

$$I(L) = I(\text{Cilinder}) - I(M) = 32\pi - \frac{32}{5} \pi = 25\frac{3}{5} \pi$$

Leerdoel 9 (Theorie A – pagina 133/134):

Doel:

- ✓ Je kent de formule om de inhoud van een bol te berekenen;
- ✓ Je kunt (exacte) berekeningen uitvoeren met behulp van de inhoud van een bolschijf die ontstaat als een vlakdeel V om de x -as wentelt;
- ✓ Je kent de formule om de inhoud van een kegel te berekenen;
- ✓ Je kunt (exacte) berekeningen uitvoeren met behulp van de inhoud van een kegel die ontstaat als een vlakdeel V om de x -as wentelt;

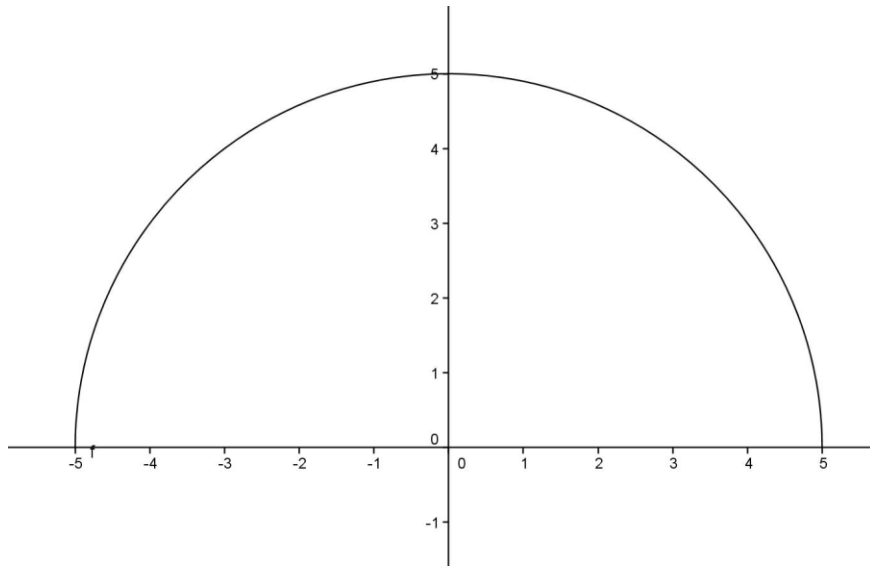
Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 57 t/m 60

Leerdoel 9 (Theorie A – pagina 133/134):

Voorbeeld:



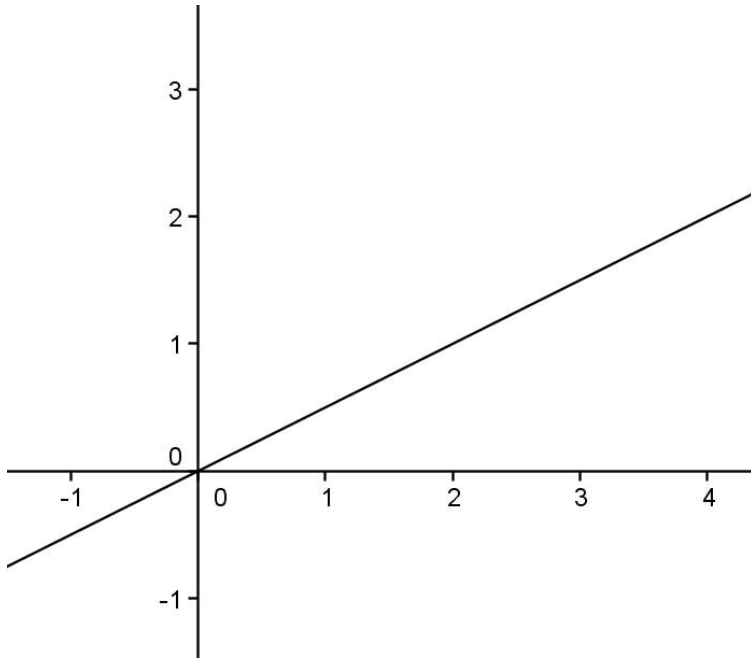
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ en de lijnen $x = 0,5r$ en $x = 0,75r$. Bereken exact de inhoud van de bolschijf die ontstaat als je V om de x -as wentelt.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r} \pi y^2 dx = \int_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r} \pi(r^2 - x^2) dx = \left[\pi(r^2 x - \frac{1}{3} x^3) \right]_{\frac{1}{2}r}^{\frac{3}{4}r} \\ &= \pi \left(r^2 \cdot \frac{3}{4}r - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}r \right)^3 - \left(r^2 \cdot \frac{1}{2}r - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}r \right)^3 \right) \right) \\ &= \pi \left(\frac{3}{4}r^3 - \frac{9}{64}r^3 - \frac{1}{2}r^3 + \frac{1}{24}r^3 \right) = \frac{29}{192} \pi r^3 \end{aligned}$$

De inhoud van een bol met

$$\text{straal } r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Leerdoel 9 (Theorie A – pagina 133/134):



Voorbeeld 2:

Als je het vlakdeel ingesloten door de lijn $y = ax$, de x -as en de lijn $x = h$ wentelt om de x -as ontstaat er een kegel.

Op deze manier is de formule af te leiden van de inhoud van een kegel.

$$\int_0^h \pi(ax)^2 dx = \int_0^h \pi a^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} \pi a^2 x^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi a^2 h^3$$

- Deze kegel heeft een hoogte h ;
- De straal van het grondvlak is ah ;
- De oppervlakte van het grondvlak is $\pi r^2 = \pi(ah)^2 = \pi a^2 h^2$, dus: $r^2 = a^2 h^2$
- De formule voor de inhoud van een kegel

is dus te schrijven als: $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

Leerdoel 10 (Theorie B – pagina 136/137):

Doel:

- ✓ Je kunt berekeningen maken met tijd-afstandfuncties, snelheidsfuncties en versnellingsfuncties waarbij je moet primitiveren.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 62 t/m 69

Leerdoel 10 (Theorie B – pagina 136/137):

$s(t) = 2,1t^2 + 3,6t$ is een **tijd-afstandfunctie**.

De tijd-afstandfunctie geeft op een bepaald tijdstip de afgelegde afstand.

$s'(t) = v(t) = 4,2t + 3,6$ is een **snelheidsfunctie**.

De snelheidsfunctie geeft op een bepaald tijdstip de snelheid.

De snelheidsfunctie is de afgeleide van de tijd-afstandfunctie.

Wanneer de snelheidsfunctie bekend is kan de afgelegde afstand in een bepaalde periode berekend worden door deze snelheidsfunctie te primitiveren. Primitiveren van de snelheidsfunctie geeft de tijd-afstandfunctie.

$s''(t) = v'(t) = a(t) = 4,2$ is de **versnelling**.

De versnelling is de snelheid waarmee de snelheid verandert.

De versnelling is de tweede afgeleide van de tijd-afstandfunctie.

Leerdoel 10 (Theorie B – pagina 136/137):

Voorbeeld 1:

Gegeven is de snelheidsfunctie $v(t) = s'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1$.

Bereken de afgelegde afstand s op $t = 4$ als bekend is dat op $t = 1$ al een afstand van 5 meter is afgelegd.

Afgelegde afstand $s(1)$ op $t = 1$ is 5 meter.

Afgelegde afstand van $t = 1$ tot $t = 4$ is $\int_1^4 s'(t) dt$

$$s(1) + \int_1^4 \left(-\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1\right) dt =$$

Afgelegde afstand =

$$5 + \left[-\frac{1}{6}t^3 + t^2 + t\right]_1^4 =$$

$$5 + \left(-\frac{1}{6} \cdot 4^3 + 4^2 + 4\right) - \left(-\frac{1}{6} \cdot 1^3 + 1^2 + 1\right) = 12\frac{1}{2}$$

Leerdoel 10 (Theorie B – pagina 136/137):

Voorbeeld 2:

Een voorwerp in rust ondergaat vanaf $t = 0$ gedurende 10 seconden een versnelling. Op $t = 0$ is de versnelling 5 m/s^2 en deze neemt lineair af tot 0 op $t = 10$.

Hoeveel meter wordt gedurende deze 10 seconden afgelegd?

Stap 1:

Stel de versnellingsfunctie $a(t)$ op.

$$a(t) = mt + n$$

[De versnelling is lineair]

$$m = \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{0 - 5}{10 - 0} = -\frac{1}{2}$$

$$a(0) = 5, \text{ dus } a(t) = -0,5t + 5$$

Leerdoel 10 (Theorie B – pagina 136/137):

Voorbeeld 2:

Een voorwerp in rust ondergaat vanaf $t = 0$ gedurende 10 seconden een versnelling. Op $t = 0$ is de versnelling 5 m/s^2 en deze neemt lineair af tot 0 op $t = 10$.

Hoeveel meter wordt gedurende deze 10 seconden afgelegd?

Stap 2:

Primitiveren van de versnellingsfunctie geeft de snelheidsfunctie:

$$a(t) = -0,5t + 5$$

$$v(t) = -0,25t^2 + 5t$$

Stap 3:

Primitiveren van de snelheidsfunctie geeft de tijd-afstandfunctie:

$$s(t) = -\frac{1}{12}t^3 + 2\frac{1}{2}t^2$$

$$\text{Hieruit volgt } s(10) = 166\frac{2}{3}$$

Leerdoel 11 (Theorie C – pagina 140):

Doel:

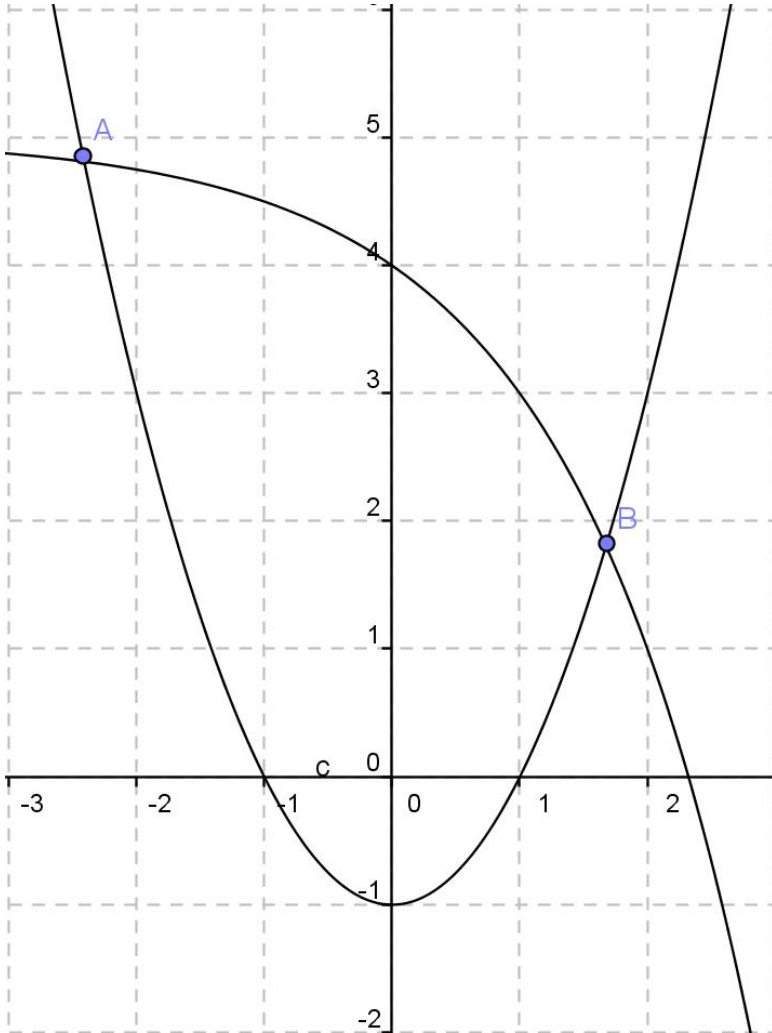
✓ Je kunt integralen numeriek benaderen met de GR.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 72 t/m 75

Leerdoel 11 (Theorie C – pagina 140):



Voorbeeld:

Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = x^2 - 1$ en $g(x) = 5 - 2^x$

Let op:

Er staat nu niet dat je het antwoord exact of algebraïsch moet berekenen.

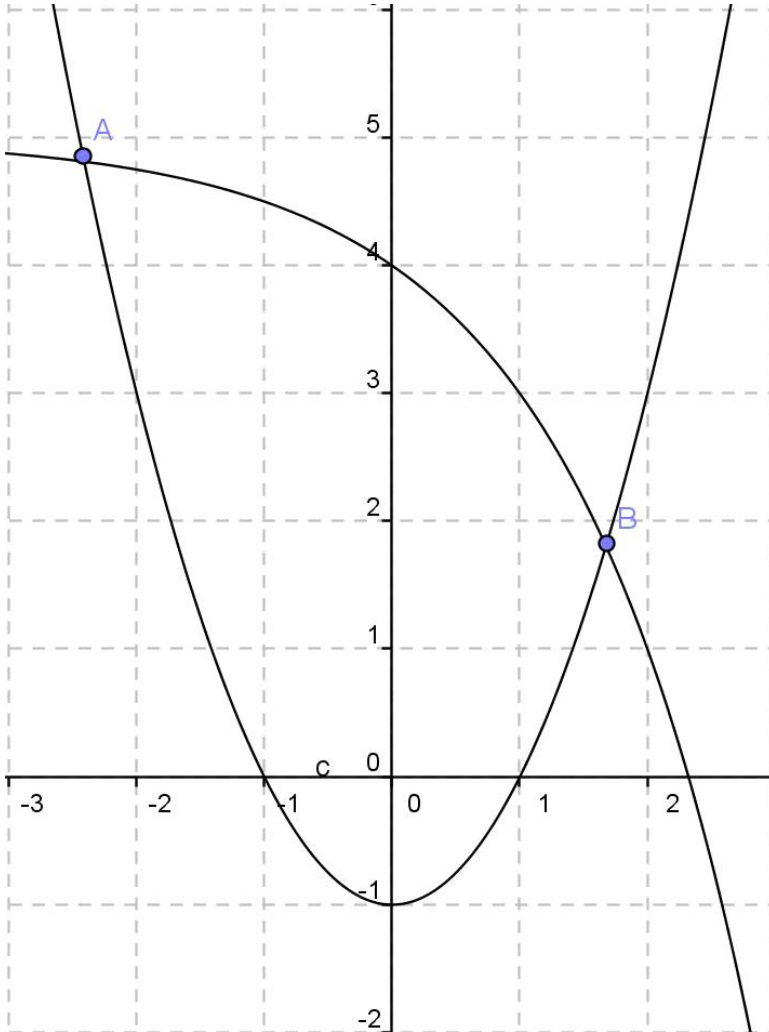
Stap 1:

Bepaal met de optie **INTERSECT** de twee snijpunten van beide grafieken. Dit zijn -2,41 en 1,68

Stap 2:

Merk op dat in het interval $[-2,41; 1,68]$ de grafiek van $g(x)$ boven de grafiek van $f(x)$ ligt.

Leerdoel 11 (Theorie C – pagina 140):



Voorbeeld:

Stap 3:

De oppervlakte van het gevraagde vlakdeel kan nu berekend worden met:

$$\int_{-2,41}^{1,68} (g(x) - f(x)) dx = \int_{-2,41}^{1,68} (5 - 2^x - (x^2 - 1)) dx \approx 13,94$$

Integreren met de GR:

$$Y1 = 5 - 2^X - (X^2 - 1)$$

2ND | TRACE | Optie 7

Vul bij “Lower Limit” -2,41 in en bij

“Upper Limit” 1,68 en druk op **ENTER**

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 141):

Doel:

✓ Je kunt met de GR de booglengte berekenen door middel van integreren.

Uitleg theorie

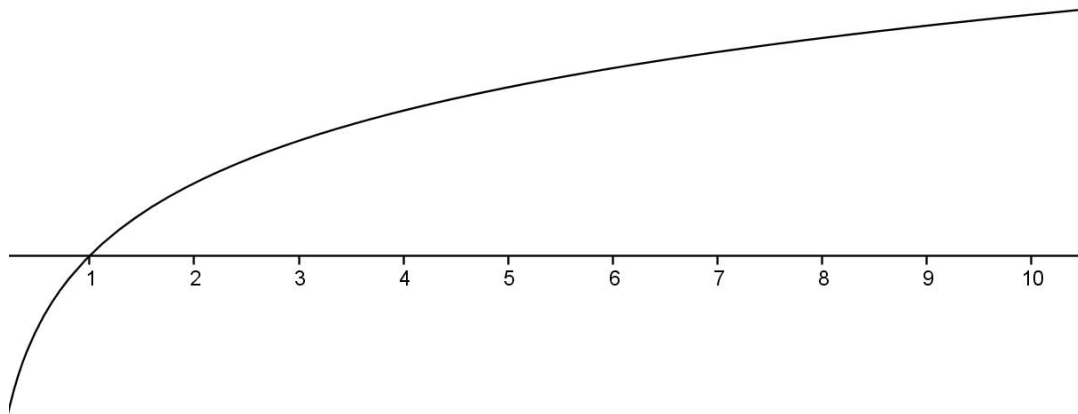
Oefenen met:

Opgave 78 t/m 80

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 141):

Als je de lengte van de grafiek van f tussen $x = a$ en $x = b$ wilt berekenen,

gebruik je hiervoor de volgende formule: $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$



Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 141):

Voorbeeld:

Het vlakdeel wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(x)$, de x -as en de lijn $x = 10$. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de omtrek van V .

Stap 1:

Bereken de lengte van de grafiek van f tussen $x = 1$ en $x = 10$:

$$\int_1^{10} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx \approx 9,42$$

Stap 2:

Bereken de lengte van de lijn $x = 10$:

$$f(10) = \ln(10)$$

Stap 3:

Bereken de lengte van de x -as tussen $x = 1$ en $x = 10$:

Deze lengte is $10 - 1 = 9$

De omtrek van V is dus $9 + \ln(10) + 9,42 \approx 20,72$