Voorkennis

Voorbeeld 1:

Bereken het snijpunt van $3x + 2y = 6$ en $-2x + y = 3$

$$\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

Het vermenigvuldigen van de vergelijkingen zorgt ervoor dat in de volgende stap de "*x*-en tegen elkaar wegvallen"

$$\begin{cases} -6x + 3y = 9 \\ 6x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$---------- \quad +$$

$$7y = 21$$

$$y = 3$$

Invullen van $y = 3$ geeft $x = 0$, dus (0, 3) is het snijpunt.

Voorkennis

Voorbeeld 1:
Deze vergelijking $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 12$ kan ook als volgt geschreven worden:

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 12$
$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 12$
$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 13 = 0$

Als je $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 13 = 0$ wilt schrijven als $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 12$ gaat dit met behulp van **kwadraatafsplitsen**.

Voorbeeld 2:
Splits het kwadraat af van: $x^2 + 4x + 11$

$x^2 + 4x + 11 =$
$(x + 2)^2 - 4 + 11 =$ Splits het kwadraat af
$(x + 2)^2 + 7$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 142):

Doel:
Je kunt bij een stelsel van twee lineaire vergelijkingen:
- ✓ bepalen of en wanneer het stelsel uit twee evenwijdige lijnen bestaat die niet samenvallen (strijdig stelsel)
- ✓ bepalen of en wanneer het stelsel uit twee lijnen bestaat die samenvallen (afhankelijk stelsel)
- ✓ bepalen of en wanneer een stelsel uit twee lijnen bestaat die een snijpunt hebben (onafhankelijk stelsel)

Uitleg theorie

Oefenen met:
Opgave 2 en 3

<u>Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 142):</u>

<u>Algemeen:</u>
Gegeven is het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

<u>Voorbeeld van een **strijdig** stelsel:</u>

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = 5 - 2x \\ -6y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{3} \\ y = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{7}{6} \end{cases}$$

Er is sprake van een tweetal evenwijdige lijnen. Evenwijdige lijnen hebben geen snijpunt. Er geldt dan:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 142):

Algemeen:
Gegeven is het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

Voorbeeld van een **afhankelijk** stelsel:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = 5 - 2x \\ -6y = 10 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$$

Er is sprake van een tweetal gelijke lijnen. Bij gelijke lijnen bestaan geen snijpunten. Er geldt dan:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 142):

Algemeen:
Gegeven is het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

Voorbeeld van een **onafhankelijk** stelsel:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = 5 - 2x \\ -5y = 10 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \\ y = \frac{3}{5}x - 2 \end{cases}$$

Er is sprake van twee lijnen, die een snijpunt hebben. Dit geldt als:

$$\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 142):

Voorbeeld 1:
Gegeven zijn de lijnen k_p: $px + (p+1)y = 5$ en l_p: $(p-1)x + (p-3)y = q$
Bereken exact voor welke p en q de twee lijnen evenwijdig zijn.

$$\frac{p}{p-1} = \frac{p+1}{p-3}$$

Zie opmerking strijdig stelsel

$$p(p-3) = (p-1)(p+1)$$

$$p^2 - 3p = p^2 - 1$$

$$-3p = -1$$

$$p = \tfrac{1}{3}$$

q kan elk getal zijn.

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 142):

Voorbeeld 2:
Gegeven zijn de lijnen k_p: $px + (p + 1)y = 5$ en l_p: $(p - 1)x + (p - 3)y = q$
Bereken exact voor welke p en q de twee lijnen samenvallen.

Invullen van $p = \frac{1}{3}$ geeft
k_p: $\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}y = 5$ en l_p: $-\frac{2}{3}x - 2\frac{2}{3}y = q$

$$\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{1\frac{1}{3}}{-2\frac{2}{3}} = \frac{5}{q}$$

Zie opmerking afhankelijk stelsel stelsel

$$\frac{1}{-2} = \frac{5}{q}$$

$$q = -10$$

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 144):

Doel:
Je kunt wanneer een lijn gegeven is als een parametervoorstelling door het elimineren van de parametervariabele de formule van de lijn opstellen;

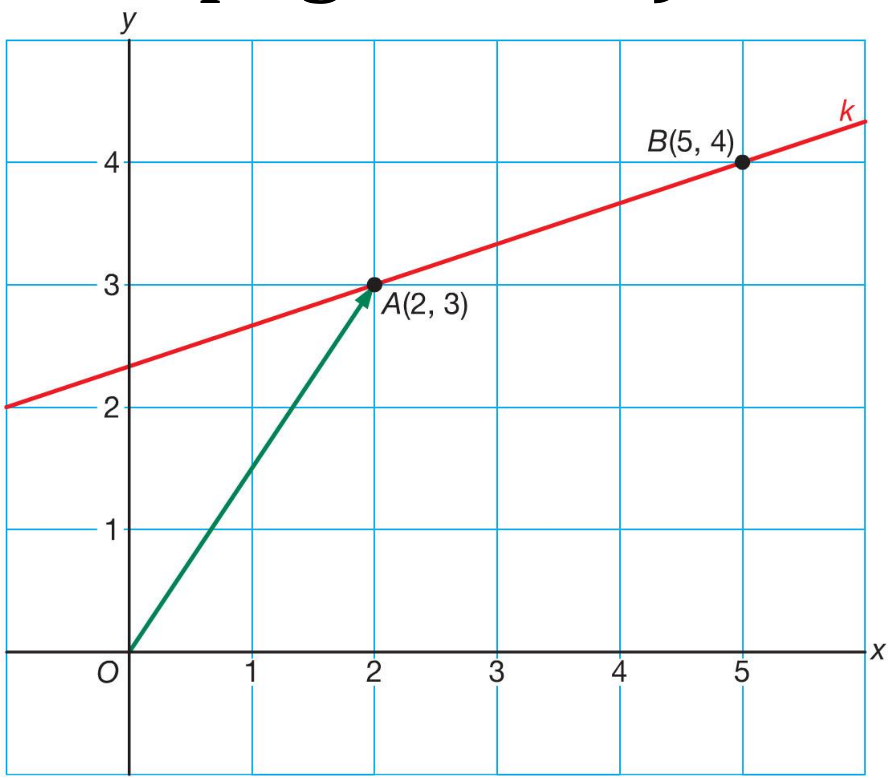
Uitleg theorie

Oefenen met:
Opgave 5 t/m 7

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 144):

De lijn k in de figuur hiernaast kan genoteerd worden als:
$x = 3t + 2$ en $y = t + 3$

$$k: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 3 \end{cases}$$



Je komt van punt A naar punt B door 3 naar rechts te gaan en 1 omhoog te gaan.

Voor $t = 0$ krijg je punt $A(2, 3)$
Voor $t = 1$ krijg je punt $B(4, 5)$

Voor elke waarde van t kom je uit op een punt op de lijn k.

Dit is de **parametervoorstelling** van lijn k.

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 144):

De lijn k in de figuur hiernaast kan ook genoteerd worden als:
$x = 6t + 5$ en $y = 2t + 4$

Zo zijn er oneindig veel parametervoorstellingen van deze lijn.

Dit is ook een **parametervoorstelling** van lijn k.

$$\begin{cases} x = 3t + 2 & |1| \\ y = t + 3 & |3| \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ 3y = 3t + 9 \end{cases}$$

$$\overline{} \quad -$$

$$x - 3y = -7$$

Het elimineren van t uit de parametervoorstelling van de lijn, geeft de vergelijking van de lijn.

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 145):

Doel:
Je kunt de vergelijking van een lijn opstellen in de vorm van een assenvergelijking.

Uitleg theorie

Oefenen met:
Opgave 10 t/m 12, 14, 15, 17

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 145):

Algemeen:

De vergelijking $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ met a ≠ 0 en b ≠ 0 is de **assenvergelijking** van een lijn.

Deze heeft de volgende snijpunten met de assen:

Snijpunt met de *x*-as:
Invullen van $y = 0$ geeft: $\frac{x}{a}=1 \Rightarrow x=a$

Het snijpunt met de *x*-as is dus het punt (a, 0)

Snijpunt met de *y*-as:
Invullen van $x = 0$ geeft: $\frac{y}{b}=1 \Rightarrow y=b$

Het snijpunt met de *y*-as is dus het punt (0, b)

De lijn $k:\frac{x}{-3}+\frac{y}{6}=1 \Leftrightarrow -2x+y=6$ snijdt de assen in de punten (-3, 0) en (0, 6)

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 145):

Voorbeeld 1:
De lijn k snijdt de x-as in het punt (6, 0) en de y-as in het punt (0, q).
Bereken q in het geval het punt (4, -1) op k ligt.

$$k : \frac{x}{6} + \frac{y}{q} = 1 <=> qx + 6y = 6q$$

Invullen van (4, -1) geeft:
$q \cdot 4 = 6 \cdot -1 = 6q$
$4q - 6 = 6q$
$-2q = 6$
$q = -3$

Voorbeeld 2:
Voor welke waarde van q is k evenwijdig met de lijn l: $y = 3x + 2$?
k : $qx + 6y = 6q$ en l: $3x - y = -2$

$k \,//\, l$ geeft:

$$\frac{q}{3} = \frac{6}{-1}$$
$$-q = 18$$
$$q = -18$$

Leerdoel 4 (Theorie D – pagina 148/149):

Doel:
Je kunt de hoek tussen twee lijnen berekenen.

Uitleg theorie

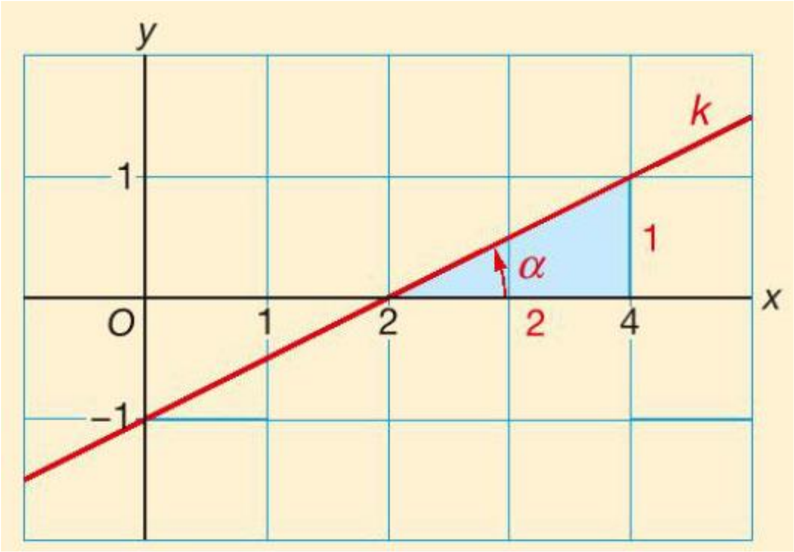
Oefenen met:
Opgave 19 t/m 22

Leerdoel 4 (Theorie D – pagina 148/149):

Voorbeeld 1:
Getekend is de lijn k: $y = \frac{1}{2}x - 1$.

De richtingshoek α van de lijn k
is te berekenen met:

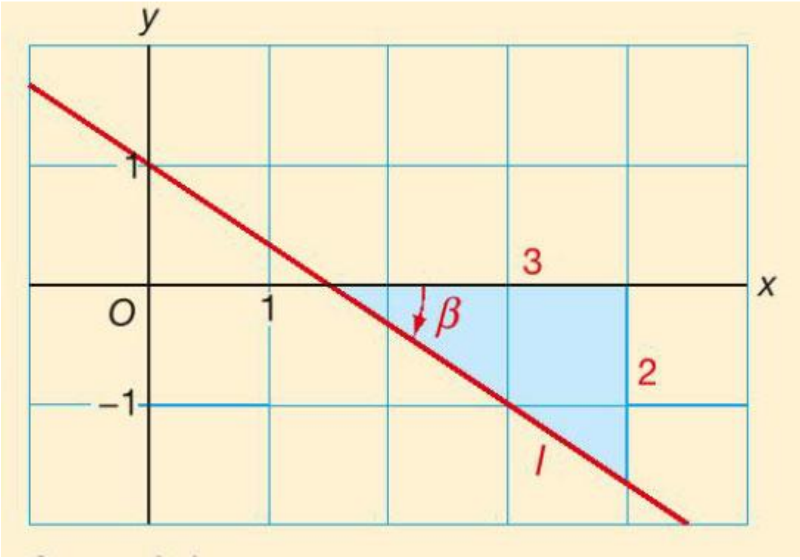
$\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$
$\tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 26{,}6^\circ$ (= α)



Voorbeeld 2:
Getekend is de lijn l: $y = -\frac{2}{3}x + 1$

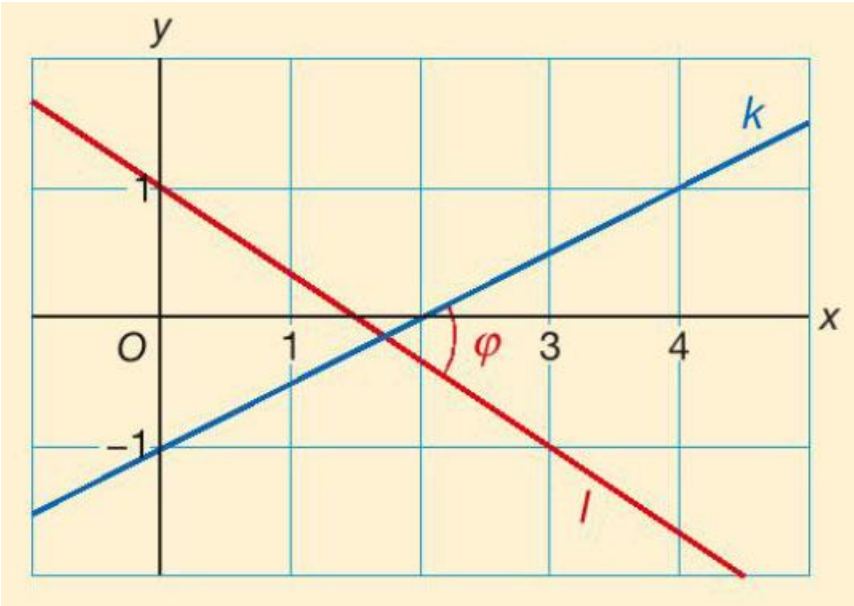
De richtingshoek β van de lijn l
is te berekenen met:

$\tan(\beta) = -\frac{2}{3}$
$\tan^{-1}(-\frac{2}{3}) \approx -33{,}7^\circ$ (= β)



Leerdoel 4 (Theorie D – pagina 148/149):

Voorbeeld 3:
De richtingshoek φ tussen de lijnen
k en l is gelijk aan 26,6° - - 33,7° ≈ 60,3°.



Let op:
Voor de hoek φ tussen twee lijnen,
wordt altijd de hoek genomen waarvoor
geldt: $0° \leq \varphi \leq 90°$.

Als φ groter is dan 90° kun je de hoek
tussen twee lijnen berekenen met $180° - \varphi$.

Bij het berekenen van de hoek φ tussen
twee lijnen moeten de vergelijkingen in de vorm
$y = ax + b$ worden geschreven.

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 152/153):

Doel:

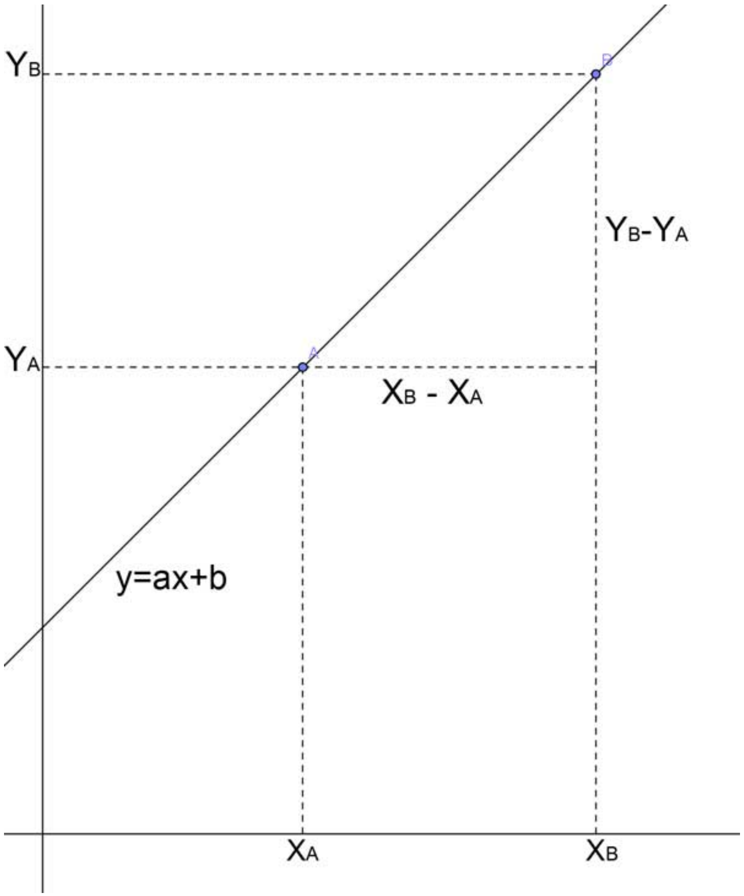
- ✓ Je kunt de afstand tussen twee punten berekenen waarvan de coördinaten bekend zijn;
- ✓ Je kunt de coördinaten van het midden van een lijnstuk berekenen;
- ✓ Je kunt de afstand tussen twee punten waarvan de coördinaten niet volledig bekend zijn schrijven als een functie;
- ✓ Je kunt bij het bovenstaande leerdoel berekenen wanneer deze punten een bepaalde of minimale waarde hebben.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 24 t/m 26

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 152/153):



Gegeven zijn de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$

De afstand tussen deze twee punten kun je berekenen met de stelling van Pythagoras:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = d(A,B)$$

Voor het punt M op het midden van het lijnstuk AB geldt:

$x_M = ½(x_A + x_B)$ en $y_M = ½(y_A + y_B)$

Je berekent hier het gemiddelde van de *x*- en *y*-coördinaten van A en B.

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 152/153):

Voorbeeld:
Voor $q > 0$ zijn gegeven de punten $A(0, q)$ en $B(q, 5)$.
Bereken de minimale afstand tussen A en B.

Stap 1:
Stel de functie op die de afstand van A tot B weergeeft.

$$d(A,B) = d(q)$$

$$\sqrt{(q-0)^2 + (5-q)^2} =$$

$$\sqrt{q^2 + 25 - 10q + q^2} =$$

$$\sqrt{2q^2 - 10q + 25}$$

Stap 2:
Bereken de afgeleide van $d(q)$.

$$d'(q) = \frac{1}{2\sqrt{2q^2 - 10q + 25}}(4q - 10)$$

$$d'(q) = \frac{2q - 5}{\sqrt{2q^2 - 10q + 25}}$$

Leerdoel 5 (Theorie A – pagina 152/153):

Voorbeeld:
Voor $q > 0$ zijn gegeven de punten $A(0, q)$ en $B(q, 5)$.
Bereken de minimale afstand tussen A en B.

Stap 3:
Stel de afgeleide gelijk aan nul.

$d'(q) = 0$
$2q - 5 = 0$
$q = 2\frac{1}{2}$
Controleren met de GR geeft aan dat hier een minimum is.

Stap 4:
Bereken de minimale afstand.

$$q(2\tfrac{1}{2}) = \sqrt{2 \cdot (2\tfrac{1}{2})^2 - 10 \cdot 2\tfrac{1}{2} + 25}$$

$$q(2\tfrac{1}{2}) = \sqrt{2 \cdot 6\tfrac{1}{4} - 25 + 25}$$

$$q(2\tfrac{1}{2}) = \sqrt{12\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{25}{2}} = \tfrac{5}{\sqrt{2}} = \tfrac{5}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \tfrac{5\sqrt{2}}{2} = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 154/155):

Doel:

- ✓ Je weet dat twee lijnen loodrecht op elkaar staan als de richtingscoëfficiënten van beide lijnen vermenigvuldigd met elkaar gelijk zijn aan -1;
- ✓ Met behulp van bovenstaande eigenschap kun je de formule opstellen van een lijn die loodrecht op een andere lijn staat.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 28 t/m 34

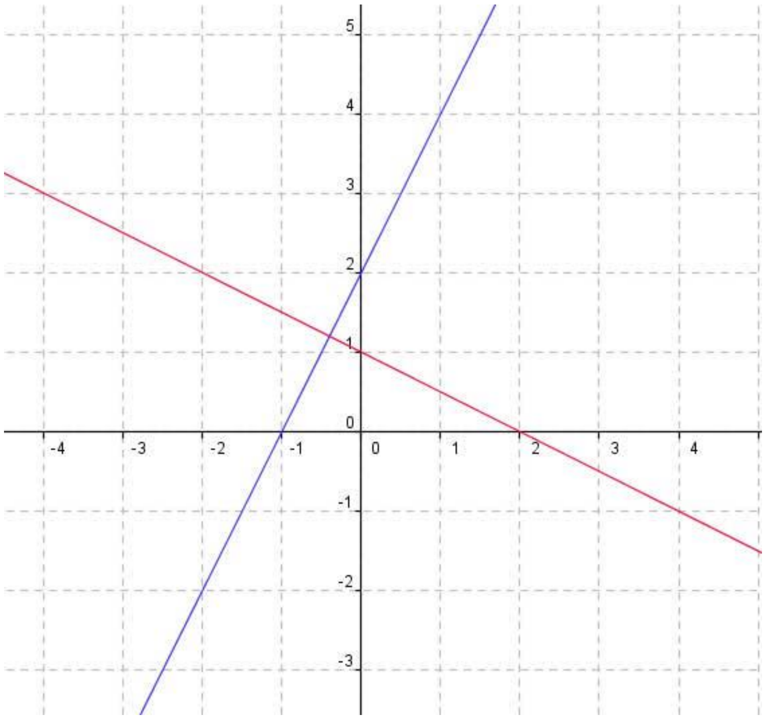
Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 154/155):

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x + 2$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

De grafieken van deze twee functies snijden elkaar loodrecht. In het punt waar ze elkaar loodrecht snijden geldt het volgende:

$f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$

Door het oplossen van dit stelsel van vergelijkingen kun je dus nagaan of een tweetal grafieken elkaar in een punt loodrecht snijden.



Leerdoel 6 (Theorie B – pagina 154/155):

Voorbeeld:
Stel een vergelijking op van de lijn k die door het punt $A(6, 5)$ gaat en loodrecht staat op de lijn l: $y = 4x - 1$.

Stap 1:
Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn k.
$\mathrm{rc}_k \cdot \mathrm{rc}_\mathrm{l} = -1$
$\mathrm{rc}_k \cdot 4 = -1$
$\mathrm{rc}_k = -\frac{1}{4}$

Stap 2:
Voor de lijn k geldt nu: k: $y = -\frac{1}{4}x + b$.

Invullen van $A(6, 5)$ geeft:
$5 = -\frac{1}{4} \cdot 6 + b$
$5 = -1\frac{1}{2} + b$
$b = 6\frac{1}{2}$

k: $y = -\frac{1}{4}x + 6\frac{1}{2}$

Leerdoel 7 (Theorie B – pagina 156/157):

Doel:

- ✓ Je kunt de afstand van een punt *A* tot een lijn *k* berekenen.

Uitleg theorie

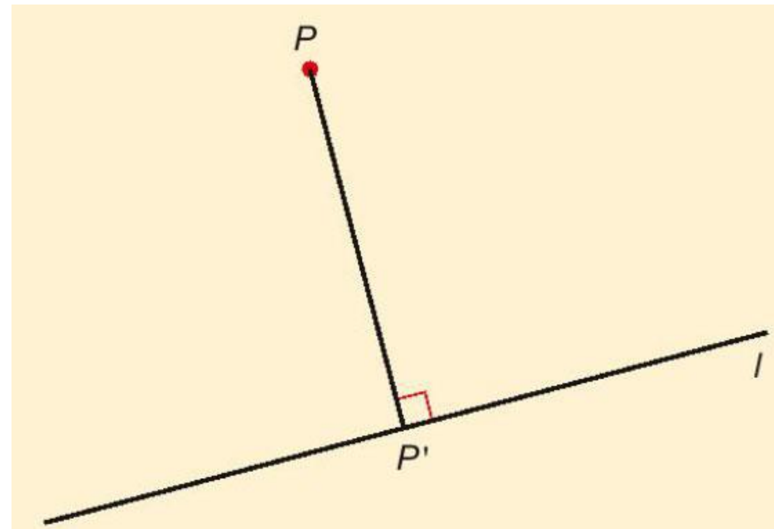
Oefenen met:

Opgave 36 t/m 39

Leerdoel 7 (Theorie B – pagina 156/157):

De afstand van een punt P tot een lijn l is de afstand van P tot zijn loodrechte projectie P'op l.

Er geldt: $d(P, l) = PP'$.



Let op:
De lijn $k : ax + by = c$ staat loodrecht op de lijn $l : bx - ay = d$.
(Aangetoond in opgave 30)

Leerdoel 7 (Theorie B – pagina 156/157):

Voorbeeld:
Bereken exact de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn k: $3x + 2y = 12$.

Stap 1:
Stel de vergelijking op van de lijn l.

De lijn l gaat door het punt $A(5, 5)$ en staat loodrecht op lijn k.
$l : 2x - 3y = c$

Invullen van het punt A(5,5) geeft:
$2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = -5 = c$

Dus: $l : 2x - 3y = 5$.

Leerdoel 7 (Theorie B – pagina 156/157):

Voorbeeld:
Bereken exact de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn k: $3x + 2y = 12$.

Stap 2:
Bepaal het snijpunt B van de lijnen k en l.

$$\begin{cases} 3x+2y=12 & |3| \\ 2x-3y=-5 & |2| \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x+6y=36 \\ 4x-6y=-10 \end{cases}$$

$$---------\quad -$$

$$13x=26$$

$$x=2$$

Invullen geeft: $3 \cdot 2 + 2y = 12 \Rightarrow y = 3$ en dus het snijpunt $B(2, 3)$

Leerdoel 7 (Theorie B – pagina 156/157):

Voorbeeld:
Bereken exact de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn k: $3x + 2y = 12$.

Stap 3:
Bereken de afstand van punt A tot de lijn k.
Er geldt nu: $d(A, k) = d(A, B)$.

$d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(2-5)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 159/160):

Doel:

- ✓ Je kunt de vergelijking van een cirkel opstellen;
- ✓ Je kunt de vergelijking van een cirkel opstellen die een gegeven lijn raakt;
- ✓ Je kunt de vergelijking van een cirkel opstellen die door een gegeven punt gaat.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 41 t/m 44

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 159/160):

De afstand van het middelpunt $M(a, b)$ van de cirkel en een punt A op de cirkel is gelijk aan:

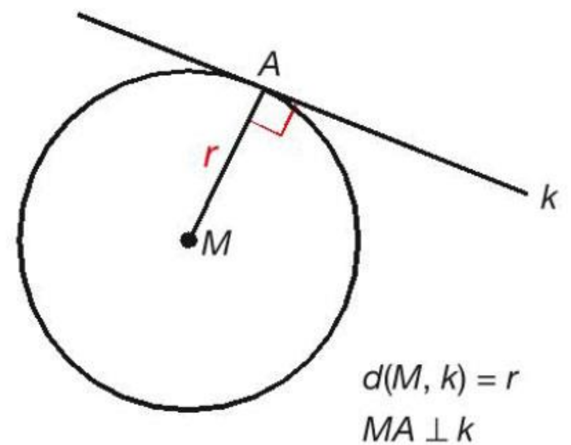
$$d(A,M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Algemeen:

Een vergelijking van de cirkel kan op de volgende manier geschreven worden:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Dit is een cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r.



Stelling van raaklijn aan cirkel:

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Voorbeeld 1:

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 12$ is de vergelijking van de cirkel met middelpunt (-3, 4) en straal $\sqrt{12}$.

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 159/160):

Voorbeeld 2:
Stel een vergelijking op van de cirkel *c* met middelpunt (3, 4) die de lijn
k: $y = \frac{1}{2}x$ raakt.

Stap 1:
Stel de vergelijking op van de lijn *l* door *M* en loodrecht op *k*.

Vanwege loodrecht geldt er: $l{:}y = -2x + b$

Invullen van $M(3, 4)$ geeft
$-2 \cdot 3 + b = 4$
$-6 + b = 4$
$b = 10$

$l{:}y = -2x + 10$

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 159/160):

Voorbeeld 2:
Stel een vergelijking op van de cirkel *c* met middelpunt (3, 4) die de lijn
k: $y = ½x$ raakt.

Stap 2:
Bereken het snijpunt *A* van de lijnen *k* en *l*.

Vanwege loodrecht geldt er: l:$y = -2x + b$

$-2x + 10 = ½x$
$-2½x = -10$
$x = 4$

Invullen in k: $y = ½x$ geeft $y = 2$

Het snijpunt van *k* en *l* is het raakpunt $A(4, 2)$.

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 159/160):

Voorbeeld 2:

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt (3, 4) die de lijn k: $y = ½x$ raakt.

Stap 3:

Stel de vergelijking van de cirkel op.

Er geldt: c: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$

De straal van de cirkel is gelijk aan:

$$r = d(M,k) = d(M,A) = \sqrt{(4-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

En dus: c: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 161/162):

Doel:

- ✓ Je kunt als de vergelijking van een cirkel gegeven is in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, de straal en de coördinaten van het middelpunt berekenen. Hierbij maak je gebruik van kwadraatafsplitsen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 46

Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 161/162):

Voorbeeld 1:
$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 12$ is de vergelijking van de cirkel met middelpunt $(-3, 4)$ en straal $\sqrt{12}$.

Deze vergelijking kan ook als volgt geschreven worden:
$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 12$
$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 12$
$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 13 = 0$

Als je $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 13 = 0$ wilt schrijven als $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 12$ gaat dit met behulp van **kwadraatafsplitsen**.

Voorbeeld 2:
Splits het kwadraat af van: $x^2 + 4x + 11$

$x^2 + 4x + 11 =$
$(x + 2)^2 - 4 + 11 =$ Splits het kwadraat af
$(x + 2)^2 + 7$

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 162/163):

Doel:

- ✓ Je kunt berekenen of een gegeven punt binnen, buiten of op de cirkel ligt;
- ✓ Je kunt de afstand berekenen tussen een punt en de cirkel.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 48 t/m 51

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 162/163):

Voorbeeld 1:
Onderzoek met een berekening of het punt $A(2, 4)$ op, binnen of buiten de cirkel c: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0$ ligt.

Stap 1:
Herschrijf de gegeven vergelijking van de cirkel.

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 21 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 21 = 0$
$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 13$

De cirkel heeft middelpunt $M(5, 3)$ en $r = \sqrt{13}$.

Stap 2:
Bereken de afstand van het middelpunt M tot het punt A.

$$d(M, A) = \sqrt{(2-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 162/163):

Voorbeeld 1:

Onderzoek met een berekening of het punt $A(2, 4)$ op, binnen of buiten de cirkel c: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0$ ligt.

Stap 3:

$\sqrt{10} < \sqrt{13}$.

Hieruit volgt dat het punt A binnen de cirkel ligt.

Algemeen:

Als $d(M, A) = r$ dan ligt A op de cirkel.

Als $d(M, A) < r$ dan ligt A binnen de cirkel.

Als $d(M, A) > r$ dan ligt A buiten de cirkel.

Voorbeeld 2:

Bereken de afstand tussen het punt A en de cirkel

$d(M, A) = \sqrt{10}$

$d(M, \text{c}) = r = \sqrt{13}$

$d(A, c) = d(M, \text{c}) - d(M, A) = \sqrt{13} - \sqrt{10}$

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 164/165):

Doel:

- ✓ Je kunt als de parametervoorstelling van een cirkel gegeven is de cirkelvergelijking opstellen;
- ✓ Je kunt als de cirkelvergelijking is gegeven de parametervoorstelling van een cirkel opstellen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 53 t/m 56

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 164/165):

Voorbeeld 1:
Gegeven is de volgende **parametervoorstelling van een cirkel**:

$x = 3 + 2\cos(t) \wedge y = 4 + 2\sin(t)$

Stel de vergelijking op van de bijbehorende cirkel in de vorm:
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$x = 3 + 2\cos(t) \wedge y = 4 + 2\sin(t)$
$x - 3 = 2\cos(t) \wedge y - 4 = 2\sin(t)$
$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (2\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2$
$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t)$
$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4(\cos^2(t) + \sin^2(t))$
$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4 \cdot 1$
$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$

Algemeen:
De grafiek bij de parametervoorstelling
$x = a + r\cos(t) \wedge y = b + r\sin(t)$ is de cirkel $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 164/165):

Voorbeeld 2:

Het punt P doorloopt de cirkel c: $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$

Het punt Q is het midden van het lijnstuk AP, waarbij $A(6, 0)$.

Op welke kromme ligt Q?

Een parametervoorstelling van c is:

$x = -4 + 3\cos(t) \wedge y = 2 + 3\sin(t)$

Het midden van Q van $P(-4 + 3\cos(t), 2 + 3\sin(t))$ en $A(6, 0)$ is:

$$Q\left(\frac{-4+3\cos(t)+6}{2}, \frac{2+3\sin(t)+0}{2}\right) =$$

$$Q(1+1\tfrac{1}{2}\cos(t), 1+1\tfrac{1}{2}\sin(t))$$

Hieruit volgt dat het punt Q op de volgende cirkel ligt: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2\frac{1}{4}$

Leerdoel 12 (Theorie A – pagina 167):

Doel:

- ✓ Je kunt de vergelijking van een raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c opstellen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 58 t/m 61

Leerdoel 12 (Theorie A – pagina 167):

Voorbeeld:
Het punt $A(2, 3)$ ligt op de cirkel c: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$
Stel de vergelijking op van de lijn k die c raakt in A.

Stap 1:
Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn l door M en A.

$M(3, 1)$ is het middelpunt van c.

$$rc_l = \frac{3-1}{2-3} = -2$$

Stap 2:
Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn k.

Omdat de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan geldt: $rc_k = \frac{1}{2}$

Leerdoel 12 (Theorie A – pagina 167):

Voorbeeld:

Het punt $A(2, 3)$ ligt op de cirkel c: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$
Stel de vergelijking op van de lijn k die c raakt in A.

Stap 3:

Stel de vergelijking van lijn k op.

$k{:}y = \frac{1}{2}x + b$

Invullen van $A(2, 3)$ geeft:

$\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 3$
$1 + b = 3$
$b = 2$

Dus: $k{:}y = \frac{1}{2}x + 2$

Leerdoel 13 (Theorie B – pagina 169/170):

Doel:

- ✓ Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn *k* met een cirkel *c* berekenen;
- ✓ Je kunt berekenen voor welke waarden van *a* en *b* de lijn $y = ax + b$ twee, één of nul snijpunten heeft met een cirkel *c*.

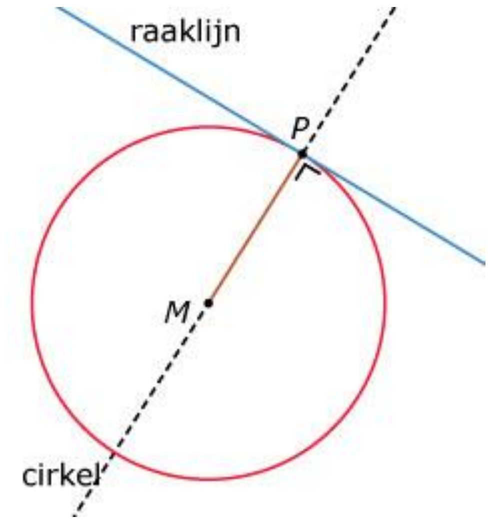
Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 63 t/m 68

Leerdoel 13 (Theorie B – pagina 169/170):

Een raaklijn aan een cirkel heeft één punt gemeen-
schappelijk met deze cirkel.



De tweedegraadsvergelijking die ontstaat, heeft dus één oplossing. De discriminant van deze vergelijking zal dus nul zijn. Dit is de **discriminant-methode.**

Voorbeeld 1 (Oplossen via discriminant-methode)

Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 = 10$. Zoek de vergelijkingen van de raaklijnen aan de cirkel met richtingscoëfficiënt 3.

De vergelijking van de cirkel is: $x^2 + y^2 = 10$

De vergelijking van de raaklijn is: $k : y = 3x + b$

Substitutie van de vergelijking van de raaklijn in die van de cirkel geeft:

$x^2 + (3x + b)^2 = 10$

Leerdoel 12 (Theorie B – pagina 169/170):

Voorbeeld 1:
Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 = 10$. Zoek de vergelijkingen van de raaklijnen aan de cirkel met richtingscoëfficiënt 3.

$x^2 + (3x + b)^2 = 10$
$x^2 + 9x^2 + 6bx + b^2 = 10$
$10x^2 + 6bx + b^2 - 10 = 0$ met $D = 0$

$D = (6b)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 10)$
$= 36b^2 - 40b^2 + 400$
$= -4b^2 + 400$

$-4b^2 + 400 = 0$
$b^2 = 100$
$b = 10 \vee b = -10$

Hieruit volgt: $k_1 : y = 3x + 10$ of $k_2 : y = 3x - 10$.

Leerdoel 12 (Theorie B – pagina 169/170):

Algemeen:
Ontstaat na substitutie van $y = ax + b$ in de cirkelvergelijking een tweedegraads-Vergelijking waarvan de discriminant:

1) groter is dan nul, dan zijn er twee snijpunten;
2) kleiner is dan nul, dan zijn er geen snijpunten;
3) gelijk is aan nul, dan raakt de lijn de cirkel.