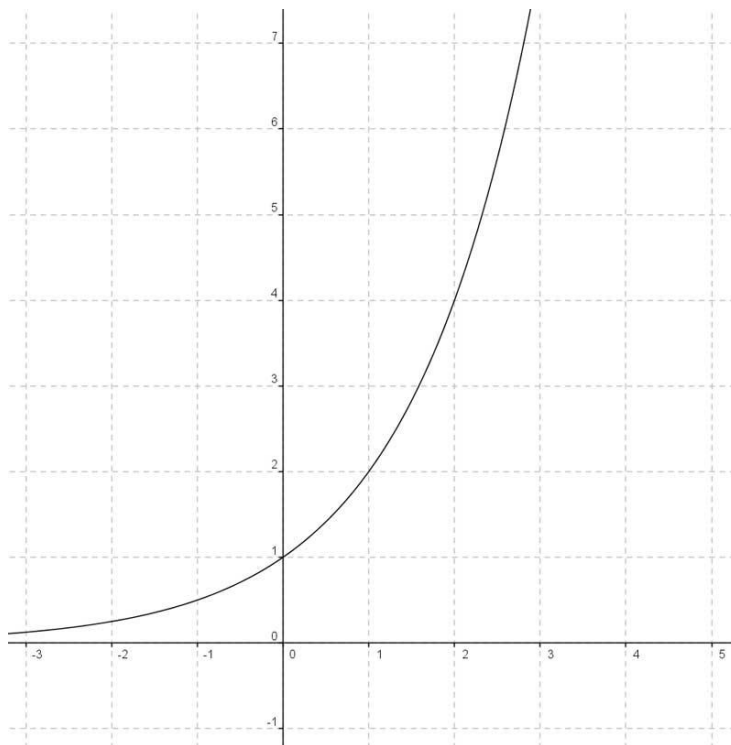
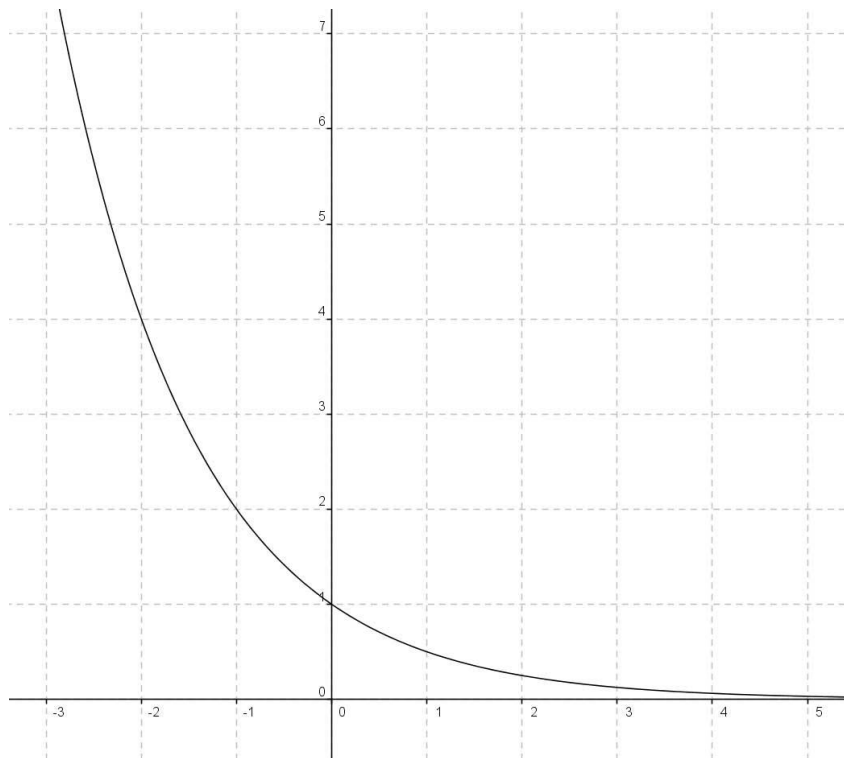


Voorkennis



- In de grafiek is de **exponentiële standaardfunctie** $f(x) = 2^x$ getekend;
- $D_f = \mathbb{R}$, $B_f = (0, \rightarrow)$ met de x-as als asymptoot (Dit volgt uit: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$);
- Elke functie g^x met $g > 1$ heeft deze vorm;
- Voor $g > 1$ is $\lim_{x \rightarrow -\infty} g^x = 0$

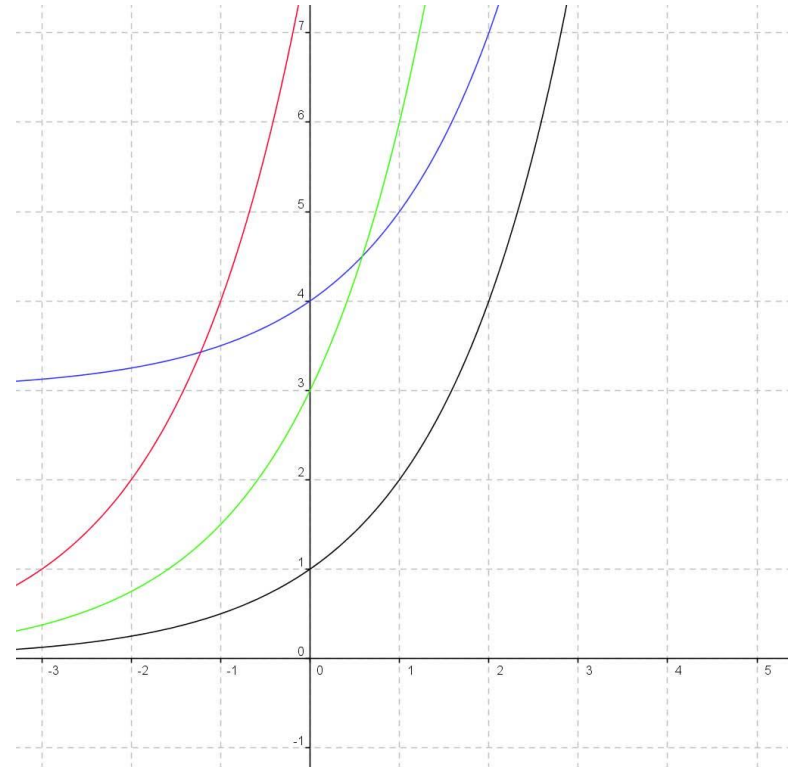
Voorkennis



- In de grafiek is de **exponentiële standaardfunctie** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ getekend;
- $D_f = \mathbb{R}$, $B_f = (0, \rightarrow)$ met de x-as als asymptoot. (Dit volgt uit: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$);
- Elke functie g^x met $0 < g < 1$ heeft deze vorm;
- Voor $0 < g < 1$ is $\lim_{x \rightarrow \infty} g^x = 0$

Voorkennis

- De zwarte grafiek is $f(x) = 2^x$
- De blauwe grafiek is $g(x) = 2^x + 3$
dus een translatie $(0,3)$ van $f(x)$.
De horizontale asymptoot is $y = 3$
met bereik $B_f = (3, \rightarrow)$
- De rode grafiek is $h(x) = 2^{x+3}$
dus een translatie $(-3,0)$ van $f(x)$.
De horizontale asymptoot is $y = 0$
met bereik $B_f = (0, \rightarrow)$
- De groene grafiek is $k(x) = 3 \cdot 2^x$
dus een verm. t.o.v. de x-as met 3 van $f(x)$.
De horizontale asymptoot is $y = 0$
met bereik $B_f = (0, \rightarrow)$



Voorkennis

Voorbeeld 1:

Gegeven is functie $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 1$

Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq 1$?

Stap 1:

Stel de formule van de horizontale asymptoot op:

$$f(1) = 0,5$$

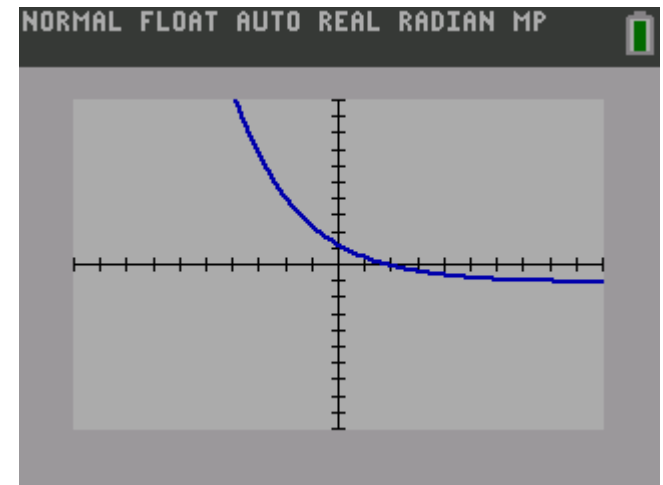
Er geldt: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 1 \right) = 0 - 1 = -1$

Dit geeft de **horizontale asymptoot $y = -1$**

Stap 2:

Lees het antwoord af uit een plot van de functie op je GR en let hierbij op de horizontale asymptoot.

$$\text{Voor } x \geq 1 \text{ geldt } -1 < f(x) \leq 0,5$$



Voorkennis

Voorbeeld 2:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 7 = 55$$

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 48$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$$

$$(2^{-1})^x = 2^4$$

$$2^{-x} = 2^4$$

$$-x = 4$$

$$x = -4$$

Zorg dat alle “losse getallen” rechts komen te staan.

Zorg dat links alleen nog maar een macht staat.

Schrijf de vergelijking in de vorm $g^A = g^B$

Je kunt de grondtallen nu “wegstrepen”

Voorkennis

Voorbeeld 3:

$$4^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}$$

$$(2^2)^{x-1} = (2^{-1})^{3x-1}$$

$$2^{2x-2} = 2^{-3x+1}$$

$$2x - 2 = -3x + 1$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5}$$

Zorg dat links en rechts hetzelfde grondtal komt te staan.

Gebruik de rekenregels voor machten

Je kunt de grondtallen nu “wegstrepen”

Voorkennis

Voorbeeld 4:

$$2^{x+2} - 2^x = 24$$

$$2^x \cdot 2^2 - 2^x = 24$$

$$4 \cdot 2^x - 2^x = 24$$

$$3 \cdot 2^x = 24$$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

Zorg dat er links slechts één macht komt te staan.
Gebruik hierbij de rekenregels voor machten.

Zorg dat links alleen nog maar een macht staat.

Schrijf de vergelijking in de vorm $g^A = g^B$

Je kunt de grondtallen nu “wegstrepen”

Voorkennis

Voorbeeld 5:

De hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel. Op tijdstip $t = 5$ zijn er 2.000 bacteriën. Op tijdstip $t = 12$ zijn er 7.000 bacteriën.

Stel de formule op van het aantal bacteriën N om t uur.

Stap 1:

Bij een exponentieel verband hoort de formule:

$N = b \cdot g^t$ met $b = \text{beginhoeveelheid}$ en $t = \text{tijd}$

Stap 2:

Bereken de groeifactor van $t = 5$ tot $t = 12$ ($g_{7\text{uur}}$)

$$g_{7\text{uur}} = \frac{N_{12}}{N_5} = \frac{7.000}{2.000} = 3,5$$

Voorkennis

Voorbeeld 5:

Stap 3:

Bereken de groeifactor per uur (g):

$$g = (g_{7\text{uur}})^{\frac{1}{7}} = (3,5)^{\frac{1}{7}} = 1,195... \quad \Rightarrow N = b \cdot 1,195...^t$$

Stap 4:

Bereken de beginhoeveelheid:

$$N = b \cdot 1,195...^t$$

$$7.000 = b \cdot 1,195...^{12}$$

$$7.000 = b \cdot 8,56....$$

$$b \approx 817 \quad \Rightarrow N = 817 \cdot 1,20^t$$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 11):

Doel:

- Je kent de definitie van een logaritme;
- Je kunt $^g\log(a)$ berekenen zonder GR als dit een exacte uitkomst heeft;

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 2 en 3

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 11):

We hebben de functie $f(x) = 2^x$

De oplossing van de vergelijking $f(x) = 8$ is 3.

Bestaat er nu een functie $g(x)$ zodat geldt: $g(8) = 3$?

Ja, en dit is de functie: $g(x) = {}^2\log(x)$.

De oplossing van de vergelijking $g(8) = {}^2\log(8) = 3$.

Of in woorden: Tot welke macht moet je 2 verheffen om 8 te krijgen.

Er geldt dus:

Uit $2^x = 8$ volgt ${}^2\log(8) = x$

Hieruit valt af te leiden: ${}^2\log(8) = {}^2\log(2^x) = x$

De macht en de logaritme “vallen als het ware tegen elkaar weg”.

In het algemeen geldt:

Uit $g^x \log(y) = x$ volgt $y = g^x$

Hieruit valt af te leiden: $g^x \log(y) = g^x \log(g^x) = x$

Leerdoel 1 (Theorie A – pagina 11):

Voorbeeld:

$${}^2\log\left(\frac{1}{16} \cdot 2\sqrt{2}\right) =$$

$${}^2\log\left(\frac{1}{2^4} \cdot 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$${}^2\log(2^{-4} \cdot 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) =$$

$${}^2\log(2^{-2\frac{1}{2}}) =$$

$$-2\frac{1}{2}$$

Schrijf de getallen in $\log(\dots)$ als een 2^{de} macht.

Tot welke macht moet je 2 verheffen om $2^{-2,5}$ te krijgen?

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 12):

Doel:

Je kunt logaritmische vergelijkingen van de vorm $^g\log(A) = b$, waarbij A lineair is exact of algebraïsch oplossen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 4 t/m 7

Leerdoel 2 (Theorie B – pagina 12):

Voorbeeld:

$$1 + 2 \cdot {}^5\log(x) = 7$$

$$2 \cdot {}^5\log(x) = 6$$

$${}^5\log(x) = 3$$

$$x = 5^3$$

$$x = 125$$

Zorg dat alle “losse getallen” rechts komen te staan.

Zorg dat links alleen nog maar een logaritme staat.

Gebruik de regel: Uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 13/14):

Doel:

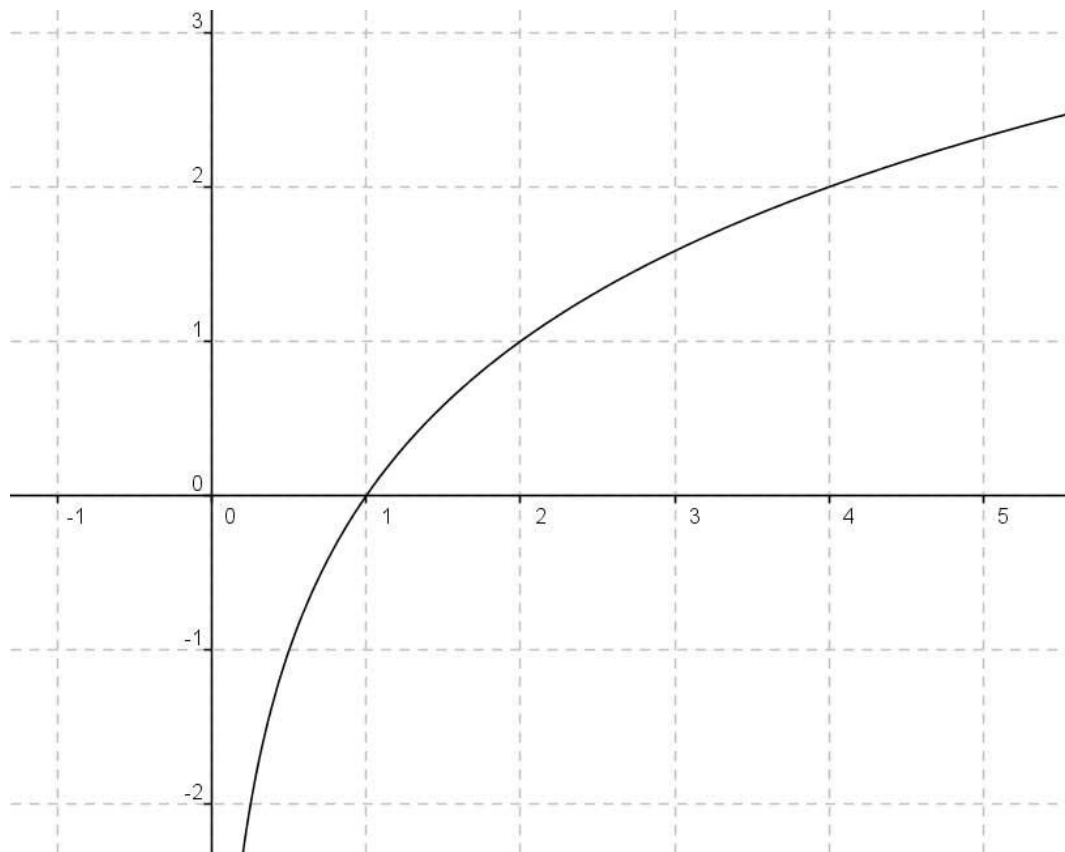
- Je kent het verband tussen een exponentiele en een logaritmische functie;
- Je kunt de grafiek van een logaritmische functie tekenen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

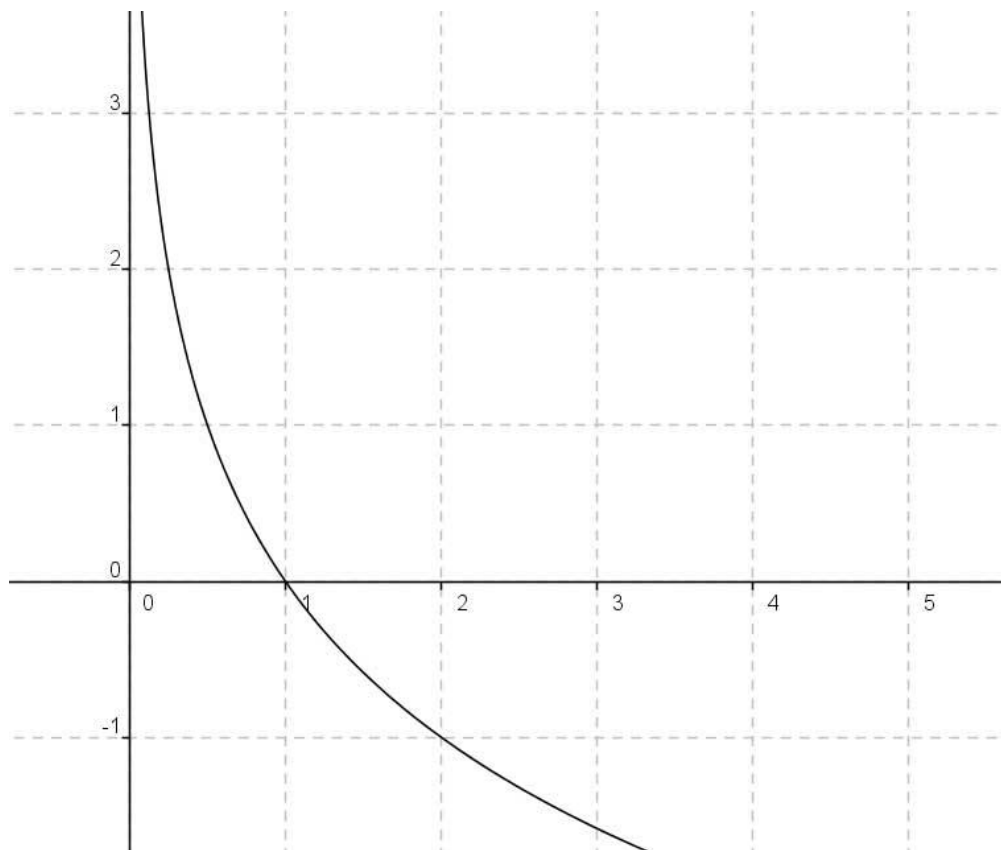
Opgave 8 en 9

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 13/14):



- In de grafiek is de functie $f(x) = {}^2\log(x)$ getekend;
- $D_f = (0, \rightarrow)$, $B_f = |R$ met de y -as als asymptoot;
- Elke functie ${}^g\log(x)$ met $g > 1$ heeft deze vorm.

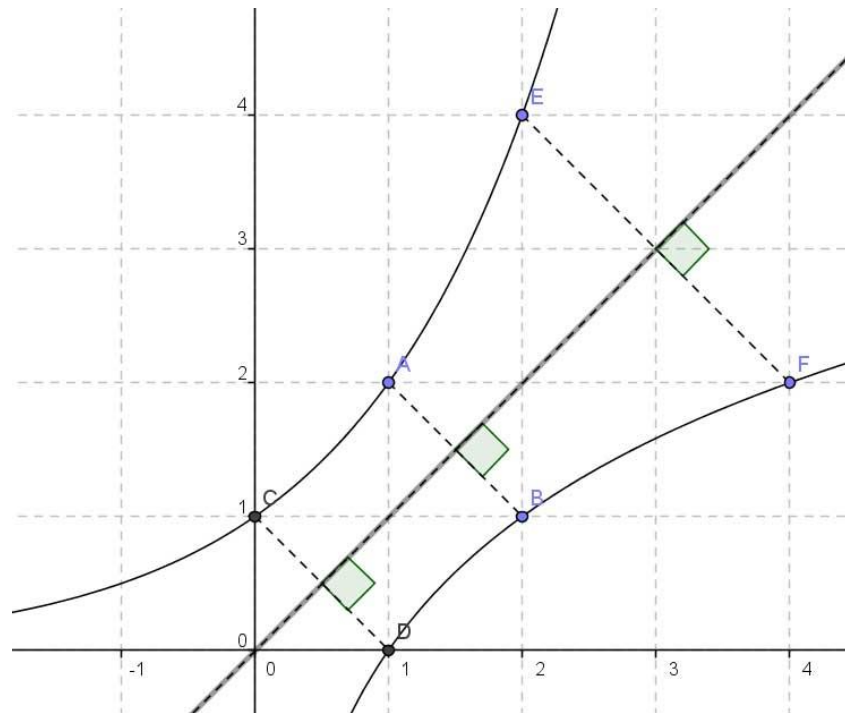
Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 13/14):



- In de grafiek is de functie $f(x) = \frac{1}{2}\log(x)$ getekend;
- $D_f = (0, \rightarrow)$, $B_f = \mathbb{R}$ met de y-as als asymptoot;
- Elke functie $g\log(x)$ met $0 < g < 1$ heeft deze vorm.

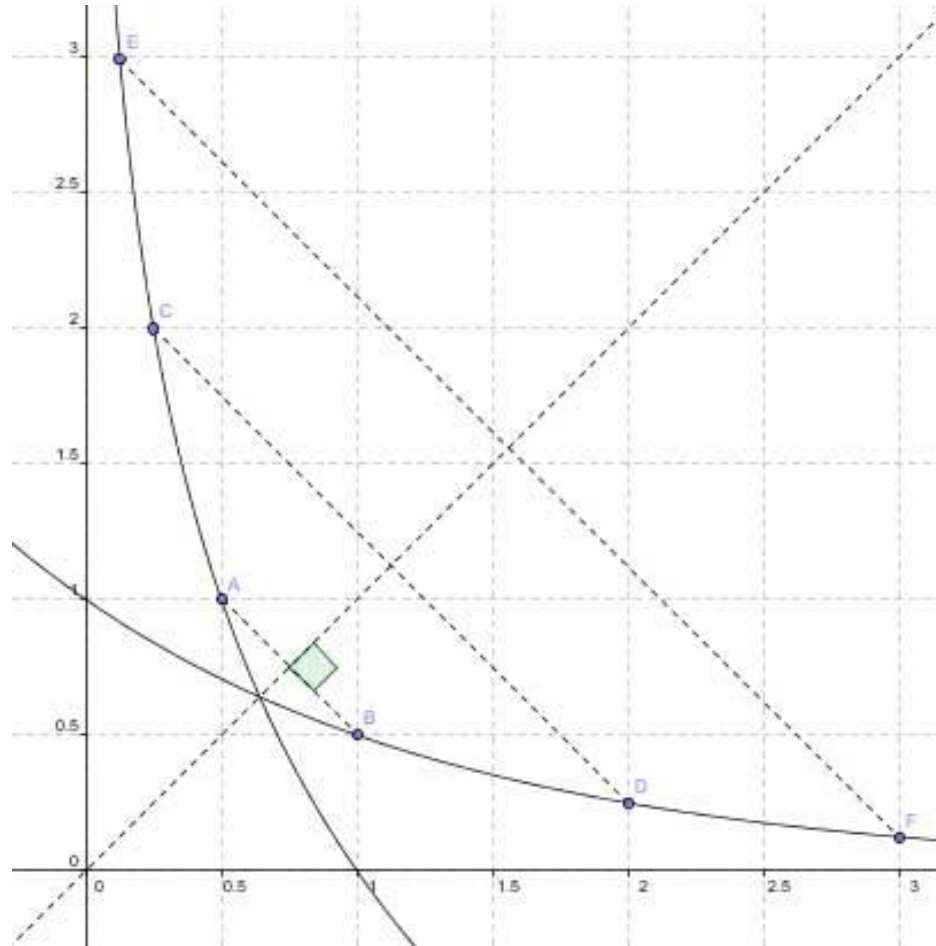
Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 13/14):

Herhaling: In het algemeen geldt: Uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$
Er bestaat dus een verband tussen een machtsfunctie en een logaritmische functie.



De grafieken van $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$ spiegelen in de lijn $y = x$.
We noemen f en g nu **inverse functies**.

Leerdoel 3 (Theorie C – pagina 13/14):



De grafieken van $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $g(x) = \frac{1}{2} \log(x)$ spiegelen in de lijn $y = x$.
We noemen f en g nu **inverse functies**.

Leerdoel 4 (Theorie D – pagina 15):

Doel:

Je kunt een logaritme met een ander grondtal dan 10 omschrijven naar een uitdrukking met logaritmes die het grondtal 10 hebben:

$${}_g \log(a) = \frac{{}_p \log(a)}{{}_p \log(g)} \left(= \frac{{}_{10} \log(a)}{{}_{10} \log(g)} \right)$$

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 11

Leerdoel 4 (Theorie D – pagina 15):

Berekenen van logaritme met de GR:

Maak gebruik van de regel: ${}_g \log(a) = \frac{{}_p \log(a)}{{}_p \log(g)} \left(= \frac{{}_{10} \log(a)}{{}_{10} \log(g)} \right)$

De log-toets op de GR heeft als grondtal 10. Voor het (nieuwe) grondtal p wordt in dit geval dus 10 genomen.

Voorbeeld:

$${}_2 \log(5) = \frac{\log(5)}{\log(2)} \approx 2,32$$

Leerdoel 5 (Theorie E – pagina 15):

Doel:

- Je kunt de grafiek van $\log(ax + b)$ tekenen;
- Je kunt algebraïsch berekenen wanneer de functie $\log(ax + b)$ kleiner (of gelijk) respectievelijk groter (of gelijk) aan een bepaalde waarde is.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 13 t/m 15

Leerdoel 5 (Theorie E – pagina 15):

Voorbeeld 1:

Teken de grafiek van $f(x) = 2 + {}^3\log(3x-4)$

Stap 1:

Bereken het domein van de functie $f(x)$

$$3x - 4 > 0$$

$$3x > 4$$

$$x > 1\frac{1}{3}$$

Dus $D_f = (1\frac{1}{3}, \rightarrow)$. De verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{1}{3}$

Herhaling: In het algemeen geldt: Uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$

g^y is per definitie groter dan 0, dus hieruit volgt dat de term die bij ${}^g\log(x)$ tussen de haakjes staat ook groter dan 0 moet zijn.

Leerdoel 5 (Theorie E – pagina 15):

Voorbeeld 1:

Teken de grafiek van $f(x) = 2 + {}^3\log(3x-4)$

Stap 2:

Maak een tabel (op de GR) met een aantal waarden van $f(x)$.

x	2	3	4	5
y	2,63	3,47	3,89	4,18

Stap 3:

Teken de grafiek van $f(x)$ met de waarden uit. Geef de verticale asymptoot weer met een stippellijn

Leerdoel 5 (Theorie E – pagina 15):

Voorbeeld 2:

Los algebraïsch op: $f(x) = 2 + {}^3\log(3x-4) \leq 0$

Stap 1:

Los de vergelijking $f(x) = 0$ op.

$$2 + {}^3\log(3x - 4) = 0$$

(losse getallen naar rechts)

$${}^3\log(3x - 4) = -2$$

(${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$ toepassen)

$$3^{-2} = 3x - 4$$

$$3x - 4 = \frac{1}{9}$$

$$3x = 4\frac{1}{9}$$

$$x = 1\frac{10}{27}$$

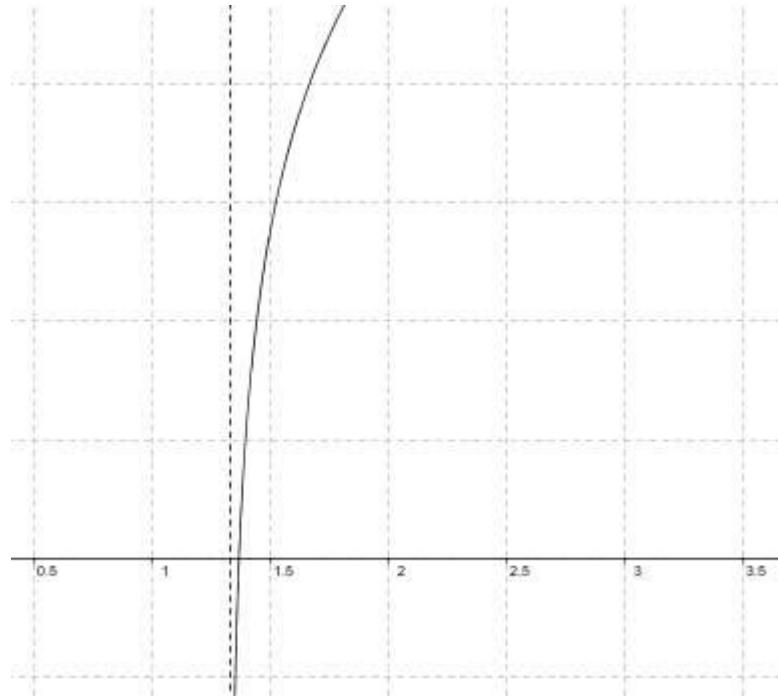
Leerdoel 5 (Theorie E – pagina 15):

Voorbeeld 2:

Los algebraïsch op: $f(x) = 2 + {}^3\log(3x-4) \leq 0$

Stap 2:

Maak een schets.



Stap 3:

De oplossing is nu: $1\frac{1}{3} < x \leq 1\frac{10}{27}$ (Let op het bestaan van de asymptoot)

Leerdoel 6 (Theorie F – pagina 18):

Doel:

Je kunt vergelijkingen van de vorm $a^x = c$ exact oplossen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 17 en 18

Leerdoel 6 (Theorie F – pagina 18):

Voorbeeld 1:

Bereken exact: $3^{x+1} = 80$

$$3^{x+1} = 80$$

$$x + 1 = {}^3\log(80)$$

$$x = -1 + {}^3\log(80)$$

Voorbeeld 2:

Bereken exact: $5 + 2^{3x} = 25$

$$5 + 2^{3x} = 25$$

$$2^{3x} = 20$$

$$3x = {}^2\log(20)$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(20)$$

Leerdoel 7 (Theorie G – pagina 19):

Doel:

Je kunt bij een gegeven exponentiele functie de variabele vrijmaken. Hierdoor ontstaat dan een logaritmische functie.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 20 en 21

Leerdoel 7 (Theorie G – pagina 19):

Voorbeeld:

Maak x vrij bij de formule $y = 40 + 10^{0,5x + 1,8}$

$$y = 40 + 10^{0,5x + 1,8}$$

$$40 + 10^{0,5x + 1,8} = y$$

$$10^{0,5x + 1,8} = y - 40$$

$$0,5x + 1,8 = \log(y - 40)$$

$$0,5x = -1,8 + \log(y - 40)$$

$$x = -3,6 + 2 \cdot \log(y - 40)$$

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 21):

Doel:

Je kunt logaritmen herleiden met behulp van de volgende rekenregels:

$$(1) \quad {}^g\log(ab) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$$

$$(2) \quad {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right) = {}^g\log(a) - {}^g\log(b)$$

$$(3) \quad {}^g\log(a^n) = n \cdot {}^g\log(a)$$

$$(4) \quad a = {}^g\log(g^a)$$

$$(5) \quad {}^g\log(x) = y \text{ volgt } x = g^y$$

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 23 t/m 26

Leerdoel 8 (Theorie A – pagina 21):

Voor logaritmen gelden de volgende rekenregels (met $g > 0, g \neq 1, a$ en $b > 0$)

$$(1) \quad {}^g\log(ab) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$$

$$(2) \quad {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right) = {}^g\log(a) - {}^g\log(b)$$

$$(3) \quad {}^g\log(a^n) = n \cdot {}^g\log(a)$$

$$(4) \quad a = {}^g\log(g^a)$$

$$(5) \quad {}^g\log(x) = y \text{ volgt } x = g^y$$

Voorbeeld:

$${}^2\log(6) + 3 \cdot {}^2\log(5) + 4 =$$

$${}^2\log(6) + {}^2\log(5^3) + 4 =$$

$${}^2\log(6) + {}^2\log(5^3) + {}^2\log(2^4) =$$

$${}^2\log(6) + {}^2\log(125) + {}^2\log(16) =$$

$${}^2\log(6 \cdot 25 \cdot 16) = {}^2\log(12000)$$

$$(3) \quad {}^g\log(a^n) = n \cdot {}^g\log(a)$$

$$(4) \quad a = {}^g\log(g^a)$$

$$(1) \quad {}^g\log(ab) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$$

Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 22/23):

Doel:

Je kunt vergelijkingen van de vorm ${}^s\log(A) = {}^s\log(B)$ oplossen met behulp van de rekenregels uit leerdoel 8. A en B zijn hierbij lineair.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 28, 30, 32, 33

Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 22/23):

Voor logaritmen gelden de volgende rekenregels:

$$(1) \quad {}^g \log(ab) = {}^g \log(a) + {}^g \log(b)$$

$$(2) \quad {}^g \log\left(\frac{a}{b}\right) = {}^g \log(a) - {}^g \log(b)$$

$$(3) \quad {}^g \log(a^n) = n \cdot {}^g \log(a)$$

$$(4) \quad a = {}^g \log(g^a)$$

$$(5) \quad {}^g \log(x) = y \text{ volgt } x = g^y$$

Voorbeeld 1:

$${}^3 \log(x-2) = 1 + 4 \cdot {}^3 \log(2)$$

$${}^3 \log(x-2) = {}^3 \log(3^1) + {}^3 \log(2^4)$$

$${}^3 \log(x-2) = {}^3 \log(3) + {}^3 \log(16)$$

$${}^3 \log(x-2) = {}^3 \log(48)$$

$$x-2 = 48$$

$$x = 50$$

voldoet

$$(3) + (4)$$

$$(1)$$

Je mag de logaritmen nu “wegstrepen”

Controleer altijd de oplossingen

Leerdoel 9 (Theorie B – pagina 22/23):

Voor logaritmen gelden de volgende rekenregels:

$$(1) \quad {}^g \log(ab) = {}^g \log(a) + {}^g \log(b)$$

$$(2) \quad {}^g \log\left(\frac{a}{b}\right) = {}^g \log(a) - {}^g \log(b)$$

$$(3) \quad {}^g \log(a^n) = n \cdot {}^g \log(a)$$

$$(4) \quad a = {}^g \log(g^a)$$

$$(5) \quad {}^g \log(x) = y \text{ volgt } x = g^y$$

Voorbeeld 2:

$$1 + 2 \cdot {}^2 \log(x) = {}^2 \log(5x + 3)$$

$${}^2 \log(2) + {}^2 \log(x^2) = {}^2 \log(5x + 3)$$

$${}^2 \log(2x^2) = {}^2 \log(5x + 3)$$

$$2x^2 = 5x + 3$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{49}}{4} \vee x = \frac{5 + \sqrt{49}}{4}$$

$$x = -0,5(\text{voldoet niet}) \vee x = 3(\text{voldoet})$$

$$(3) + (4)$$

$$(1)$$

Je mag de logaritmen nu “wegstrepen”

Controleer altijd de oplossing(en)

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 24/25):

Doel:

Je kunt vergelijkingen van de vorm ${}_g\log(A) = {}_g\log(B)$ oplossen met behulp van de rekenregels uit leerdoel 8 en de hieronder gegeven rekenregels. A en B zijn hierbij lineair.

$$1) \quad {}_g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$$

$$2) \quad {}_g\log(a) = \frac{{}_p\log(a)}{{}_p\log(g)}$$

$$3) \quad \frac{1}{g}\log(a) = -{}_g\log(a)$$

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 28, 30, 32, 33

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 24/25):

Extra rekenregels voor logaritmen:

$$1) \quad {}^g \log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$$

$$2) \quad {}^g \log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)} = \frac{\frac{\log(a)}{\log(p)}}{\frac{\log(g)}{\log(p)}} = \frac{{}^p \log(a)}{{}^p \log(g)}$$

$$3) \quad \frac{1}{g} \log(a) = \frac{{}^g \log(a)}{{}^g \log\left(\frac{1}{g}\right)} = \frac{{}^g \log(a)}{{}^g \log(g^{-1})} = \frac{{}^g \log(a)}{-1} = -{}^g \log(a)$$

Leerdoel 10 (Theorie C – pagina 24/25):

Voorbeeld:

$${}^4\log(x) = {}^2\log(x-2)$$

$$\frac{{}^2\log(x)}{{}^2\log(4)} = {}^2\log(x-2)$$

$$\frac{{}^2\log(x)}{2} = {}^2\log(x-2)$$

$${}^2\log(x) = 2 \cdot {}^2\log(x-2)$$

$${}^2\log(x) = {}^2\log((x-2)^2)$$

$$x = (x-2)^2$$

$$x = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x-1 = 0 \text{ of } x-4 = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 4$$

gebruik ${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$

Kruiselings vermenigvuldigen

gebruik ${}^g\log(a^n) = n \cdot {}^g\log(a)$

Alleen $x = 4$ voldoet

($x = 1$ leidt tot het nemen van de logaritme van een negatief getal)

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 26):

Doel:

Je kunt vergelijkingen met een logaritme of een macht oplossen met behulp van de substitutiemethode.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 36 t/m 39

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 26):

Voorbeeld 1:

$${}^3\log^2(x) - {}^3\log(x) = 0$$

$$p^2 - p = 0$$

$$p(p - 1) = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p - 1 = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p = 1$$

$${}^3\log(x) = 0 \text{ of } {}^3\log(x) = 1$$

$$x = 3^0 \text{ of } x = 3^1$$

$$x = 1 \text{ of } x = 3$$

$$\text{Neem } {}^3\log(x) = p$$

Beide oplossingen voldoen

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 26):

Voorbeeld 2:

$$2^x = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$$

$$2^x = 6 \cdot \frac{1}{2^x} + 1$$

$$p = 6 \cdot \frac{1}{p} + 1$$

$$p^2 = 6 + p$$

$$p^2 - p - 6 = 0$$

$$(p+2)(p-3) = 0$$

$$p+2=0 \text{ of } p-3=0$$

$$p=-2 \text{ of } p=3$$

$$2^x = -2 \text{ of } 2^x = 3$$

$$k.n. \quad x = {}^2\log(3)$$

Vervang 2^x door p

Vermenigvuldig alle termen met p

Gebruik: ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$

Leerdoel 11 (Theorie D – pagina 26):

Voorbeeld 3:

$$4^x - 2^x + 42$$

$$(2^2)^x = 2^x + 42$$

$$(2^x)^2 = 2^x + 42$$

$$p^2 = p + 42$$

$$p^2 - p - 42 = 0$$

$$(p + 6)(p - 7) = 0$$

$$p + 6 = 0 \text{ of } p - 7 = 0$$

$$p = -6 \text{ of } p = 7$$

$$2^x = -6 \text{ of } 2^x = 7$$

$$k.n. \quad \text{of } x = {}^2\log(7)$$

Vervang 2^x door p

Gebruik: ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$

Leerdoel 12 (Theorie A – pagina 28):

Doel:

- ✓ Je weet dat de verdubbelingstijd de tijd is die bij exponentiële groei nodig is om een hoeveelheid zich te laten verdubbelen;
- ✓ Je weet dat de halveringstijd de tijd is die bij een exponentiële afname nodig is om een hoeveelheid zich te laten halveren;
- ✓ Je kunt de verdubbelingstijd/halveringstijd berekenen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 41 t/m 45

Leerdoel 12 (Theorie A – pagina 28):

Voorbeeld:

De bevolking van een stad groeit jaarlijks met 5%. Bereken hoeveel jaar het duurt voordat de bevolking verdubbeld is. Dit is de **verdubbelingstijd**.

Stap 1:

Bereken de groeifactor per jaar: $g = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$

Stap 2:

Stel de exponentiële formule op: $N = 1,05^t$

Stap 3:

Los de vergelijking $1,05^t = 2$ **algebraïsch** op:

$$1,05^t = 2$$

$$t = {}^{1,05}\log(2)$$

$$t = \log(2)/\log(1,05)$$

$$t \approx 14,2 \text{ jaar}$$

$$({}^g\log(x) = y \text{ volgt } x = g^y)$$

$$\left[{}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)} \left(= \frac{{}^{10}\log(a)}{{}^{10}\log(p)} \right) \right]$$

Let op: Bij een halveringstijd ($0 < g < 1$) los je $g^t = 0,5$ op

Leerdoel 13 (Theorie B/C – pagina 30-32):

Doel:

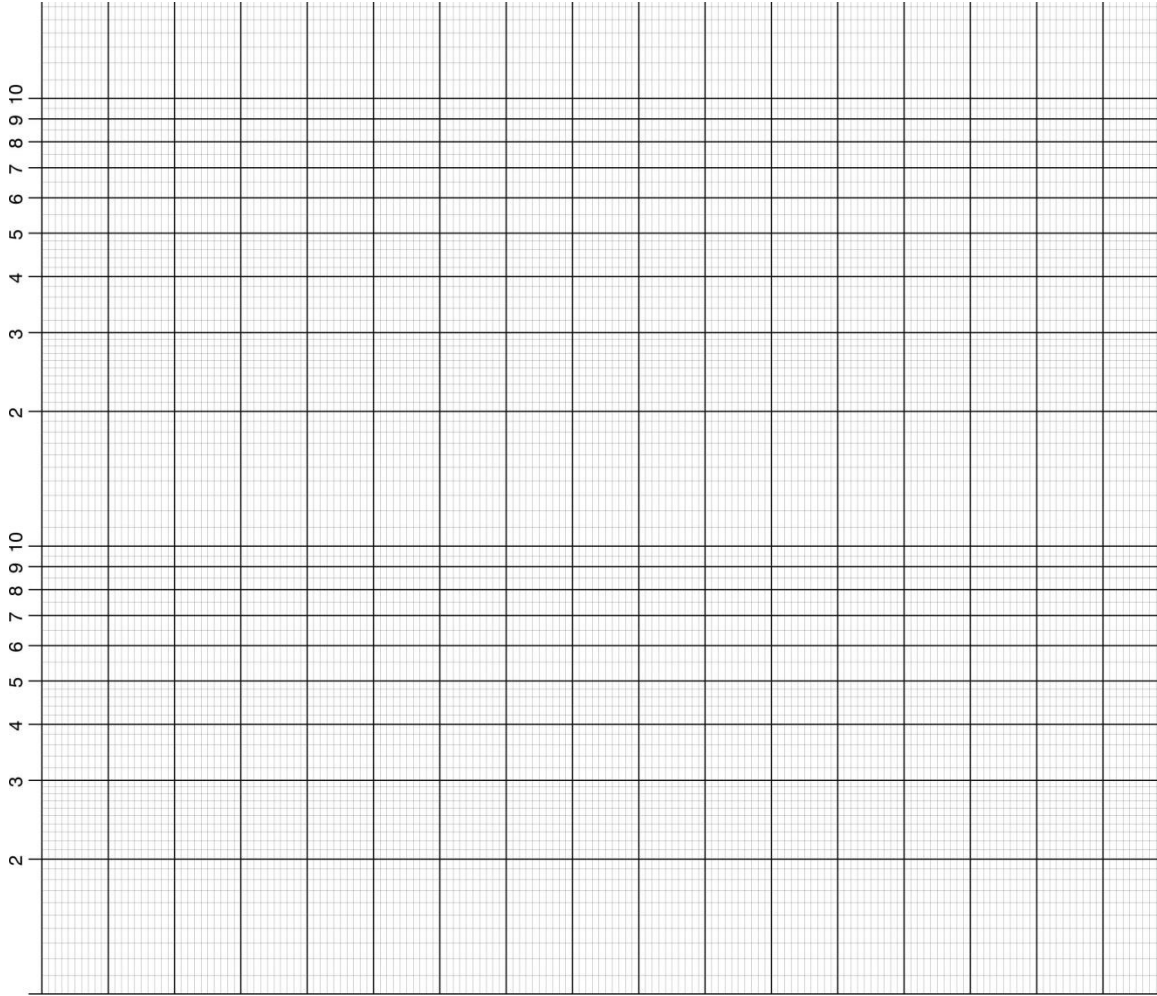
- ✓ Je weet wat een logaritmische schaalverdeling is;
- ✓ Je kunt een “normaal” getal omrekenen naar een logaritme en omgekeerd;
- ✓ Je weet wat logaritmisch papier is;
- ✓ Je kunt punten tekenen op logaritmisch papier.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 47-49

Leerdoel 13 (Theorie B/C – pagina 30-32):



- Logaritmisch papier; is papier met een **logaritmische schaalverdeling**;
- De afstand van 1 tot 10 is even groot als de afstand van 10 tot 100;
- Van 10 tot 20 staan er 10 horizontale lijnen;
- Van 20 tot 30 staan er 10 horizontale lijnen;
- Van 30 tot 40 staan er 5 horizontale lijnen;
- Van 40 tot 50 staan er 5 horizontale lijnen;
- Van 50 tot 60 staan er 2 horizontale lijnen;

Leerdoel 14 (Theorie D – pagina 33/34):

Doel:

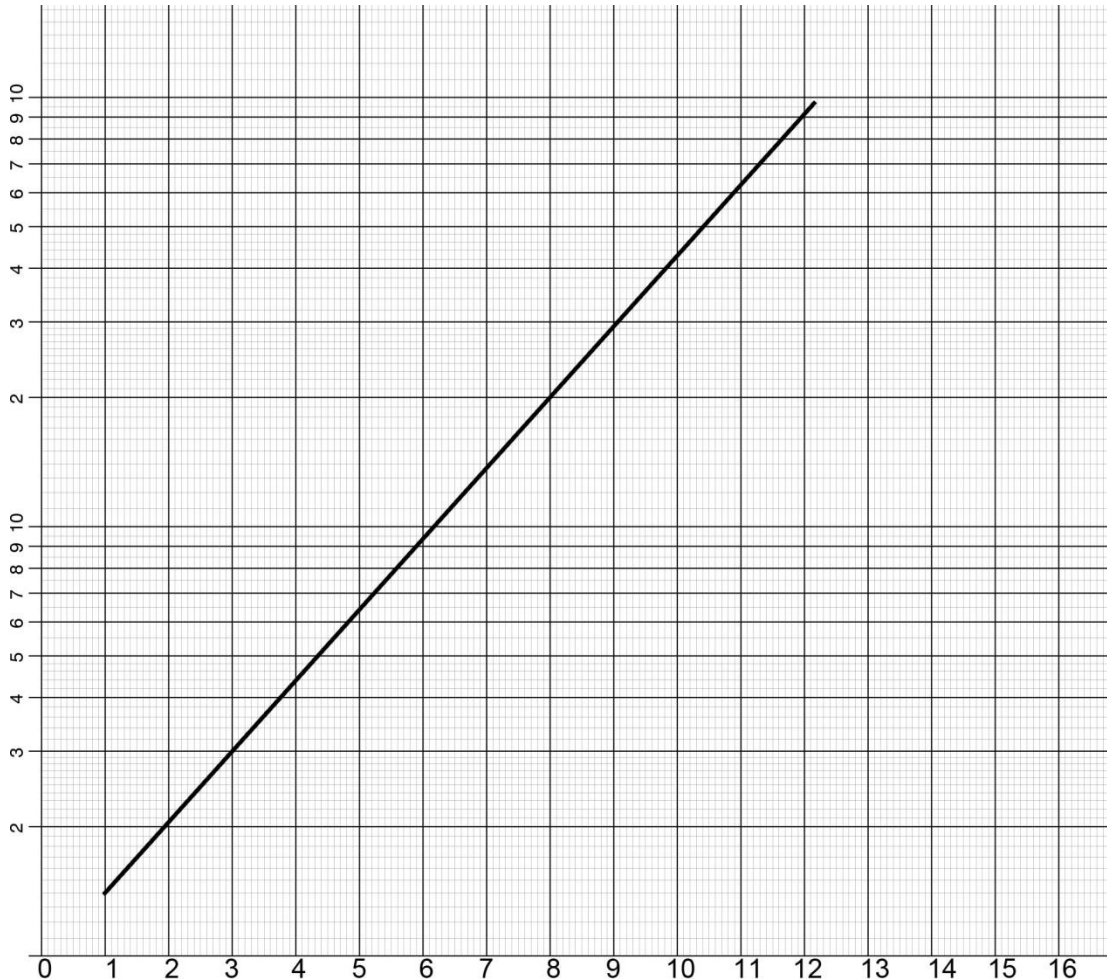
- ✓ Je weet dat bij een rechte lijn op logaritmisch papier exponentiële groei hoort;
- ✓ Je kunt bij een rechte lijn op logaritmisch papier door middel van het aflezen van punten de bijbehorende formule opstellen.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 51, 52

Leerdoel 14 (Theorie D – pagina 33/34):



- Een exponentiële functie wordt op logaritmisch papier een rechte lijn.

Voorbeeld:

Stel de formule op van N als functie van t .

Stap 1:

Lees twee punten af die op de lijn liggen

$$t = 2 \text{ met } N = 2$$

$$t = 8 \text{ met } N = 20$$

Leerdoel 14 (Theorie D – pagina 33/34):

Stap 1:

Lees twee punten af die op de lijn liggen:

$$t = 2 \text{ met } N = 2 \quad \text{EN} \quad t = 8 \text{ met } N = 20$$

Stap 2:

Bereken de groeifactor tussen deze twee tijdstippen: $g_6 = \frac{20}{2} = 10$

Stap 3:

Bereken de groeifactor per tijdseenheid: $g = 10^{\frac{1}{6}} \approx 1,467...$

Stap 4:

Bereken nu de beginhoeveelheid b in de formule: $N = b \cdot 1,467...^t$

Vul hiervoor één van de twee punten op de lijn in:

$$2 = b \cdot 1,467...^2$$

$$2 = b \cdot 2,154...$$

$$b = 0,928...$$

$$\text{Dus } N = 0,93 \cdot 1,47^t$$

Leerdoel 15 (Theorie D – pagina 35/36):

Doel:

Je kunt de volgende transformaties toepassen op een exponentiële en logaritmische functie:

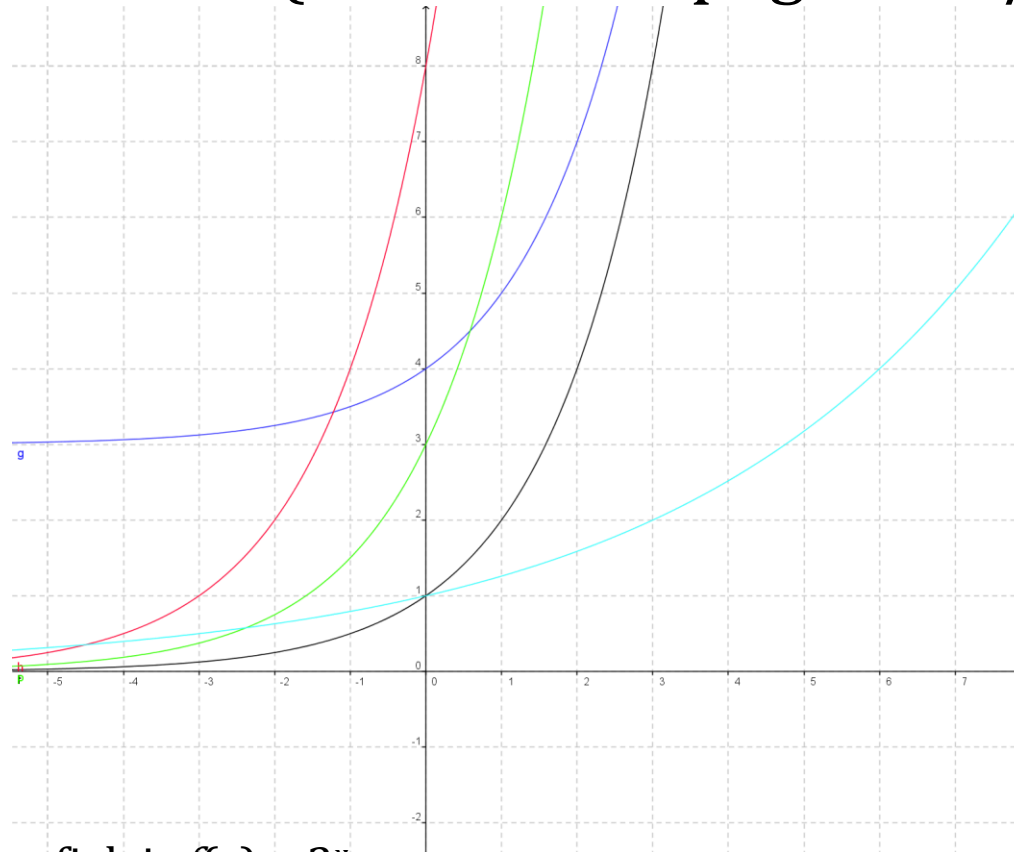
- ✓ Een horizontale of verticale translatie;
- ✓ Een vermenigvuldiging t.o.v. de x-as of de y-as.

Uitleg theorie

Oefenen met:

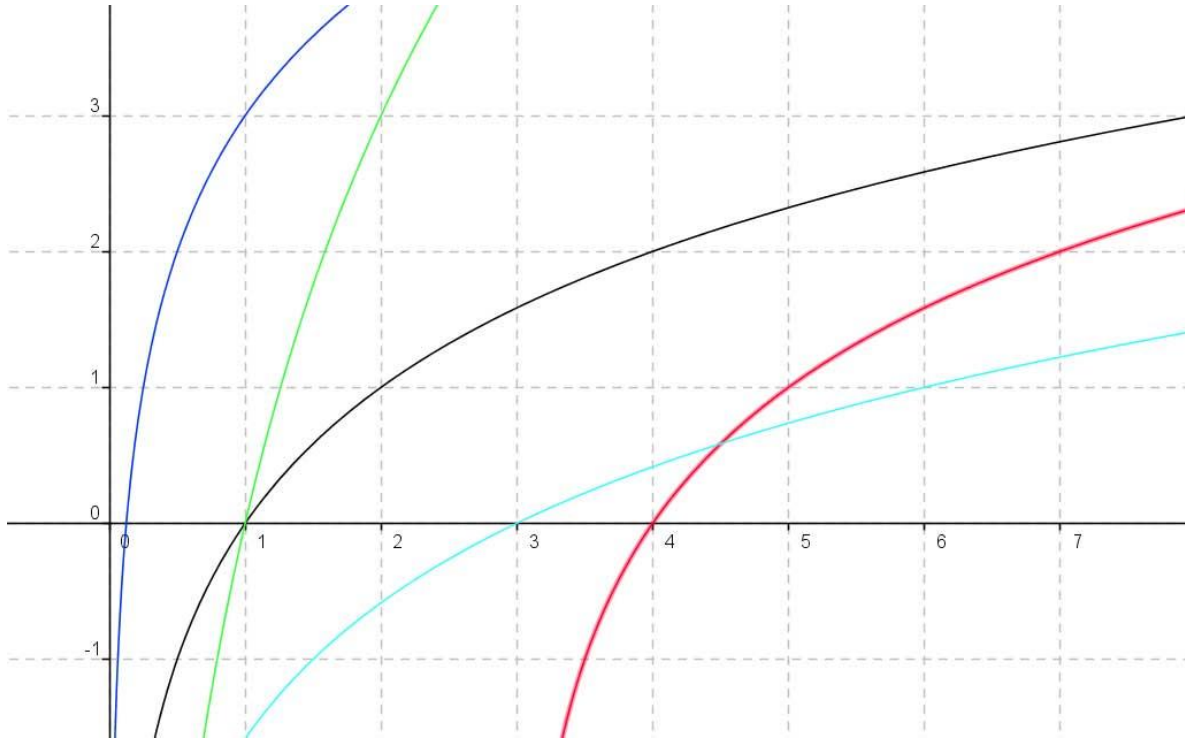
Opgave 55, 56

Leerdoel 15 (Theorie D – pagina 35/36):



- De zwarte grafiek is $f(x) = 2^x$
 - De donkerblauwe grafiek is $g(x) = 2^x + 3$ dus een translatie $(0,3)$ van $f(x)$
 - De groene grafiek is $h(x) = 3 \cdot 2^x$ dus een verm. t.o.v. de x-as met 3 van $f(x)$
 - De lichtblauwe grafiek is $j(x) = 2^{\frac{1}{3}x}$ dus een verm. t.o.v. de y-as met 3 van $f(x)$
 - De rode grafiek is $k(x) = 2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$
- [Hieruit volgt dat een translatie van $(-3, 0)$ van $f(x)$ gelijk is aan een verm. t.o.v. de x-as met 8 van $f(x)$]

Leerdoel 15 (Theorie D – pagina 35/36):



- De zwarte grafiek is $f(x) = {}^2\log(x)$
- De rode grafiek is $h(x) = {}^2\log(x-3)$ dus een translatie $(3,0)$ van $f(x)$
- De groene grafiek is $j(x) = 3 \cdot {}^2\log(x)$ dus een verm. t.o.v. de x-as met 3 van $f(x)$
- De lichtblauwe grafiek is $k(x) = {}^2\log(\frac{1}{3}x)$ dus een verm. t.o.v. de y-as met 3 van $f(x)$
- De donkerblauwe grafiek is $g(x) = {}^2\log(x) + 3 = {}^2\log(x) + {}^2\log(2^3) = {}^2\log(8x)$
[Hieruit volgt dat een translatie van $(0,3)$ van $f(x)$ hetzelfde is als een verm. t.o.v. de y-as met $\frac{1}{8}$ van $f(x)$]

Leerdoel 16 (Theorie A/B – pagina 38/39):

Doel:

- ✓ Je kent de afgeleide van de functie $f(x) = e^x$;
- ✓ Je kunt de rekenregels van machten ook toepassing bij het grondtal e.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 60-63

Leerdoel 16 (Theorie A/B – pagina 38/39):

Voorbeeld 1:

Bereken de afgeleide van $f(x) = a^x$.

We weten niet wat deze afgeleide is, daarom berekenen we deze afgeleide via een limiet.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1) \cdot a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h} \cdot a^x$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$$

$$f'(x) = f'(0) \cdot a^x$$

Let op:

Als het grondtal e (2,718...) is dan geldt: $f(x) = e^x$ en $f'(x) = e^x$

Willem-Jan van der Zanden



Leerdoel 16 (Theorie A/B – pagina 38/39):

Rekenregels voor de e-macht:

$$e^p \cdot e^q = e^{p+q} \quad [1] \quad \frac{e^p}{e^q} = e^{p-q} \quad [2]$$

$$(e^p)^q = e^{pq} \quad [3] \quad (ae)^p = a^p e^p \quad [4]$$

$$e^0 = 1 \quad [5] \quad e^{-n} = \frac{1}{e^n} \quad [6]$$

$$e^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{e} \quad [7] \quad e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p} \quad [8]$$

Let op:

Dit zijn dezelfde rekenregels voor machten zoals je eerder geleerd hebt.

Leerdoel 16 (Theorie A/B – pagina 38/39):

Voorbeeld 1:

Herleid: $(e^{2x} + 3)^2$

$$\begin{aligned}(e^{2x} + 3)^2 &= \\(e^{2x})^2 + 2 \cdot 3 \cdot e^{2x} + 3^2 &= \\e^{4x} + 6e^{2x} + 9\end{aligned}$$

Voorbeeld 2:

Los algebraïsch op: $e^{2x} + 2e^x = 3$

$$e^{2x} + 2e^x = 3$$

$$(e^x)^2 + 2e^x - 3 = 0$$

$$p^2 + 2p - 3 = 0$$

$$(p - 1)(p + 3) = 0$$

$$p = 1 \text{ of } p = -3$$

$$e^x = 1 \text{ of } e^x = -3$$

$$e^x = e^0 \text{ geen oplossing}$$

$$x = 0$$

Neem $e^x = p$

Leerdoel 17 (Theorie C – pagina 42/43):

Doel:

- ✓ Je kunt functies met e-machten differentiëren en daarbij gebruik maken van de tot nu toe bekende rekenregels voor differentiëren.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 60-63

Leerdoel 17 (Theorie C – pagina 42/43):

Herhaling rekenregels voor differentiëren:

$$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x) \quad (\text{som - regel})$$

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (\text{product - regel})$$

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \Rightarrow q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2} \quad (\text{quotiënt - regel})$$

Voorbeeld 1:

$$f(x) = 5e^x - \frac{1}{x^3} = 5e^x - x^{-3}$$

$$f'(x) = 5e^x + 3x^{-4} = 5e^x + \frac{3}{x^4}$$

Leerdoel 17 (Theorie C – pagina 42/43):

Voorbeeld 2:

$$g(x) = (3x^2 + 3)e^x - 3e^x$$

$$g'(x) = [3x^2 + 3]' \cdot e^x + (3x^2 + 3)e^x \cdot [e^x]' - [3e^x]'$$

$$g'(x) = 6x \cdot e^x + (3x^2 + 3)e^x - 3e^x$$

$$g'(x) = (6x + 3x^2 + 3 - 3)e^x$$

$$g'(x) = (3x^2 + 6x)e^x$$

Voorbeeld 3:

$$h(x) = \frac{6x + 5}{e^x}$$

$$h'(x) = \frac{e^x \cdot [6x + 5]' - [e^x]' \cdot (6x + 5)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x \cdot 6 - e^x \cdot (6x + 5)}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (6 - 6x - 5)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{1 - 6x}{e^x}$$

Leerdoel 17 (Theorie C – pagina 42/43):

Voorbeeld 4 (Combinatie kettingregel en productregel):

$$f(x) = 2xe^{3x-6}$$

$$f'(x) = [2x]' \cdot e^{3x-6} + 2x \cdot [e^{3x-6}]' \quad [\text{productregel}]$$

$$[2x]' = 2 \text{ en } [e^{3x-6}]'$$

$$u(v) = e^v \text{ met } u'(v) = e^v.$$

$$v(x) = 3x - 6 \text{ met } v'(x) = 3 \quad [\text{kettingregel}]$$

$$[e^{3x-6}]' = u'(v) \cdot v'(x) = 3e^{3x-6}$$

$$f'(x) = [2x]' \cdot e^{3x-6} + 2x \cdot [e^{3x-6}]'$$

$$= 2 \cdot e^{3x-6} + 2x \cdot 3e^{3x-6}$$

$$= (6x + 2) \cdot e^{3x-6}$$

Leerdoel 17 (Theorie C – pagina 42/43):

Voorbeeld 5 (Combinatie kettingregel en quotiëntregel):

$$g(x) = \frac{e^{2x+1}}{x^2 + 6}$$

$$g'(x) = \frac{(x^2 + 6) \cdot [e^{2x+1}]' - [x^2 + 6]' \cdot e^{2x+1}}{(x^2 + 6)^2}$$

$$[x^2 + 6]' = 2x \quad \text{en} \quad [e^{2x+1}]'$$

$$u(v) = e^v \text{ met } u'(v) = e^v.$$

$$v(x) = 2x + 1 \text{ met } v'(x) = 2$$

$$[e^{2x+1}]' = u'(v) \cdot v'(x) = 2e^{2x+1}$$

$$g'(x) = \frac{(x^2 + 6) \cdot 2e^{2x+1} - 2x \cdot e^{2x+1}}{(x^2 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^2 - 2x + 12)e^{2x+1}}{(x^2 + 6)^2}$$

Leerdoel 18 (Theorie A – pagina 46/47):

Doel:

Je kunt de rekenregels van logaritmes ook toepassing bij het grondtal e .

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 72-77

Leerdoel 18 (Theorie A – pagina 46/47):

Definitie:

De natuurlijke logaritme is een logaritme met het grondtal e : ${}^e\log(a) = \ln(a)$

Voor natuurlijke logaritmen gelden de volgende rekenregels:

(1) $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$	(4) ${}^g\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)}$
(2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	(5) $a = \ln(e^a)$
(3) $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$	(6) $e^{\ln(a)} = a$

Alle berekeningen gaan verder op exact dezelfde manier zoals dat ook bij “normale” logaritmen het geval is.

Leerdoel 19 (Theorie B – pagina 48):

Doel:

- ✓ Je kent de afgeleide van een exponentiële functie;
- ✓ Je kunt exponentiële functies differentiëren waarbij gebruik gemaakt moet worden van de product-, som-, of kettingregel.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 78-79

Leerdoel 19 (Theorie B – pagina 48):

De afgeleide van $f(x) = a^x$ is $f'(x) = a^x \cdot \log(a) = a^x \cdot \ln(a)$

Voorbeeld 1:

$$f(x) = 4^{2x-1} = 4^u \text{ met } u = 2x - 1$$

$$f'(x) = 4^u \cdot \ln(4) \cdot u' = 4^u \cdot \ln(4) \cdot 2 = 2 \cdot 4^{2x-1} \cdot \ln(4)$$

Voorbeeld 2:

$$g(x) = x^2 \cdot 2^x$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= [x^2]' \cdot 2^x + x^2 \cdot [2^x]' \\ &= 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2) \\ &= 2^x (2x + \ln(2) \cdot x^2) \end{aligned}$$

Leerdoel 20 (Theorie C – pagina 49):

Doel:

- ✓ Je kent de afgeleide van een logaritmische functie (met grondtal e)
- ✓ Je kunt logaritmische functies differentiëren waarbij gebruik gemaakt moet worden van de product-, som-, of kettingregel.

Uitleg theorie

Oefenen met:

Opgave 81-86

Leerdoel 20 (Theorie C – pagina 49):

Afgeleiden van logaritmische functies:

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$[{}^2\log(x)]' = \frac{1}{x \ln(2)}$$

$$[{}^g\log(x)]' = \left[\frac{\ln(x)}{\ln(g)} \right]' = \left[\frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x) \right]' = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln(g)}$$

Voorbeeld 1:

$$f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot [\ln(x) + 1]' - [x]' \cdot (\ln(x) + 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln(x) - 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x) - 1}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$$

Voorbeeld 2:

$$g(x) = {}^3\log(x^2 + 1) = {}^3\log(u) \text{ met } u = x^2 + 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{u \cdot \ln(3)} \cdot u' = \frac{2x}{(x^2 + 1) \ln(3)}$$