

Voorkennis

Bij bepaalde aantallen graden hebben de sinus, cosinus en tangens een exacte oplossing. In deze gevallen moet je de exacte oplossing geven:

hoek	30°	45°	60°
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tangens	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 96/97):

Doel:

Je kunt met behulp van de eenheidscirkel de volgende berekeningen uitvoeren:

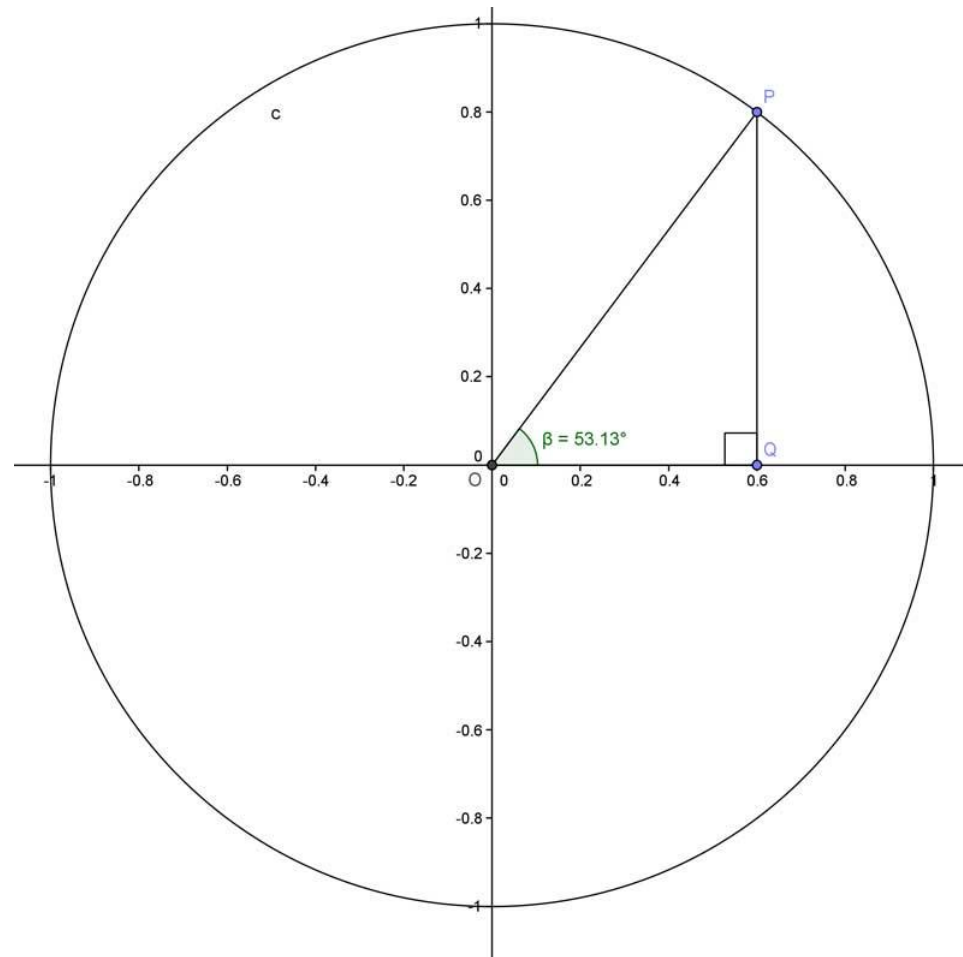
- ✓ Met behulp van SOSCASTOA kun je bij een draaiingshoek α voor veelvouden van 90° exact $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha)$ berekenen.
- ✓ Met behulp van de GR kun je bij een draaiingshoek α $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha)$ berekenen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

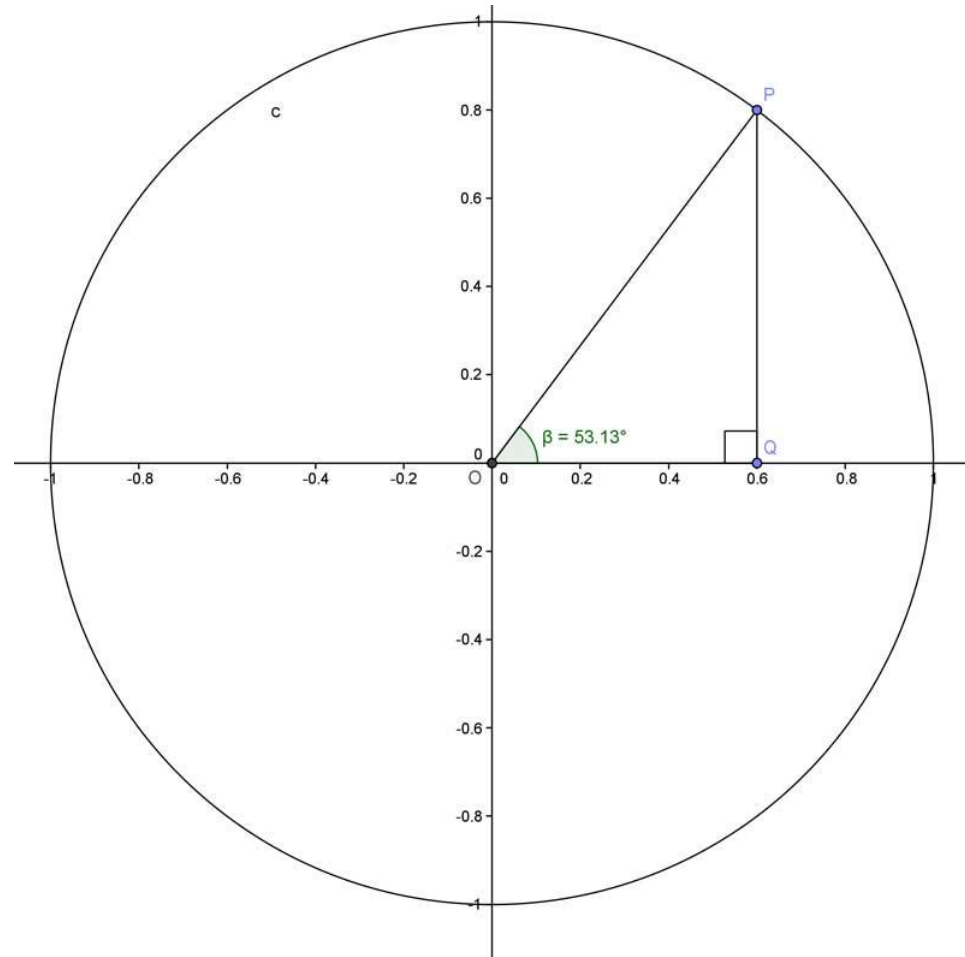
Opgave 2 t/m 4

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 96/97):



- De **eenheidscirkel** heeft een middelpunt $O(0,0)$ en straal 1;
- De **draaiingshoek** van P is α ;
- Het eerste been van een draaiingshoek is altijd de positieve x -as;
- Het tweede been van een draaiingshoek gaat door het punt P ;
- Draait P tegen de wijzers van de klok in, dan is α positief;
- Draait P met de wijzers van de klok mee, dan is α negatief;
- De draaiingshoek van P kan groter dan 360° zijn.

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 96/97):



- $\sin \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekzijde}}{\text{schuine zijde}} =$

$$\sin \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{y_p}{1} = y_p$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekzijde}}{\text{schuine zijde}} =$$

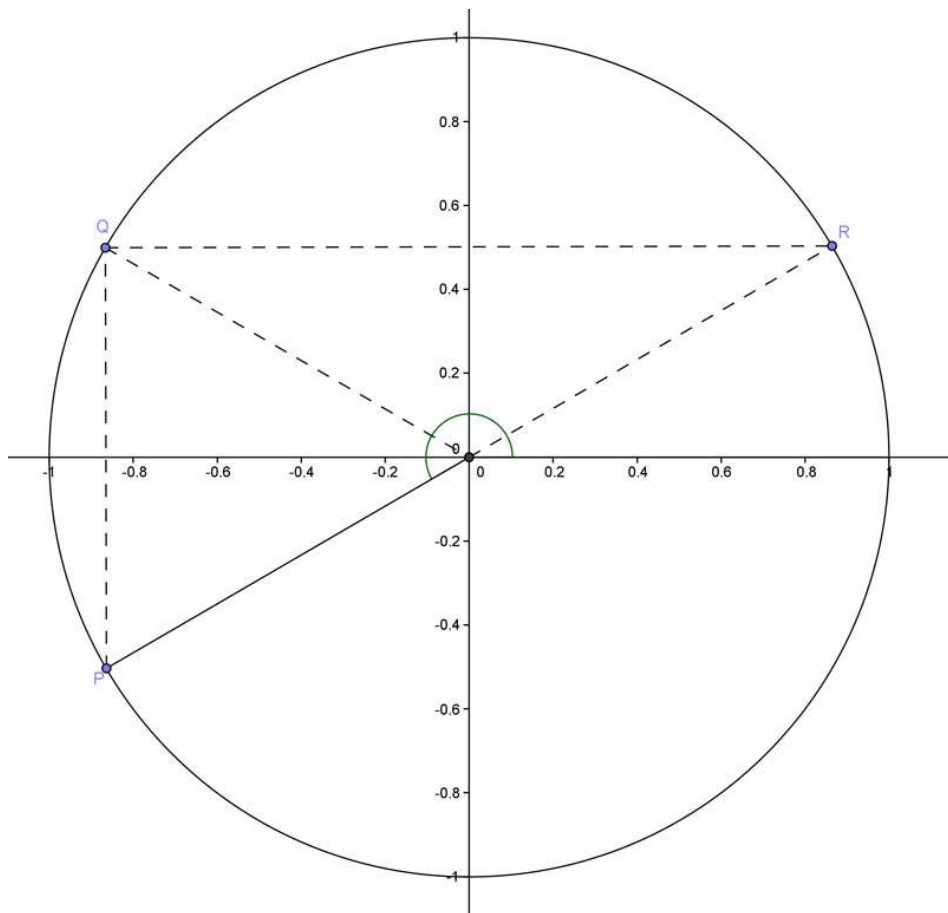
$$\cos \alpha = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_p}{1} = x_p$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekzijde}}{\text{aanliggende rechthoekzijde}} =$$

$$\tan \alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y_p}{x_p}$$

- Dus P heeft coördinaten $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 96/97):



hoek	30°	45°	60°
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$

Bereken exact $\sin 210^\circ$, $\cos 210^\circ$ en $\tan 210^\circ$:

$$\sin 210^\circ = -\sin 150^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210^\circ = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 210^\circ = \frac{\sin 210^\circ}{\cos 210^\circ} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 98/99):

Doel:

Je kunt met behulp van de eenheidscirkel de volgende berekening uitvoeren:

- ✓ Met behulp van je GR kun je voor een gegeven waarde van x of y , de draaiingshoek berekenen die bij dit punt op de eenheidscirkel hoort.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 2 t/m 4

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 98/99):

Voorbeeld 1:

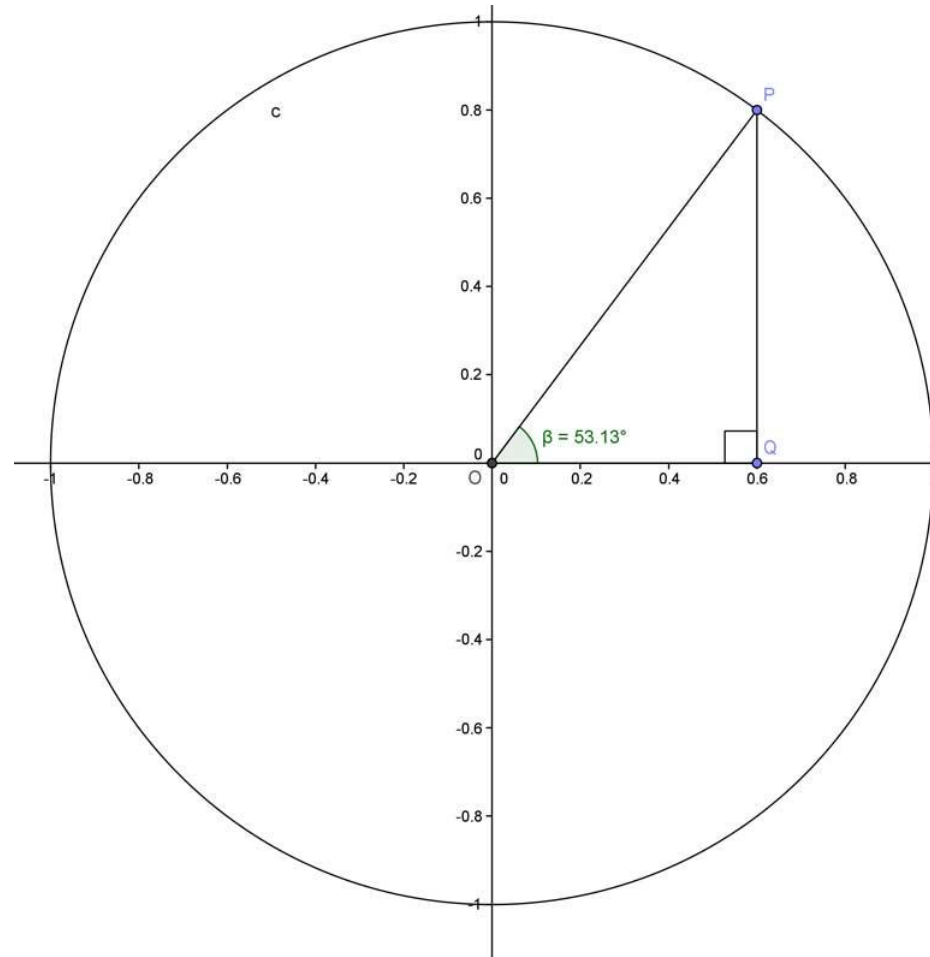
Gegeven is $x_p = 0,6$

Bereken α in graden en rond af op 1 decimaal.

$\cos(x) = 0,6$ oplossen met de GR gaat via
 $\cos^{-1}(0,6) \approx 53,1^\circ$

Let op dat nog een hoek is waarbij geldt dat $x_p = 0,6$.

Dit is de hoek $360^\circ - 53,1^\circ = 306,9^\circ$



Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 98/99):

Voorbeeld 2:

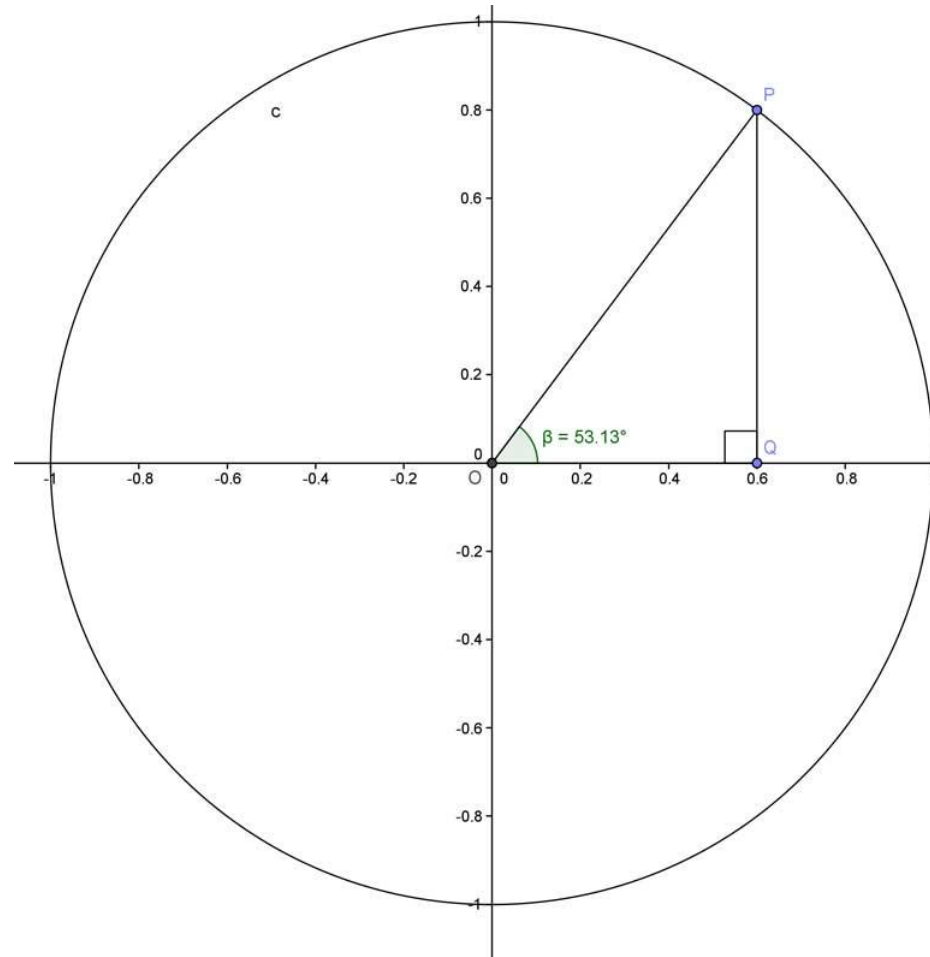
Gegeven is $y_P = 0,8$

Bereken α in graden en rond af op 1 decimaal.

$\sin(x) = 0,8$ oplossen met de GR gaat via
 $\sin^{-1}(0,8) \approx 53,1^\circ$

Let op dat nog een hoek is waarbij geldt dat $y_P = 0,8$.

Dit is de hoek $180^\circ - 53,1^\circ = 127,9^\circ$



Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 100/101):

Doel:

Je kunt bij de grootte van een hoek graden omzetten in radialen en omgekeerd.

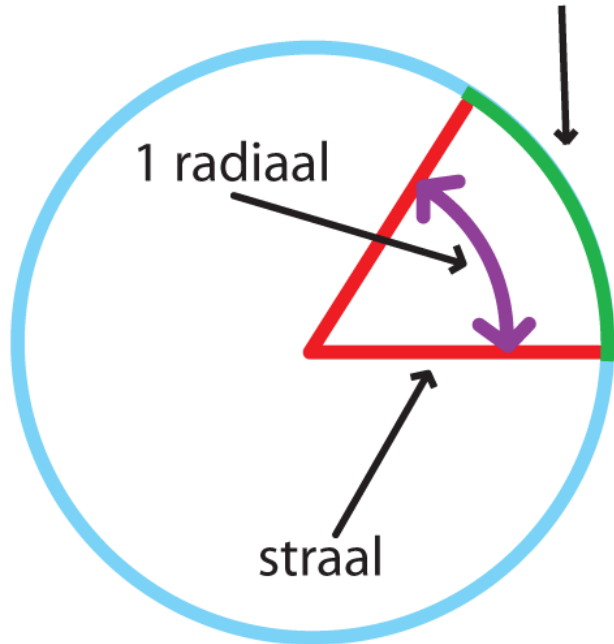
Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 9, 10, 12 t/m 15

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 100/101):

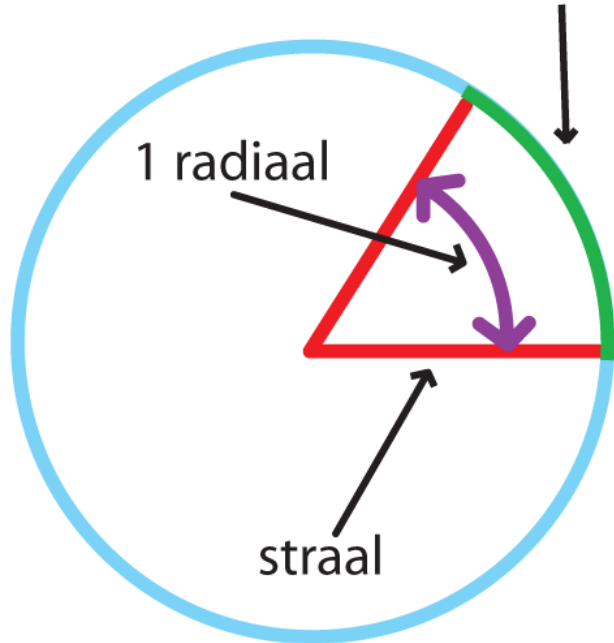
booglengte gelijk aan straal



- In de eenheidscirkel is de booglengte van het groene stuk precies 1.
- In dit geval is de middelpuntshoek 1 radiaal.
- Een hoek van 1 radiaal is de middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1.
- Radiaal is een andere manier om de grootte van de middelpuntshoek weer te geven.
- De cirkelboog van de volledige cirkel is 2π . Bij deze booglengte hoort een middelpuntshoek van 2π rad.

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 100/101):

booglengte gelijk aan straal • Een volledige cirkel is 360° dus $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$



- $\pi \text{ rad} = 360^\circ/2 = 180^\circ$
- $1 \text{ rad} = 360^\circ/(2\pi) = 180^\circ/\pi$
- $1^\circ = 2\pi/360^\circ = \pi/180 \text{ rad}$

Voorbeeld 1:

$$\frac{2}{3} \pi \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$$

Voorbeeld 2:

$$\frac{1}{4} \text{ rad} = \frac{1}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 14,3^\circ$$

Voorbeeld 3:

$$107^\circ = 107 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 1,87 \text{ rad}$$

Leerdoel 4 (Theorie D – pagina 103/104):

Doel:

Je kunt voor alle draaiingshoeken die gegeven zijn in de eenheidscirkel op pagina 103 van het boek het volgende berekenen:

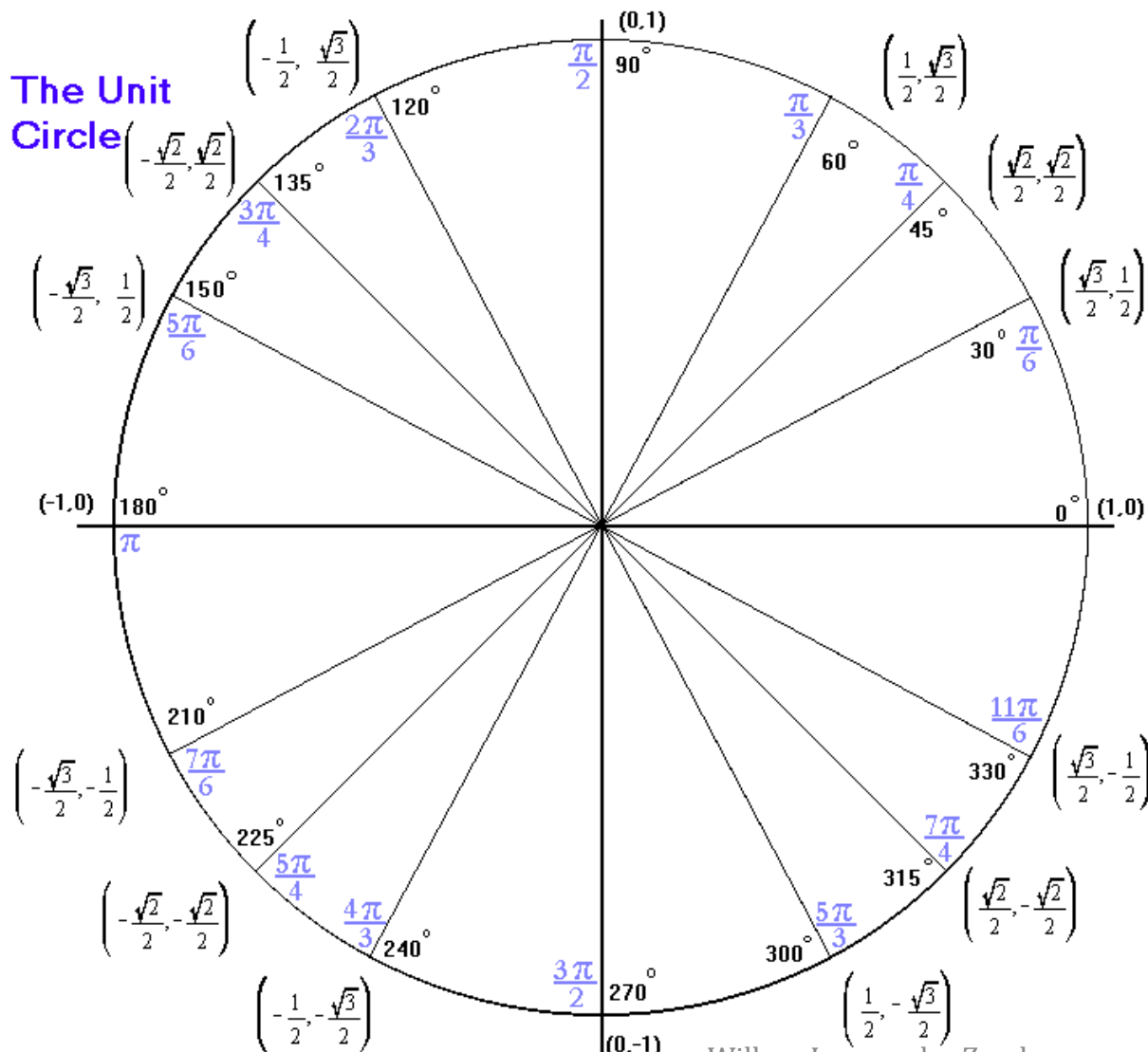
- ✓ De exacte waarde van de sinus, cosinus en tangens bij een gegeven draaiingshoek α in radialen;
- ✓ De exacte waarde van de draaiingshoek α in radialen bij een gegeven waarde van $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha)$.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 17 t/m 19

Leerdoel 4 (Theorie D – pagina 103/104):



$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) \\ &= -\cos(30^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

[cos is x-coördinaat]

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) &= -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ &= -\sin(60^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

[sin is y-coördinaat]

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 106/107):

Doel:

Je kunt de volgende goniometrische vergelijkingen exact oplossen:

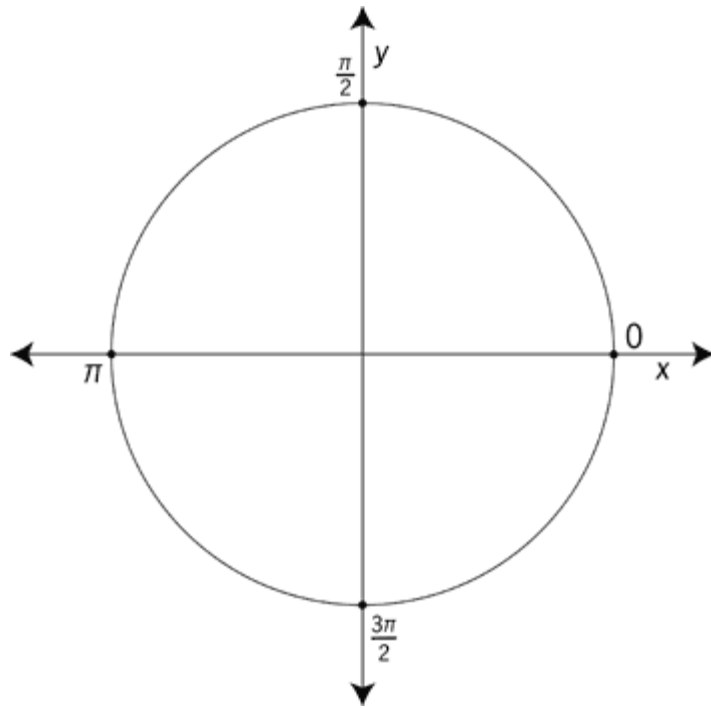
- ✓ $\sin(A) = C$ voor waarden van C van -1, 0 of 1.
- ✓ $\cos(A) = C$ voor waarden van C van -1, 0 of 1.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 22 t/m 24

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 106/107):



Voorbeeld 1:

Los de vergelijking $\sin(A) = 0$ op.

We zoeken nu de punten op de eenheids-cirkel met y -coördinaat 0.

Dit is in de punten $(1,0)$ en $(-1,0)$

$(1,0)$ heeft draaiingshoek 0

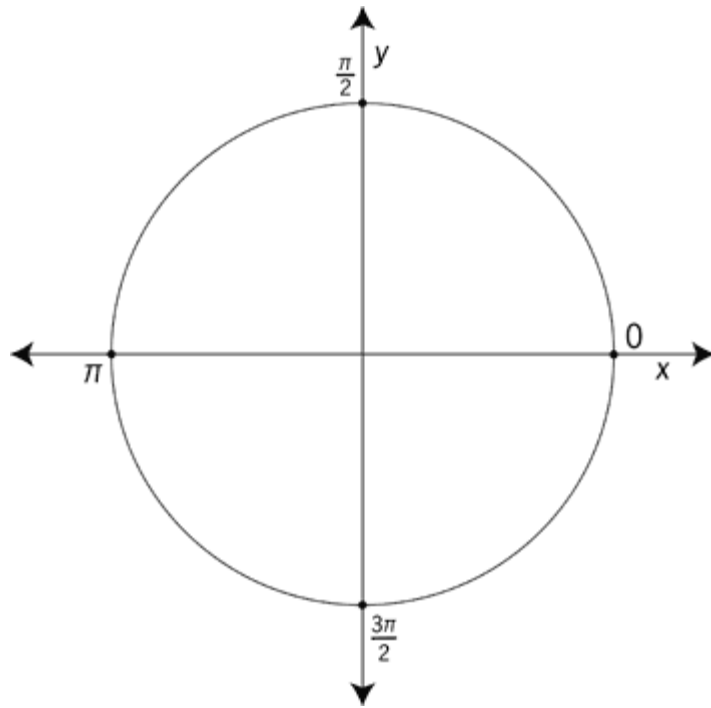
$(-1,0)$ heeft draaiingshoek π

$(1,0)$ heeft draaiingshoek 2π enz. enz. enz.

$(-1,0)$ heeft draaiingshoek 3π enz. enz. enz.

Dus **$\sin(A) = 0$ als $A = k \cdot \pi$** ($k =$ geheel getal)

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 106/107):



Voorbeeld 2:

Los de vergelijking $\sin(A) = 1$ op.

We zoeken nu de punten op de eenheids-cirkel met y -coördinaat 1.

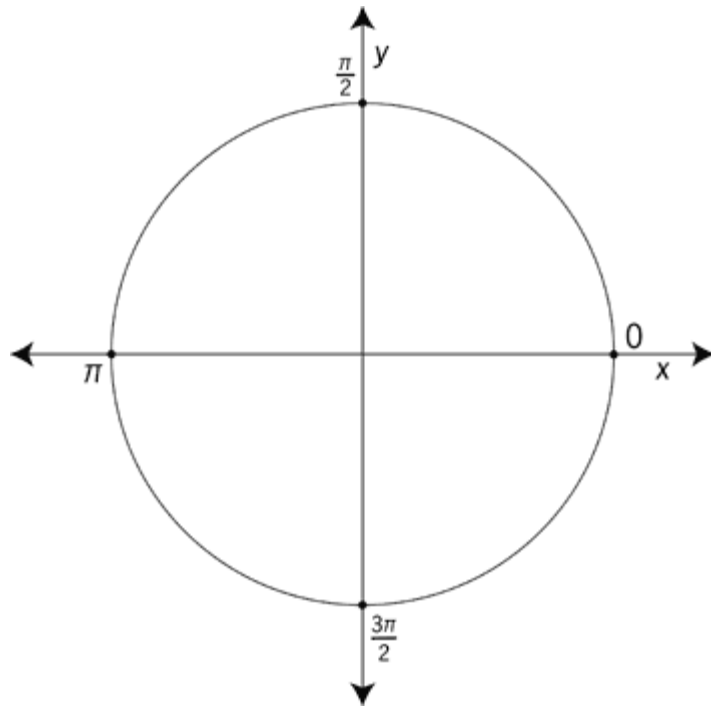
Dit is in het punt $(0,1)$

$(0,1)$ heeft draaiingshoek $\frac{1}{2}\pi$

$(0,1)$ heeft draaiingshoek $2\frac{1}{2}\pi$ enz. enz. enz.

Dus **$\sin(A) = 1$ als $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$**

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 106/107):



Voorbeeld 3:

Los de vergelijking $\sin(A) = -1$ op.

We zoeken nu de punten op de eenheids-cirkel met y -coördinaat -1.

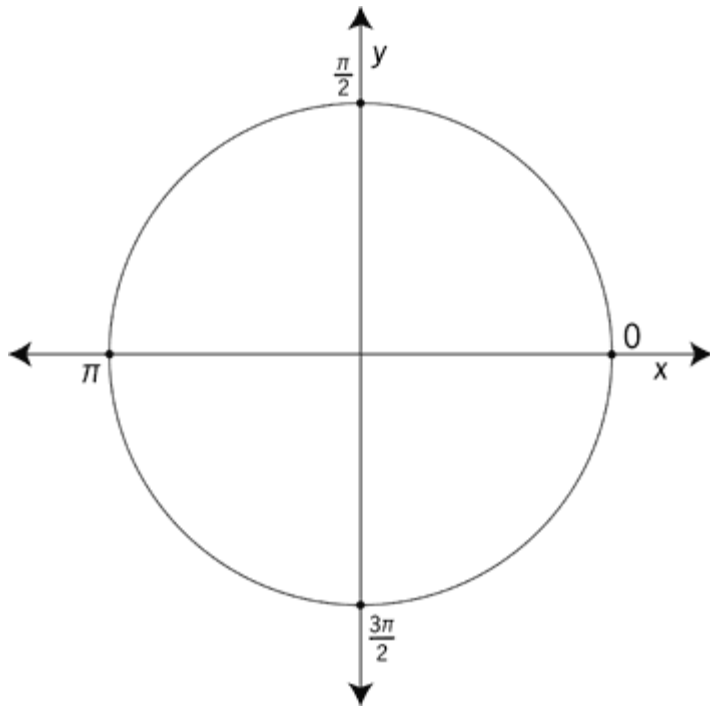
Dit is in het punt (0,-1)

(0,-1) heeft draaiingshoek $1\frac{1}{2}\pi$

(0,-1) heeft draaiingshoek $3\frac{1}{2}\pi$ enz. enz. enz.

Dus **$\sin(A) = -1$ als $A = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$**

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 106/107):



Voorbeeld 4:

Los de vergelijking $\cos(A) = 0$ op.

We zoeken nu de punten op de eenheidscirkel met x-coördinaat 0.

Dit is in de punten (0,1) en (0,-1)

(0,1) heeft draaiingshoek $\frac{1}{2}\pi$

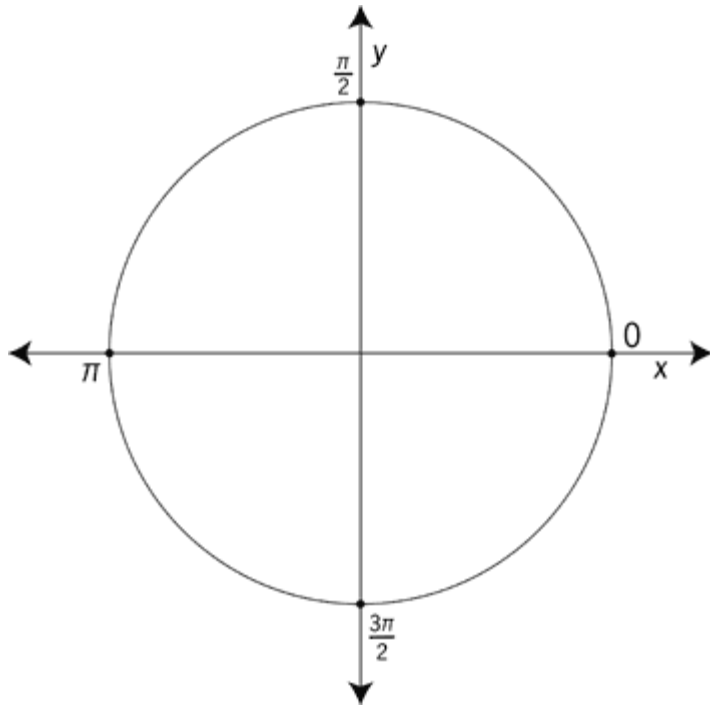
(0,-1) heeft draaiingshoek $1\frac{1}{2}\pi$

(0,1) heeft draaiingshoek $2\frac{1}{2}\pi$ enz. enz. enz.

(0,-1) heeft draaiingshoek $3\frac{1}{2}\pi$ enz. enz. enz.

Dus **$\cos(A) = 0$ als $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$**

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 106/107):



Voorbeeld 5:

Los de vergelijking $\cos(A) = 1$ op.

We zoeken nu de punten op de eenheidscirkel met x-coördinaat 1.

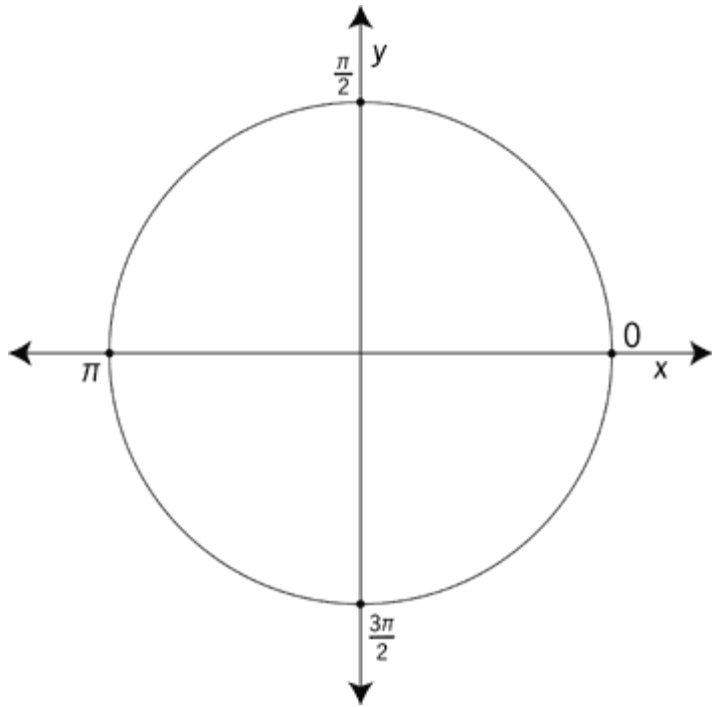
Dit is in het punt $(1,0)$

$(1,0)$ heeft draaiingshoek 0

$(1,0)$ heeft draaiingshoek 2π enz. enz. enz.

Dus **$\cos(A) = 1$ als $A = k \cdot 2\pi$**

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 106/107):



Voorbeeld 6:

Los de vergelijking $\cos(A) = -1$ op.

We zoeken nu de punten op de eenheidscirkel met x-coördinaat 1.

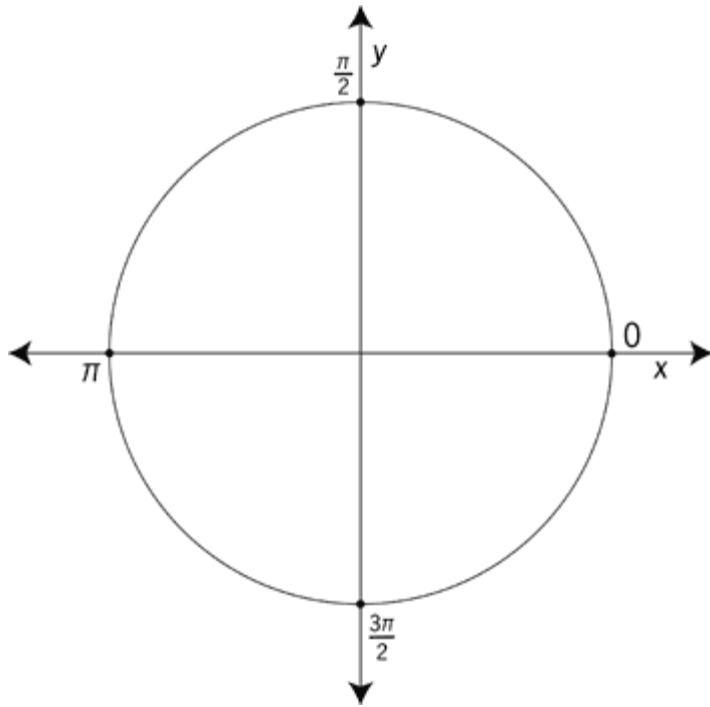
Dit is in het punt $(1,0)$

$(1,0)$ heeft draaiingshoek π

$(1,0)$ heeft draaiingshoek 3π enz. enz. enz.

Dus **$\cos(A) = 1$ als $A = \pi + k \cdot 2\pi$**

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 106/107):



Voorbeeld 7:

Bereken exact $\cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = 1$

$$3x - \frac{1}{2}\pi = k \cdot 2\pi$$

$$3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Voorbeeld 8:

Bereken exact $\cos^2(3x - \frac{1}{2}\pi) = 1$

$$\cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = 1 \vee \cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = -1$$

$$3x - \frac{1}{2}\pi = k \cdot 2\pi \vee 3x - \frac{1}{2}\pi = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 108/109):

Doel:

Je kunt de volgende goniometrische vergelijkingen exact oplossen:

- ✓ $\sin(A) = C$ voor waarden van C van $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
- ✓ $\cos(A) = C$ voor waarden van C van $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 26 t/m 33

Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 108/109):

Voorbeeld 1:

$$2\sin(3x) = \sqrt{3}$$

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Zorg dat links enkel sinus staat

Zoek in eenheidscirkel bij welke draaiingshoek de y-coördinaat $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ is

Schrijf de oplossing in de vorm $x =$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn:

$$\left[\frac{1}{9}\pi, \frac{7}{9}\pi, 1\frac{4}{9}\pi\right] \text{ en } \left[\frac{2}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi, 1\frac{5}{9}\pi\right]$$

Algemeen geldt:

$$\sin(A) = C \text{ geeft } A = B + k \cdot 2\pi \text{ of } A = \pi - B + k \cdot 2\pi$$

Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 108/109):

Voorbeeld 2:

$$2\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{2}$$

Zorg dat links enkel cos staat

$$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Zoek in eenheidscirkel bij welke draaiingshoek de x-coördinaat $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ is

$$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{13}{12}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{19}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{13}{24}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{19}{24}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn:

$$\left[\frac{13}{24}\pi, 1\frac{13}{24}\pi \right] \text{ en } \left[\frac{19}{24}\pi, 1\frac{19}{24}\pi \right]$$

Algemeen geldt:

$$\cos(A) = C \text{ geeft } A = B + k \cdot 2\pi \text{ of } A = -B + k \cdot 2\pi$$

Leerdoel 7 (Theorie C – pagina 111):

Doel:

Je kunt de volgende goniometrische vergelijkingen exact oplossen:

✓ $\sin(A) = \sin(B)$

✓ $\cos(A) = \cos(B)$

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 35 en 36

Leerdoel 7 (Theorie C – pagina 111):

Voorbeeld 1:

$$\sin(x+1) = \sin(2x-3)$$

$$x+1 = 2x-3 + k \cdot 2\pi \text{ of } x+1 = \pi - (2x-3) + k \cdot 2\pi$$

$$-x = -4 + k \cdot 2\pi \text{ of } x+1 = \pi - 2x + 3 + k \cdot 2\pi$$

$$x = 4 + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \pi + 2 + k \cdot 2\pi$$

$$x = 4 + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Maak gebruik van de regel:

$$\sin(A) = \sin(B) \text{ geeft } A = B + k \cdot 2\pi \text{ of } A = \pi - B + k \cdot 2\pi$$

Leerdoel 7 (Theorie C – pagina 111):

Voorbeeld 2:

$$\cos(3x) = \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$$

$$3x = x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = -\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$

$$2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = -x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \text{ of } 4x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn:

$$\left[\frac{7}{8}\pi, 1\frac{7}{8}\pi\right] \text{ en } \left[\frac{1}{16}\pi, \frac{9}{16}\pi, 1\frac{1}{16}\pi, 1\frac{9}{16}\pi\right]$$

Maak gebruik van de regel:

$$\cos(A) = \cos(B) \text{ geeft } A = B + k \cdot 2\pi \text{ of } A = -B + k \cdot 2\pi$$

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 113):

Doel:

Je kent de volgende eigenschappen van de functie $f(x) = \sin(x)$:

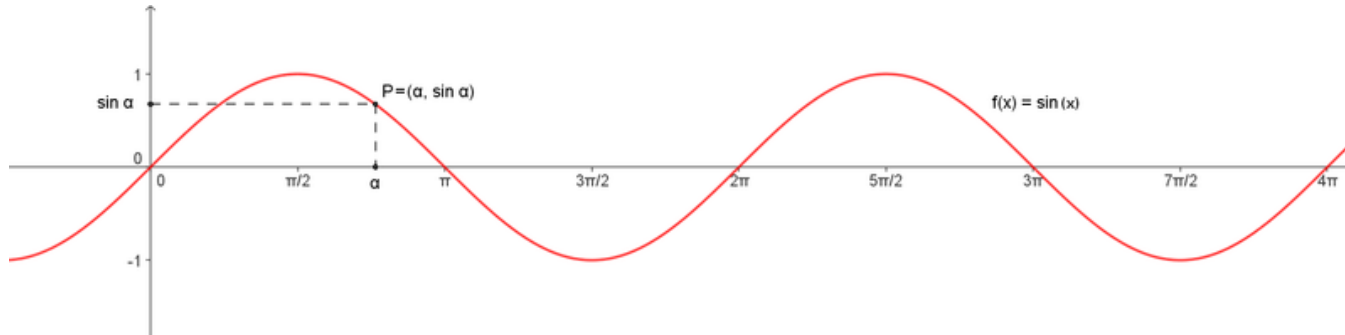
- ✓ Periode;
- ✓ Evenwichtsstand;
- ✓ Amplitude;
- ✓ Nulpunten.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 38

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 113):



- In het plaatje is de **goniometrische functie** $f(x) = \sin(x)$ getekend
- Deze functie voegt aan elk getal x de sinus van x radialen toe.
- De x -as wordt in radialen aangegeven.
- De **periode** is 2π .
- De **evenwichtsstand** is 0.
- De maximale afwijking van de evenwichtsstand (**amplitude**) is 1
- De **nulpunten** zijn ..., $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$

Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 114/115):

Doel:

Je kunt op sinusoiden de volgende zaken toepassen:

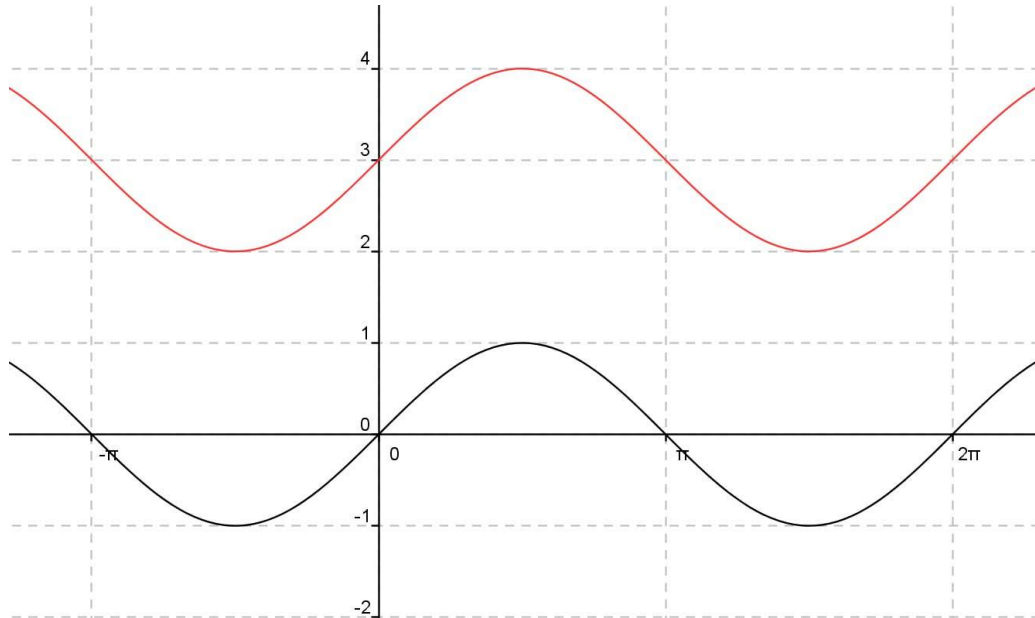
- ✓ Translatie in horizontale richting;
- ✓ Translatie in verticale richting;
- ✓ Vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as;
- ✓ Vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 41 t/m 48

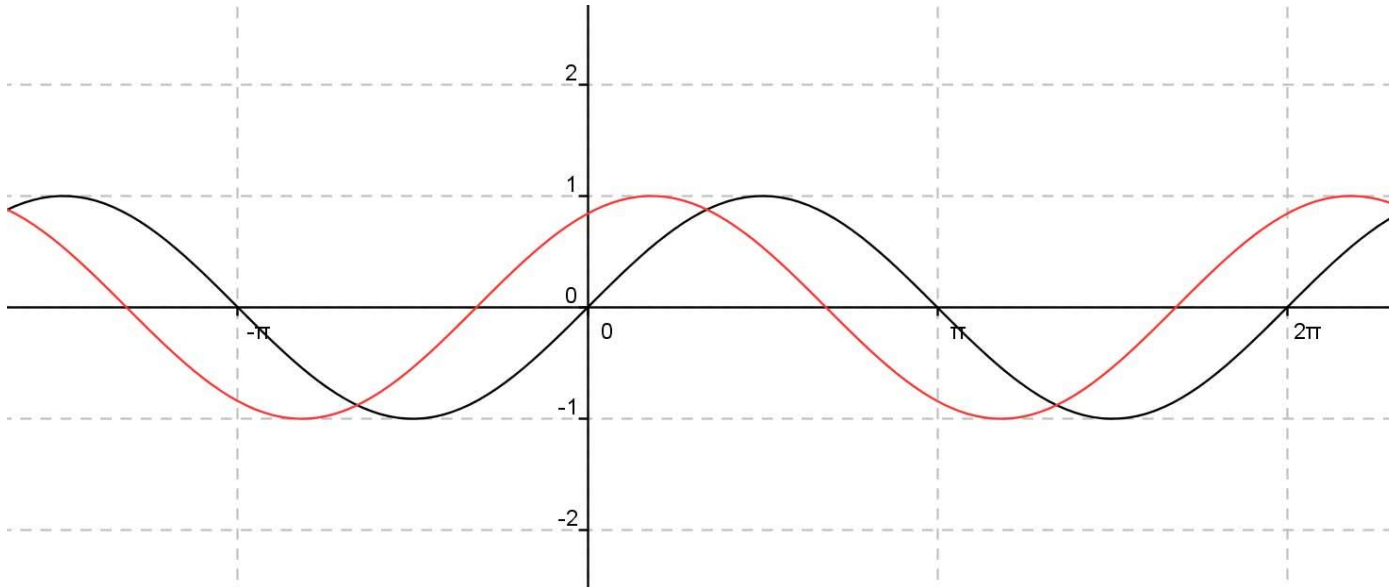
Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 114/115):



- De zwarte grafiek is $f(x) = \sin(x)$
- De rode grafiek is $g(x) = \sin(x) + 3$

De zwarte grafiek wordt 3 omhoog geschoven.

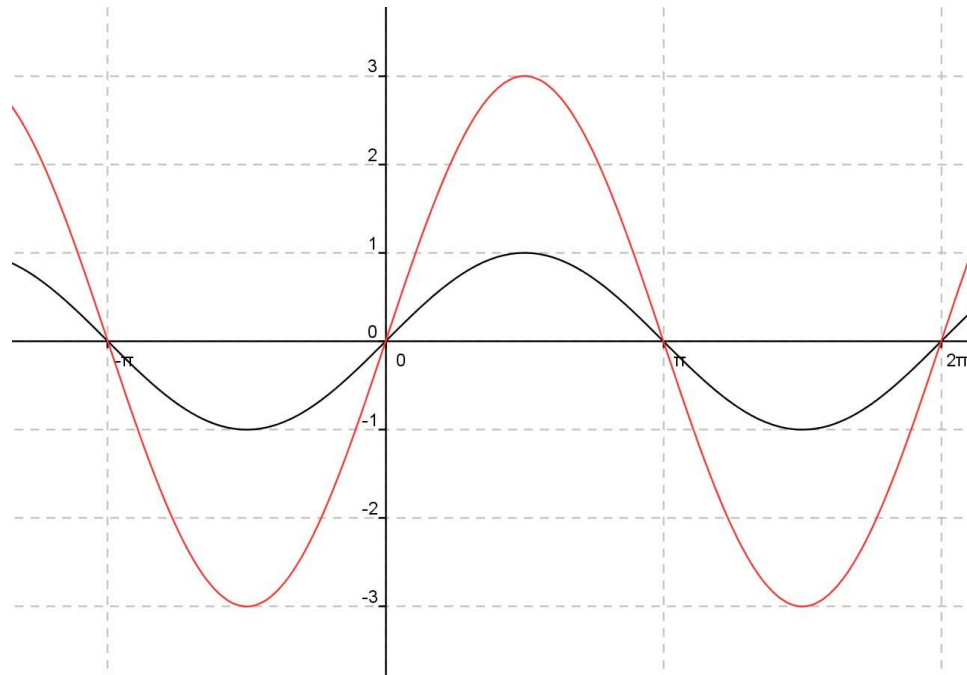
Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 114/115):



- De zwarte grafiek is $f(x) = \sin(x)$
- De rode grafiek is $g(x) = \sin(x+1)$

De zwarte grafiek wordt 1 naar **links** geschoven.

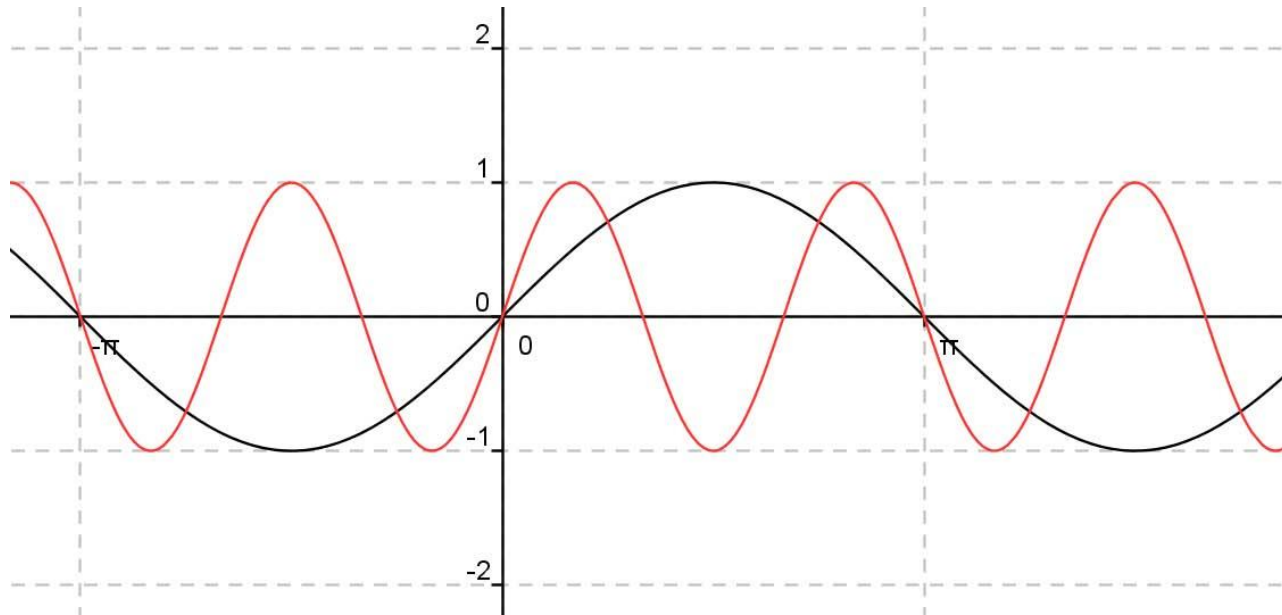
Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 114/115):



- De zwarte grafiek is $f(x) = \sin(x)$
- De rode grafiek is $g(x) = 3\sin(x)$

De zwarte grafiek wordt ten opzichte van de x-as met 3 vermenigvuldigd.

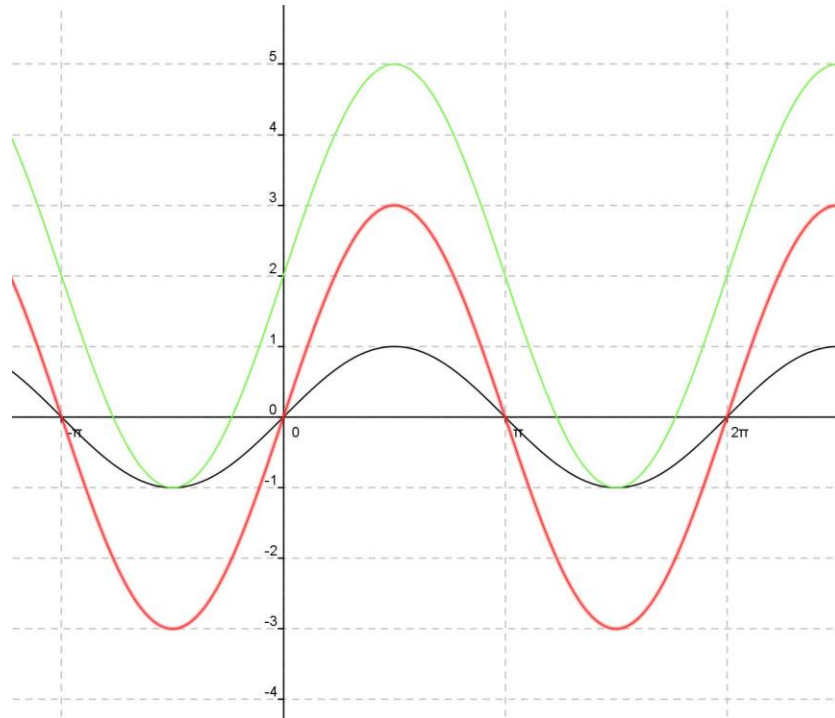
Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 114/115):



- De zwarte grafiek is $f(x) = \sin(x)$
- De rode grafiek is $g(x) = \sin(3x)$

De zwarte grafiek wordt ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd.

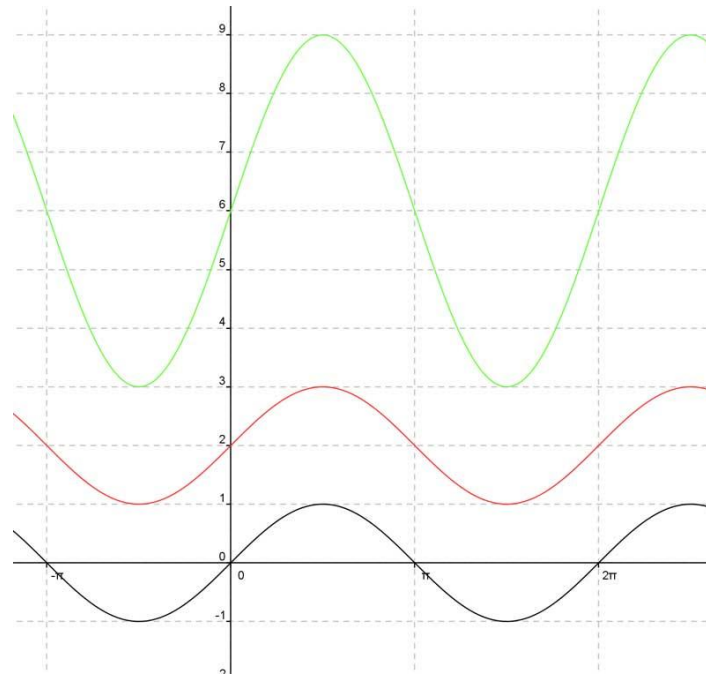
Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 114/115):



- De zwarte grafiek is $f(x) = \sin(x)$
- De rode grafiek is $g(x) = 3\sin(x)$
- De groene grafiek is $h(x) = 2 + 3\sin(x)$

Eerst een vermenigvuldiging met de x -as t.o.v. 3 en dan een translatie van $(0,2)$.

Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 114/115):



- De zwarte grafiek is $f(x) = \sin(x)$
- De rode grafiek is $g(x) = 2 + \sin(x)$
- De groene grafiek is $h(x) = 3(2 + \sin(x)) = 6 + 3\sin(x)$

Eerst een translatie van $(0,2)$ en dan een vermenigvuldiging met de x-as t.o.v. 3.

[Volgorde is van belang!!!]

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 118/119):

Doel:

Je kunt de volgende formules toepassen bij het herleiden van uitdrukkingen met $\sin(x)$ en $\cos(x)$:

$$\sin(-A) = -\sin(A)$$

$$-\sin(A) = \sin(A + \pi)$$

$$\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$$

$$\tan(A) = \sin(A)/\cos(A)$$

$$\cos(-A) = \cos(A)$$

$$-\cos(A) = \cos(A + \pi)$$

$$\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$$

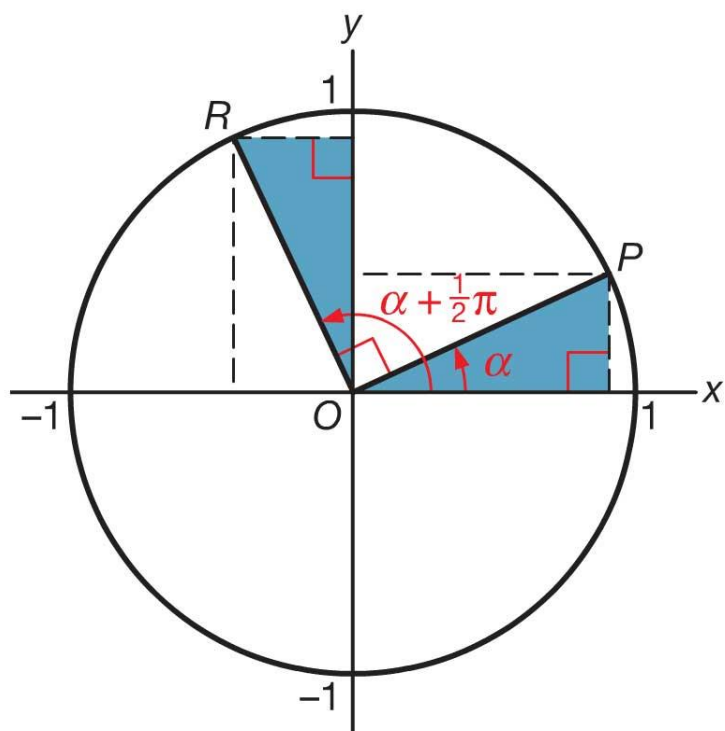
$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$$

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 50 t/m 53

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 118/119):



- P heeft coördinaten $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$
- Uit het plaatje volgt: $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = y_R = x_P = \cos \alpha$
- Uit het plaatje volgt: $\cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = x_R = -y_P = -\sin \alpha$
- R heeft de coördinaten $R(\cos \alpha, -\sin \alpha)$

Hieruit volgen dus de volgende twee goniometrische formules:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) &= \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) &= -\sin \alpha\end{aligned}$$

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 118/119):

De volgende goniometrische functies worden vanaf nu bekend verondersteld:

$$\sin(-A) = -\sin(A)$$

$$\cos(-A) = \cos(A)$$

$$-\sin(A) = \sin(A + \pi)$$

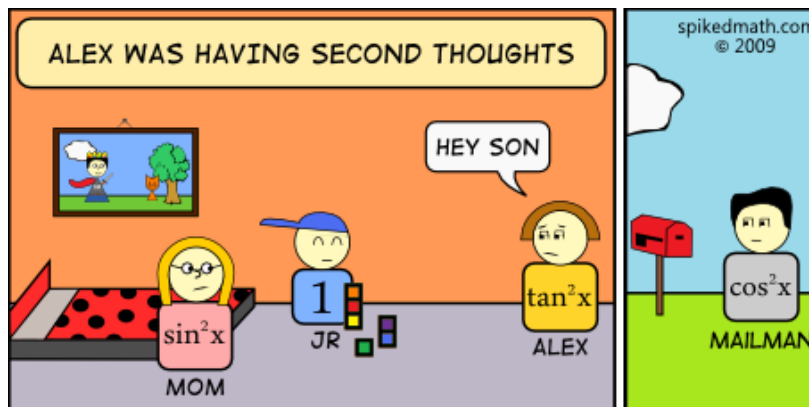
$$-\cos(A) = \cos(A + \pi)$$

$$\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$$

$$\cos(A) = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$$

$$\tan(A) = \sin(A)/\cos(A)$$

EN $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$



Let op:

Al deze goniometrische functies zijn te herleiden met behulp van de eenheidscirkel.

Leerdoel 11 (Theorie A – pagina 121):

Doel:

Als de formule van een sinusöide is gegeven, kun je van deze functie de grafiek tekenen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 55 t/m 59

Leerdoel 11 (Theorie A – pagina 121):

Teken de grafiek van $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$

Stap 1:

Schrijf de formule in de vorm $y = a + b \sin(c(x-d))$

$$f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$$

Stap 2:

Schrijf de vier kenmerken van de formule op:

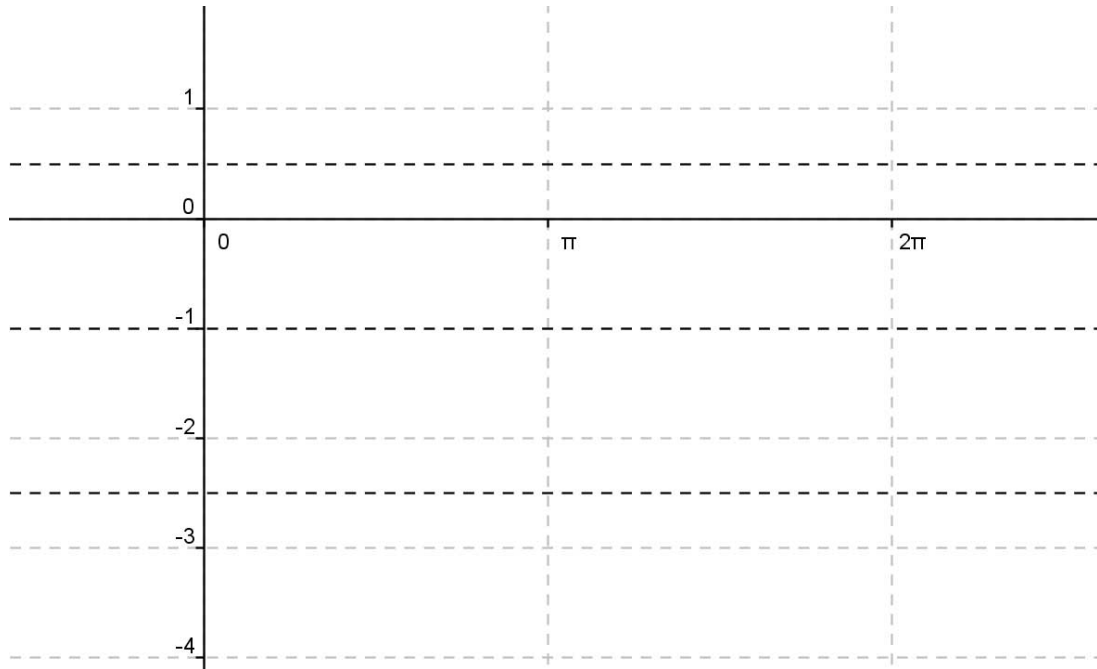
$a = \text{evenwichtsstand}$	$[= -1]$
$ b = \text{amplitude}$	$[= 1\frac{1}{2}]$
$\text{periode} = 2\pi/c$	$[= 2\pi/2 = \pi]$
$d = x\text{-coördinaat beginpunt}$	$[= \frac{1}{3}\pi]$

Let op:

- $b > 0$ dus de grafiek gaat stijgend door het beginpunt;
- Bij $b < 0$ gaat de grafiek dalend door het beginpunt;
- De y -coördinaat van het beginpunt is de evenwichtsstand $[-1]$.

Leerdoel 11 (Theorie A – pagina 121):

Teken de grafiek van $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$

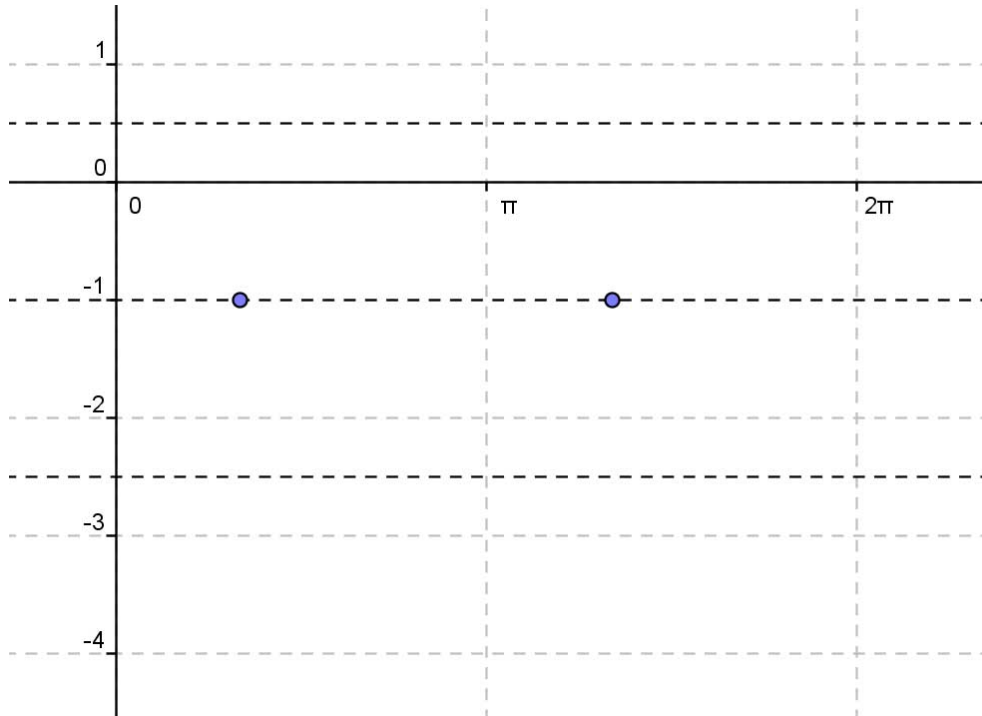


Stap 3:

Stippel in een assenstelsel de lijn van de evenwichtsstand en de lijnen waarop de toppen liggen.

Leerdoel 11 (Theorie A – pagina 121):

Teken de grafiek van $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$



Stap 4:

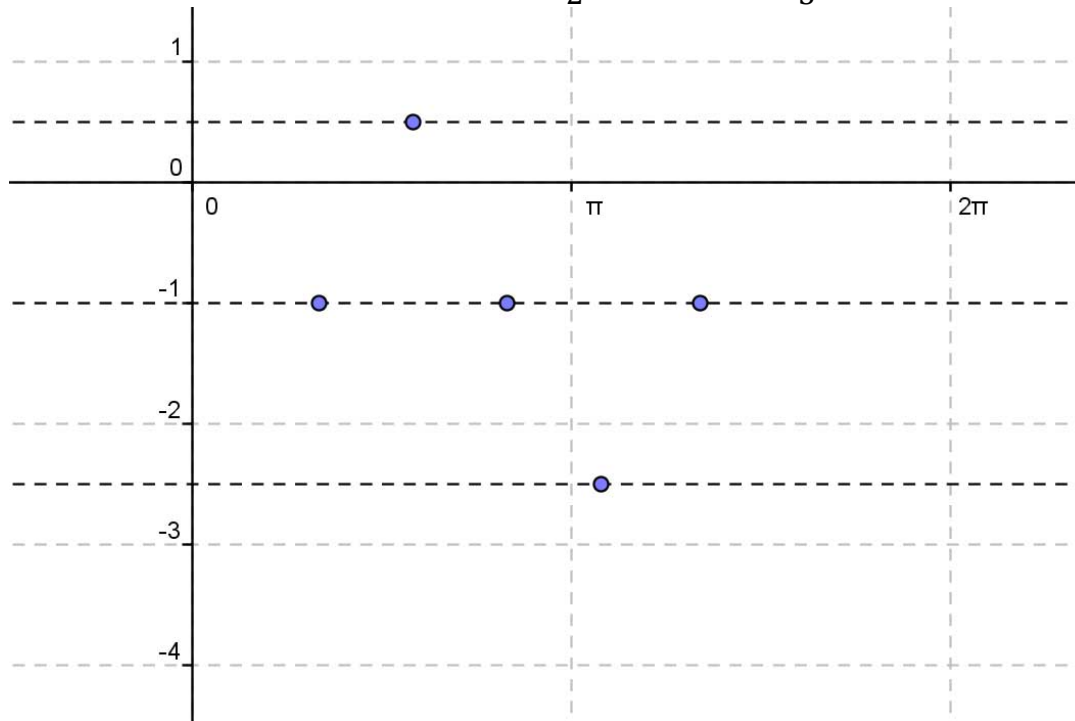
Teken het beginpunt en het punt dat één periode verder ligt.

Het beginpunt is $(\frac{1}{3}\pi, -1)$

Het punt één periode verder is $(\frac{1}{3}\pi + \pi, -1) = (1\frac{1}{3}\pi, -1)$

Leerdoel 11 (Theorie A – pagina 121):

Teken de grafiek van $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$



Stap 5:

Bij een sinusfunctie is er een maximum na $\frac{1}{4}$ periode, na $\frac{1}{2}$ periode gaat de functie weer door de evenwichtsstand en na $\frac{3}{4}$ periode is er een minimum.

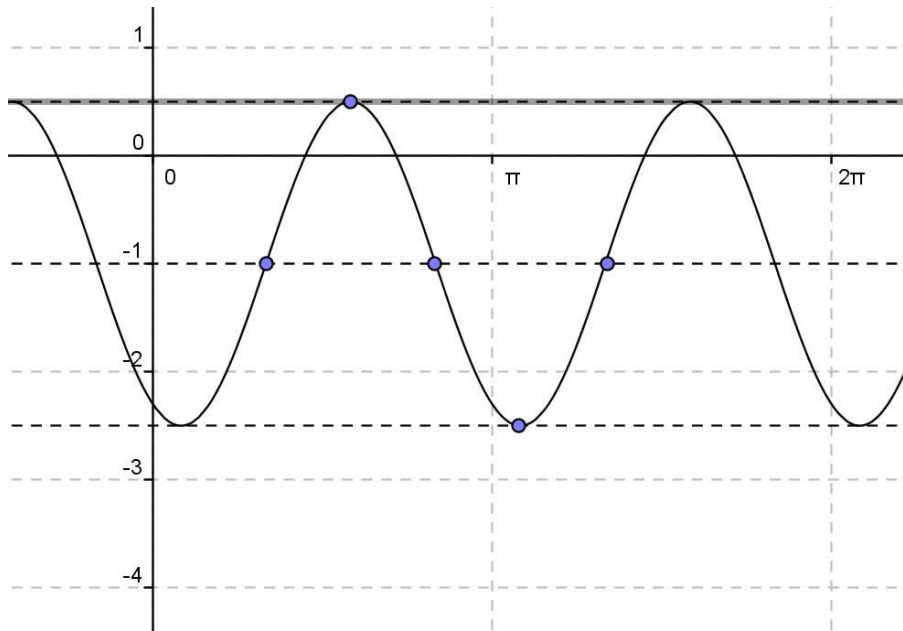
$$\text{Maximum} = \left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4}\pi, -1 + 1\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{7}{12}\pi, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Evenwichtsperiode} = \left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi, -1 \right) = \left(\frac{5}{6}\pi, -1 \right)$$

$$\text{Minimum} = \left(\frac{1}{3}\pi + \frac{3}{4}\pi, -1 - 1\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{11}{12}\pi, -2\frac{1}{2} \right). \text{ Teken deze punten.}$$

Leerdoel 11 (Theorie A – pagina 121):

Teken de grafiek van $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$



Stap 6:

Teken de grafiek door de getekende punten.

Leerdoel 12 (Theorie B – pagina 124):

Doel:

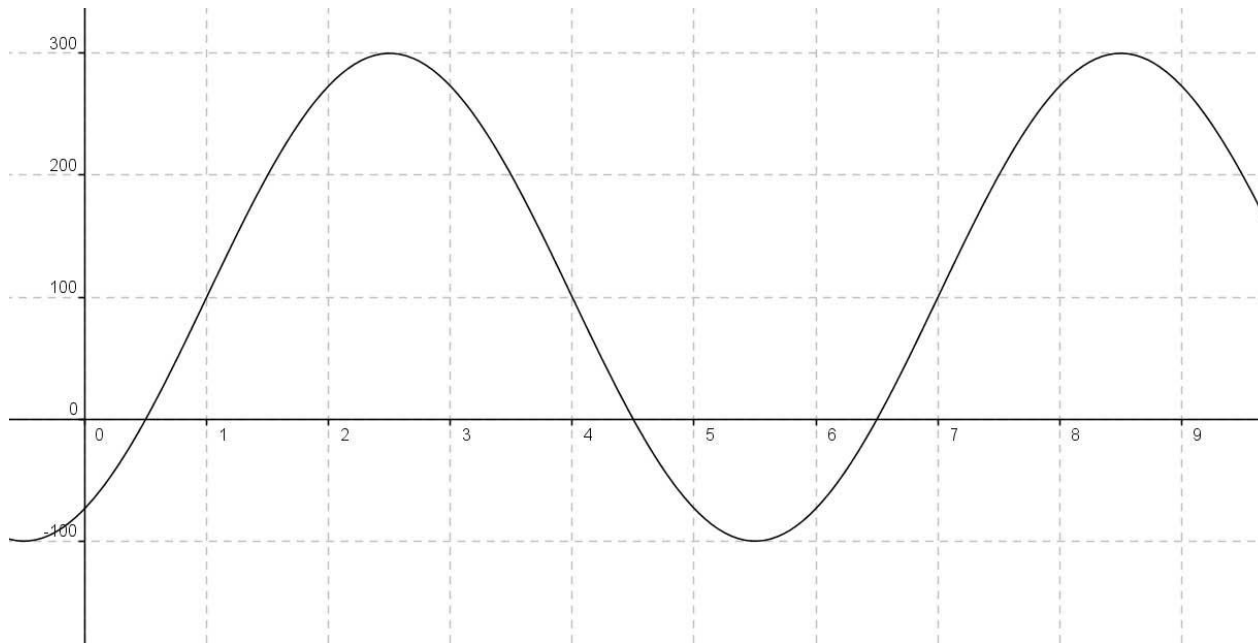
Als de grafiek van een sinusöide is gegeven, kun je met behulp hiervan de formule van deze sinusöide opstellen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 62 t/m 66

Leerdoel 12 (Theorie B – pagina 124):



Stel de formule op van de hier getekende sinusoïde in de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$

$$a = \text{evenwichtsstand} = (\text{min} + \text{max})/2 = (-100 + 300)/2 = 100$$

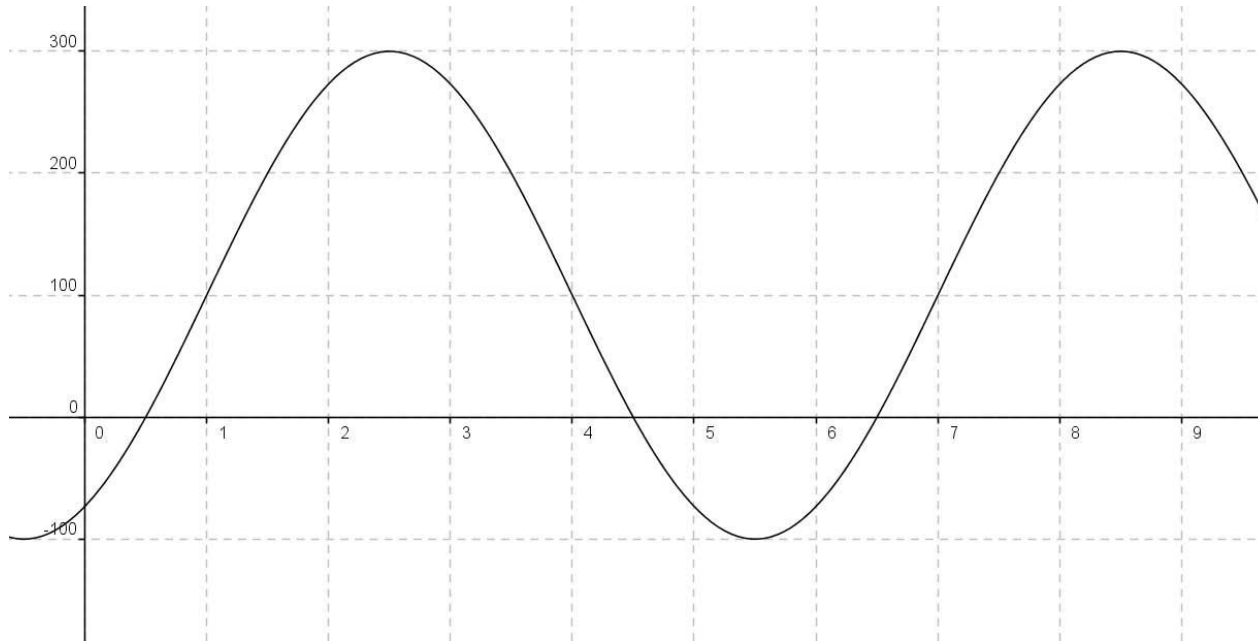
$$b = \text{amplitude} = \text{max} - \text{evenw. stand} = 300 - 100 = 200$$

$$c = 2\pi/\text{periode} = \frac{2}{6}\pi$$

$$d = x\text{-coördinaat beginpunt} = 1$$

$$y = a + b \sin(c(x - d)) = 100 + 200 \sin\left(\frac{2}{6}\pi(x - 1)\right)$$

Leerdoel 12 (Theorie B – pagina 124):



Stel de formule op van de hier getekende sinusoïde in de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$

$$a = 100, b = 200 \text{ en } c = \frac{2}{6} \pi$$

d = Een hoogste punt is $(2\frac{1}{2}, 300)$, dus $d = 2\frac{1}{2}$

$$y = a + b \cos(c(x - d)) = 100 + 200 \cos(\frac{2}{6} \pi (x - 2\frac{1}{2}))$$

Leerdoel 13 (Theorie C – pagina 126):

Doel:

Je weet wat de functie $\tan(x)$ is en kunt hiermee de volgende dingen doen:

- ✓ Je kunt de vergelijking $\tan(A) = C$ voor waarden van C van -1 , 1 , $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ oplossen;
- ✓ Je kunt de vergelijking $\tan(A) = \tan(B)$ oplossen;
- ✓ Je kunt tangensfuncties tekenen;
- ✓ Je kunt van een tangensfunctie het beginpunt, de periode en de asymptoten bepalen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 68 t/m 71

Leerdoel 13 (Theorie C – pagina 126):

Rechts is de functie $f(x) = \tan(x)$ getekend.

In de eenheidscirkel geldt:

$$\tan \alpha = \frac{y_p}{x_p}$$

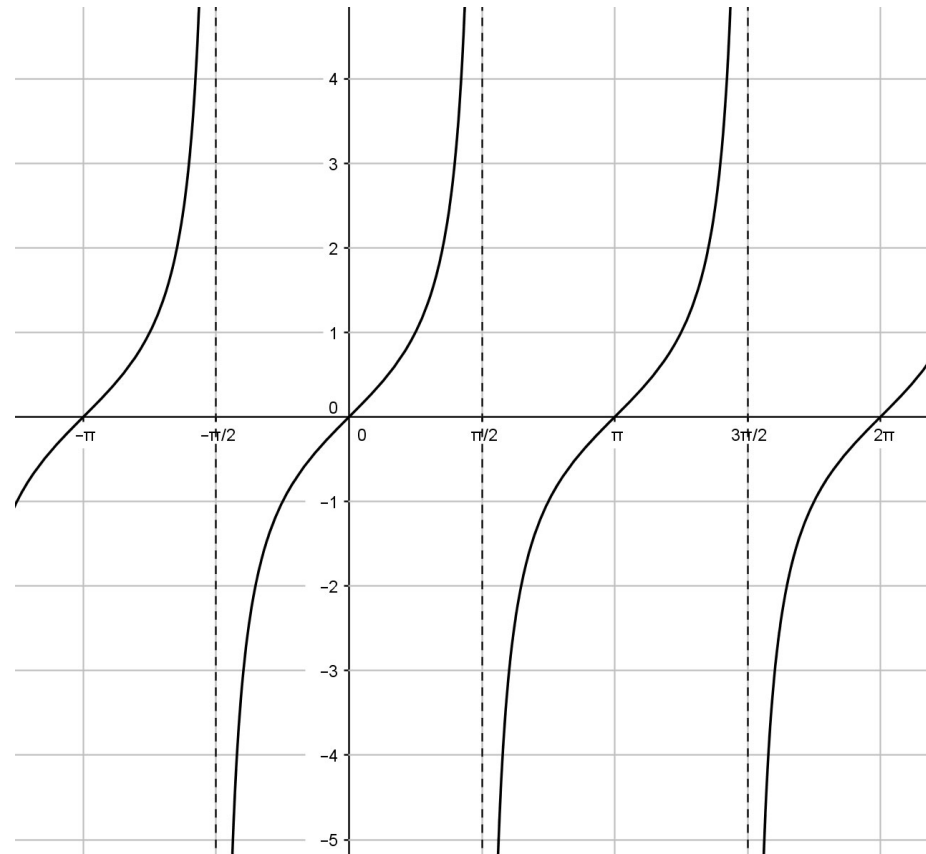
Bij de draaiingshoek $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ geldt:

$$\tan\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{0} = k.n.$$

Bij de draaiingshoek $\alpha = 1\frac{1}{2}\pi$ geldt:

$$\tan\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{-1}{0} = k.n.$$

Bij $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ en $\alpha = 1\frac{1}{2}\pi$ zijn er verticale asymptoten.
Het punt $(0, 0)$ is het beginpunt van de grafiek.



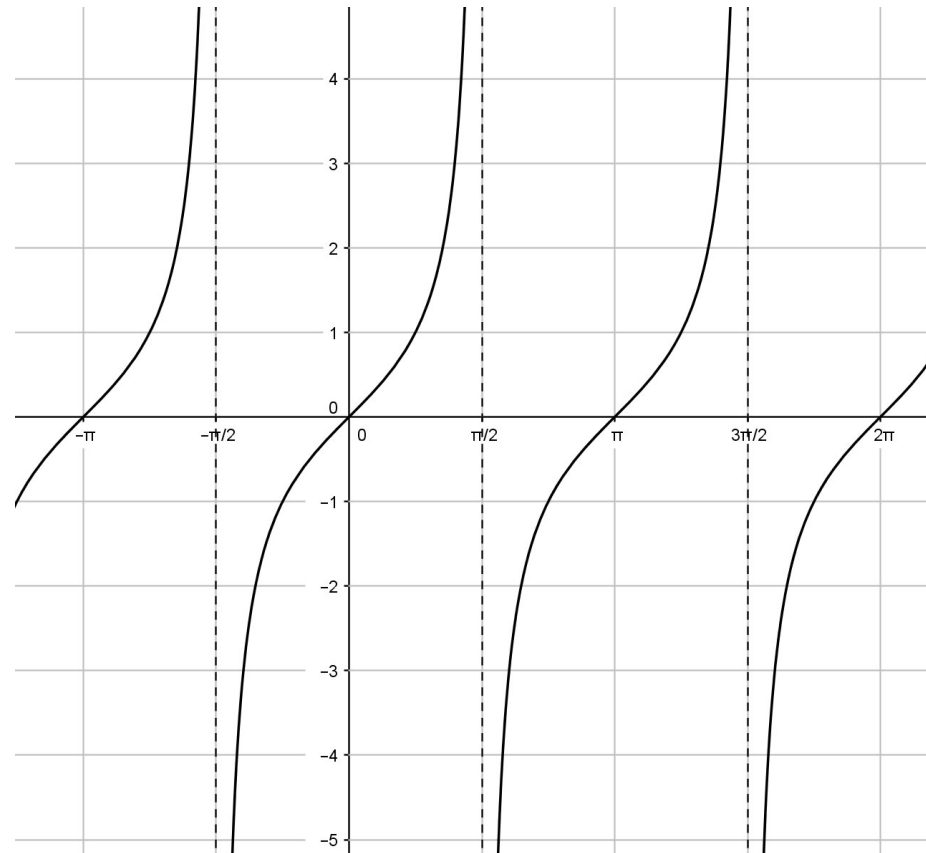
Leerdoel 13 (Theorie C – pagina 126):

hoek	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tangens	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

Andere exacte waarden kunnen berekend worden met behulp van de eenheids-cirkel en de exacte waarden van de sinus en de cosinus.

Er geldt:

$$\tan(A) = \tan(B) \text{ geeft } A = B + k \cdot \pi$$



Leerdoel 13 (Theorie C – pagina 126):

Voorbeeld 1:

$$\tan(2x - \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{3}$$

$$2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{7}{24}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Voorbeeld 2:

$$\tan(3x) = \tan(x - \frac{1}{4}\pi)$$

$$3x = x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Leerdoel 14 (Theorie A – pagina 131):

Doel:

Je kent de volgende afgeleiden en kunt die toepassen in combinatie met de productregel, quotiëntregel en kettingregel:

- ✓ $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$
- ✓ $g(x) = \cos(x) \Rightarrow g'(x) = -\sin(x)$
- ✓ $h(x) = \tan(x) \Rightarrow h'(x) = 1 + \tan^2(x)$

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 73 t/m 77

Leerdoel 14 (Theorie A – pagina 131):

Voor het differentiëren van sinus- en cosinusfuncties gelden de volgende regels:

$$\begin{aligned}f(x) = \sin(x) &\Rightarrow f'(x) = \cos(x) \\g(x) = \cos(x) &\Rightarrow g'(x) = -\sin(x)\end{aligned}$$

Voorbeeld 1:

Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \tan(x)$

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Gebruik de quotiëntregel

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\cos(x) \cdot [\sin(x)]' - \sin(x) \cdot [\cos(x)]'}{\cos^2(x)} \\&= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot -\sin(x)}{\cos^2(x)} \\&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\&= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\end{aligned}$$

Leerdoel 14 (Theorie A – pagina 131):

Voorbeeld 2:

Bereken de afgeleide van de functie $g(x) = x \sin(x)$

$$g(x) = x \sin(x)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= [x]' \cdot \sin(x) + x \cdot [\sin(x)]' = \\ &1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \\ &\sin(x) + x \cos(x) \end{aligned}$$

Gebruik de productregel

Voorbeeld 3:

Bereken de afgeleide van de functie $h(x) = \tan^2(x)$

$$h(x) = \tan^2(x) = u^2 \text{ met } u = \tan(x)$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= [u^2]' \cdot [\tan(x)]' \\ &= 2u \cdot (1 + \tan^2(x)) \\ &= 2 \tan(x) (1 + \tan^2(x)) \\ &= 2 \tan(x) + 2 \tan^3(x) \end{aligned}$$

Gebruik de kettingregel