

8.0 Voorkennis

Voorbeeld:

t	0	1	2	3	4
N	100	150	225	337,5	506,25

- De hoeveelheid N neemt per tijdseenheid met hetzelfde **percentage** toe.
- Bovenstaande tabel geeft de formule $N = 100 \cdot 1,5^t$ met 100 als beginwaarde en 1,5 als **groefactor** per tijdseenheid.
- Bij een gelijke procentuele afname per tijdseenheid is er ook exponentiële groei (ook **exponentiële afname** of **exponentieel verval** genoemd);
- Bij een groefactor groter dan 1 is de grafiek stijgend;
- Bij een groefactor tussen 0 en 1 is de grafiek dalend;
- Bij exponentiële groei is de formule altijd $N = b \cdot g^t$ met b als beginwaarde en g als groefactor per tijdseenheid.

8.0 Voorkennis

Voorbeeld:

$t \text{ (uur)}$	0	1	2	3	4
N	100	150	225	337,5	506,25

- De groeifactor per uur is 1,5 want:
 $N_1 = 1,5 \cdot N_0 = 1,5 \cdot 100 = 150$
- De groeifactor per twee uur is $1,5 \cdot 1,5 = 1,5^2$ want:
 $N_2 = 1,5^2 \cdot N_0 = 1,5^2 \cdot 100 = 225$
- De groeifactor per drie uur is $1,5 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = 1,5^3$ want:
 $N_3 = 1,5^3 \cdot N_0 = 1,5^3 \cdot 100 = 337,5$
- De groeifactor per t uur is nu dus $1,5^t$ want
 $N_t = 1,5^t \cdot N_0$

8.1 Recursieve en directe formules [1]

Voorbeeld 1:

8, 12, 16, 20, 24, ... is een **getallenrij**. De getallen in de rij zijn de **termen**.

8 is de eerste term (**startwaarde**, u_0)

12 is de tweede term (u_1)

24 is de vijfde term (u_4)

Elke term is 4 groter dan de voorafgaande term.

$$u_0 = 8$$

$$u_1 = u_0 + 4 (=12)$$

$$u_2 = u_1 + 4 (=16)$$

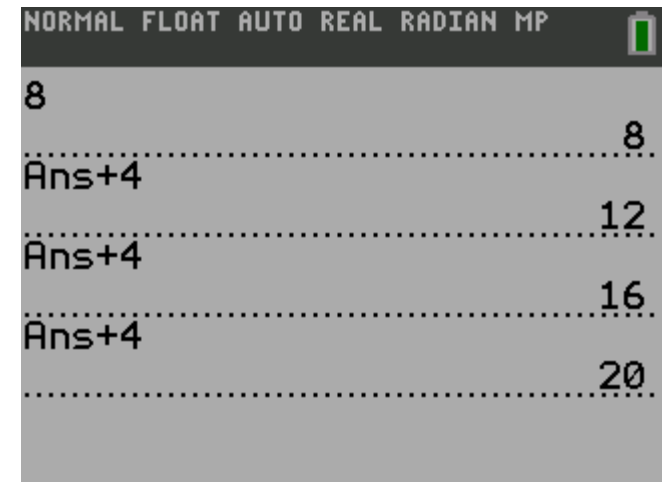
$$u_3 = u_2 + 4 (=20)$$

$$u_4 = u_3 + 4 (=24)$$

Algemeen: $u_n = u_{n-1} + 4$ met $u_0 = 8$
(**recursieve formule**)

Met de GR:

8 | ENTER | ANS + 4 | ENTER | ENTER |



NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP	
8	
Ans+4	8
Ans+4	12
Ans+4	16
Ans+4	20

8.1 Recursieve en directe formules [1]

8, 12, 16, 20, 24, ... is een getallenrij met een lineair verband, want het **verschil** tussen twee opeenvolgende termen (**v**) is **constant**.

$$u_0 (= 8)$$

$$u_1 = u_0 + v = (8 + 4 = 12)$$

$$u_2 = u_1 + v = u_0 + v + v = u_0 + 2v = (8 + 2 \cdot 4 = 16)$$

$$u_3 = u_2 + v = u_0 + 3v (= 8 + 3 \cdot 4 = 20)$$

$$u_4 = u_3 + v = u_0 + 4v (= 8 + 4 \cdot 4 = 24)$$

Algemeen:

$$u_n = u_0 + nv \text{ (direct)}$$

$$u_n = u_{n-1} + v \text{ met } u_0 = \text{getal (recursief)}$$

De directe formule bij deze getallenrij is nu:

$$u_n = 8 + 4n$$

De recursieve formule bij deze getallenrij is nu:

$$u_n = u_{n-1} + 4 \text{ met } u_0 = 8$$

8.1 Recursieve en directe formules [1]

Voorbeeld 3:

8, 12, 16, 20, 24, ...

De hoeveelste term is 388?

Directe formule = $8 + 4n$

Los op: $8 + 4n = 388$

$$4n = 380$$

$$n = 95$$

Dus $u_{95} = 388$, dus **de 96^{ste} term** is 388.

Let op:

De eerste term is u_0

De tweede term is u_1

De 96-ste term is u_{95}

8.1 Recursieve en directe formules [2]

Gegeven is de rij getallen: 64, 96, 144, 216, 324, ...

Elke term is te vinden door de voorgaande term te vermenigvuldigen met 1,5

Bij een getallenrij waarbij het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde getal is, hoort een exponentieel verband. Er is nu een **constante factor**.

$$u_0 (= 64)$$

$$u_1 = u_0 \cdot r (= 64 \cdot 1,5 = 96)$$

$$u_2 = u_1 \cdot r = u_0 \cdot r \cdot r = u_0 \cdot r^2 (= 64 \cdot 1,5^2 = 144)$$

$$u_3 = u_2 \cdot r = u_0 \cdot r^3 (= 64 \cdot 1,5^3 = 216)$$

$$u_4 = u_3 \cdot r = u_0 \cdot r^4 (= 64 \cdot 1,5^4 = 324)$$

De directe formule wordt nu: $u_n = 64 \cdot 1,5^n$

De recursieve formule wordt nu: $u_n = 1,5 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 64$

Algemeen:

$$u_n = u_0 \cdot r^n \text{ (directe formule)}$$

$$u_n = r \cdot u_{n-1} \text{ met } u_0 = \text{getal (recursieve formule)}$$

8.1 Recursieve en directe formules [2]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,75 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 10$.

Bereken de twaalfde term van de rij.

De directe formule is: $u_n = 10 \cdot 1,75^n$.

De twaalfde term is: $u_{11} = 10 \cdot 1,75^{11} \approx 4714$

Voorbeeld 2:

Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,75 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 10$.

Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 75.000$?

De directe formule is: $u_n = 10 \cdot 1,75^n$.

Invullen van de directe formule bij Y1 in de GR en aflezen uit de tabel geeft:

Y1 $\approx$ 44.215 bij X = 15

Y1 $\approx$ 77.376 bij X = 16

Vanaf de 17^{de} term geldt $u_n > 75.000$.

8.1 Recursieve en directe formules [3]

Voorbeeld:

Van een getallenrij met een constante factor is gegeven is $u_6 = 1.600$ en $u_{11} = 51.200$.

Stel de directe formule van u_n op.

$$u_6 \cdot r^5 = u_{11}.$$

Hieruit volgt: $r^5 = \frac{u_{11}}{u_6} = \frac{51.200}{1.600} = 32$

$$r^5 = 32 \text{ geeft } r = \sqrt[5]{32} = 2$$

De directe formule wordt nu:

$$u_n = u_0 \cdot r^n$$
$$u_n = u_0 \cdot 2^n$$

Invullen van $u_6 = 1.600$ geeft:

$$1.600 = u_0 \cdot 2^6$$
$$u_0 = \frac{1.600}{2^6} = 25$$

$$u_n = 25 \cdot 2^n$$

8.2 Getallenrijen gebruiken[1]

In plaats van als beginterm u_0 te gebruiken, kan ook u_1 als beginterm gebruikt worden

Algemeen:

Als de beginterm van de rij met een constant verschil u_0 is geldt:

$$u_n = u_0 + vn \text{ (direct)}$$

$$u_n = u_{n-1} + v \text{ met } u_0 = \text{getal (recursief)}$$

Als de beginterm van de rij met een constant verschil u_1 is geldt:

$$u_n = u_1 + v(n - 1) \text{ (direct)}$$

$$u_n = u_{n-1} + v \text{ met } u_1 = \text{getal (recursief)}$$

Als de beginterm van een rij met een constante factor u_0 is geldt:

$$u_n = u_0 \cdot r^n \text{ (direct)}$$

$$u_n = r \cdot u_{n-1} \text{ met } u_0 = \text{getal (recursief)}$$

Als de beginterm van een rij met een constante factor u_1 is geldt:

$$u_n = u_1 \cdot r^{n-1} \text{ (direct)}$$

$$u_n = r \cdot u_{n-1} \text{ met } u_1 = \text{getal (recursief)}$$

8.2 Getallenrijen gebruiken[1]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de rij $A(n) = A(n - 1) + 8$ met $A(1) = 75$

Schrijf de rij in de notatie $A(n + 1) = \dots$ op.

$$A(n + 1) = A(n) + 8 \text{ met } A(1) = 75.$$

Voorbeeld 2:

Gegeven is de rij $A(n) = A(n - 1) + 8$ met $A(1) = 75$

Stel de directe formule van de rij op.

$$A(n) = 75 + 8(n - 1) \text{ waarbij } A(1) \text{ genomen wordt als beginterm.}$$

Herleiden geeft

$$\begin{aligned} A(n) &= 75 + 8(n - 1) \\ &= 75 + 8n - 8 \\ &= 67 + 8n \end{aligned}$$

8.2 Getallenrijen gebruiken[2]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de getallenrij 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Dit is de **rij van Fibonacci**. Elke term is de som van de twee voorafgaande termen.

Algemeen: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ met $u_0 = 1$

Bereken de 12^{de} term van deze rij

Stap 1:

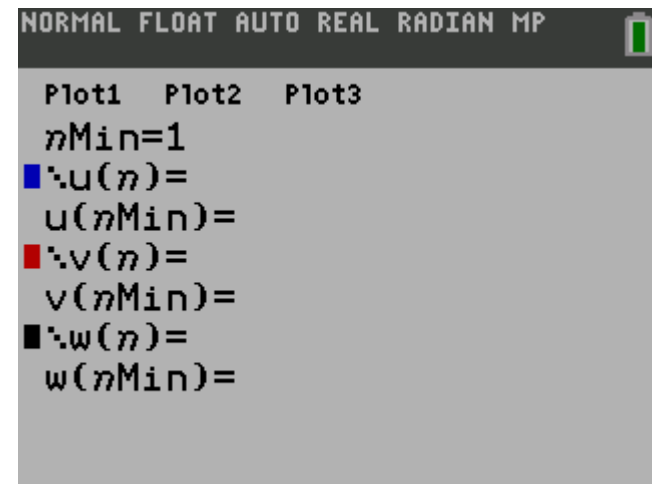
Zet eerst in het MODE menu de optie SEQ aan.



Stap 2:

Druk op de knop Y=

De indeling van het scherm is nu anders dan normaal.



8.2 Getallenrijen gebruiken[2]

Voorbeeld 1:

Bereken de 12^{de} term van deze rij

Stap 3:

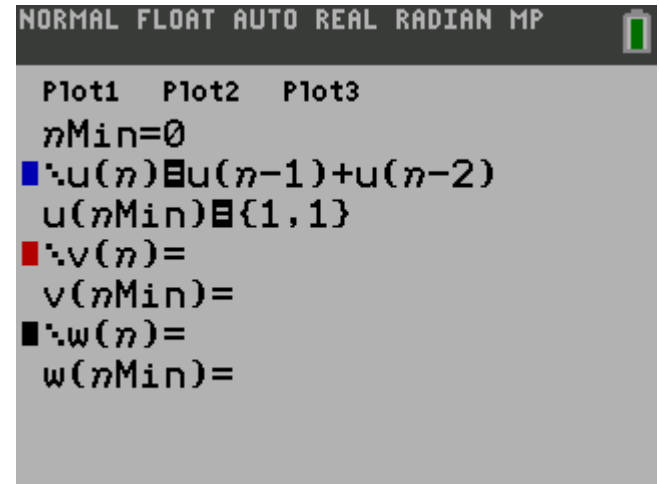
Vul nu het volgende in:

Bij $nMin$	0
Bij $u(n)$	$u(n-1) + u(n-2)$
Bij $u(nMin)$	{1, 1}

Op de GR krijg je:

u	via de toets 2ND 7
n	via de toets die je normaal gebruikt voor de variabele X
{	via de toets 2ND (
}	via de toets 2ND)

Je moet bij $u(nMin)$ de eerste twee termen invullen. **Vul eerst de tweede term in en dan de eerste.** Is maar één term nodig, dan hoeft je geen { } te gebruiken.

A TI-84 Plus calculator screen in sequence mode. The top status bar shows 'NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP' and a battery icon. The screen displays settings for three plots: Plot1, Plot2, and Plot3. For Plot1, 'nMin=0' is shown, followed by a blue cursor and the formula 'u(n)=u(n-1)+u(n-2)'. Below this, 'u(nMin)={1,1}' is entered. For Plot2, a red cursor is next to 'v(n)=', followed by 'v(nMin)='. For Plot3, a black cursor is next to 'w(n)=', followed by 'w(nMin)='.

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)+u(n-2)
u(nMin)={1,1}
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=
```

8.2 Getallenrijen gebruiken[2]

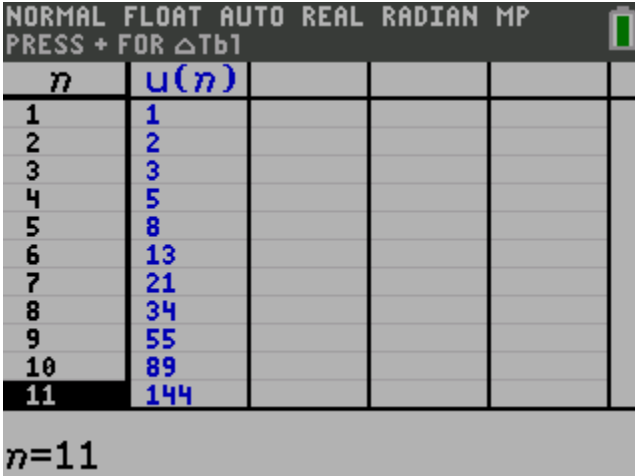
Voorbeeld 1:

Bereken de 12^{de} term van deze rij

Stap 4:

De uitkomst kun je vinden via 2ND | GRAPH

De 12^{de} term (u_{11}) heeft de waarde 144.



n	$u(n)$				
1	1				
2	2				
3	3				
4	5				
5	8				
6	13				
7	21				
8	34				
9	55				
10	89				
11	144				

$n=11$

Voorbeeld 2:

Vanaf welke term geldt bij de Rij van Fibonacci:

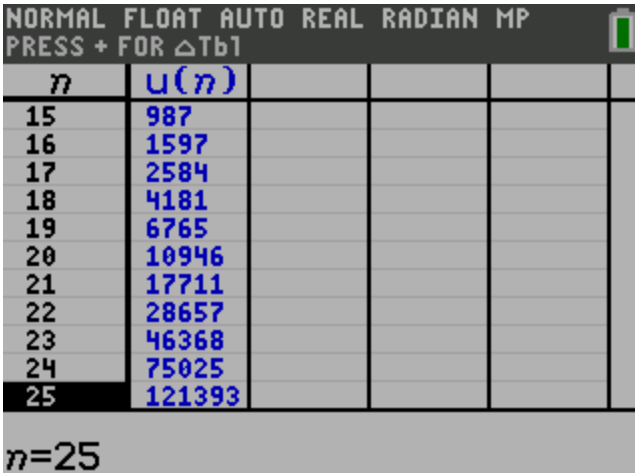
$u_n > 100.000$?

Uit de tabel volgt:

$u_{24} = 75.025$

$u_{25} = 121.393$

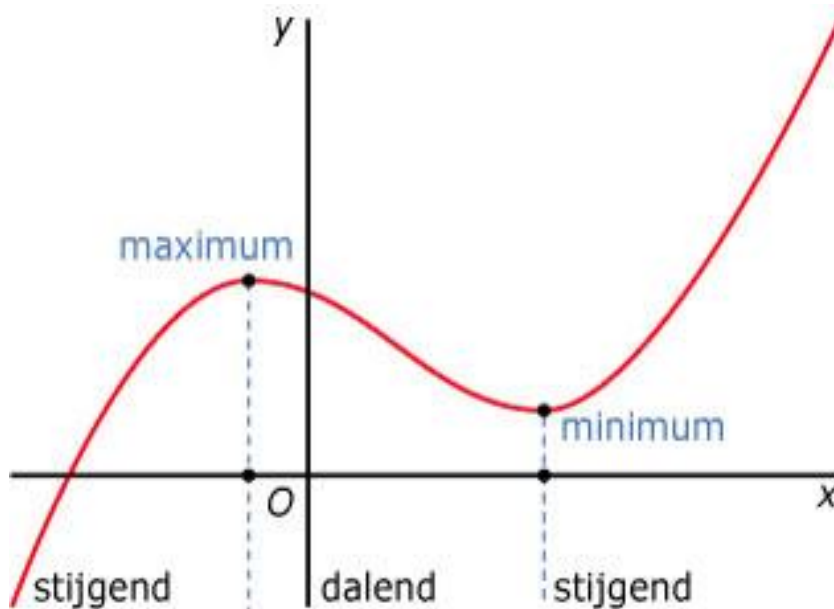
Vanaf de 26^{ste} term zijn er waarden groter dan 100.000.



n	$u(n)$				
15	987				
16	1597				
17	2584				
18	4181				
19	6765				
20	10946				
21	17711				
22	28657				
23	46368				
24	75025				
25	121393				

$n=25$

8.3 Gemiddelde veranderingen en hellingen [1]



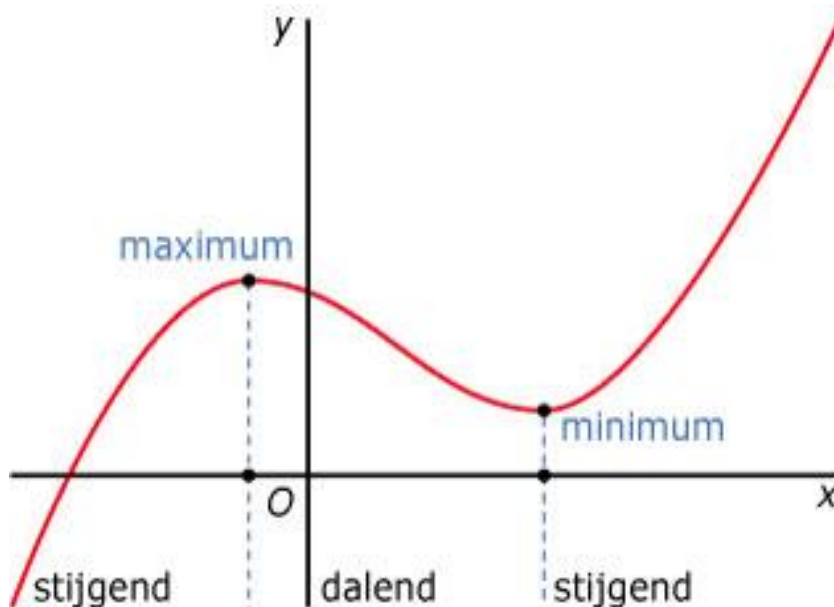
Voor de hiernaast getekende globale grafiek geldt:

- **Afnemend stijgend** tot het maximum;
- Na het maximum eerst **toenemend dalend**;
- Hierna **afnemend dalend** tot het minimum;
- Na het minimum **toenemend stijgend**.

Let op:

- Bij een extreme waarde is de functie noch stijgend noch dalend!!!
- De grafiek heeft een **plaatselijk maximum** en **plaatselijk minimum**;
- De grafiek heeft geen **absoluut maximum** en **absoluut minimum**.

8.3 Gemiddelde veranderingen en hellingen [1]



Let op:

$[2, 6]$ is een **gesloten interval**.

2 en 6 zitten in dit interval;

$(2, 6)$ is een **open interval**.

2 en 6 zitten **niet** in dit interval;

$(2, \rightarrow)$ is een **open interval**.

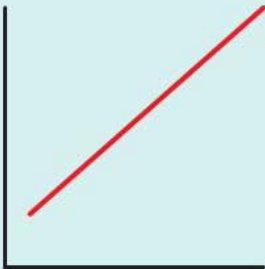
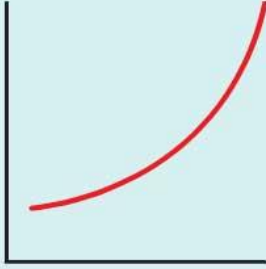
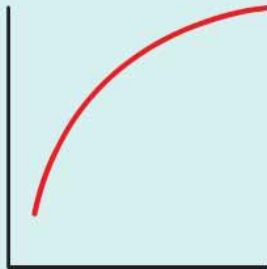
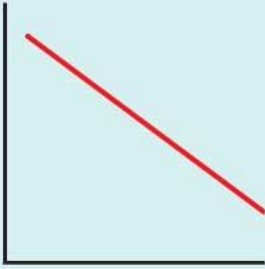
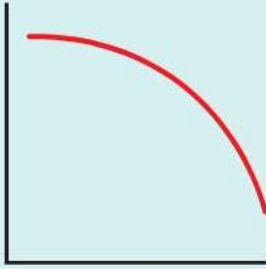
Alle getallen groter dan 2 zitten in dit interval.

$[2, 6)$ is een **half open interval**.

2 zit er wel in en 6 niet.

De intervallen waarop een grafiek stijgend of dalend is zijn dus altijd open.

8.3 Gemiddelde veranderingen en hellingen [1]

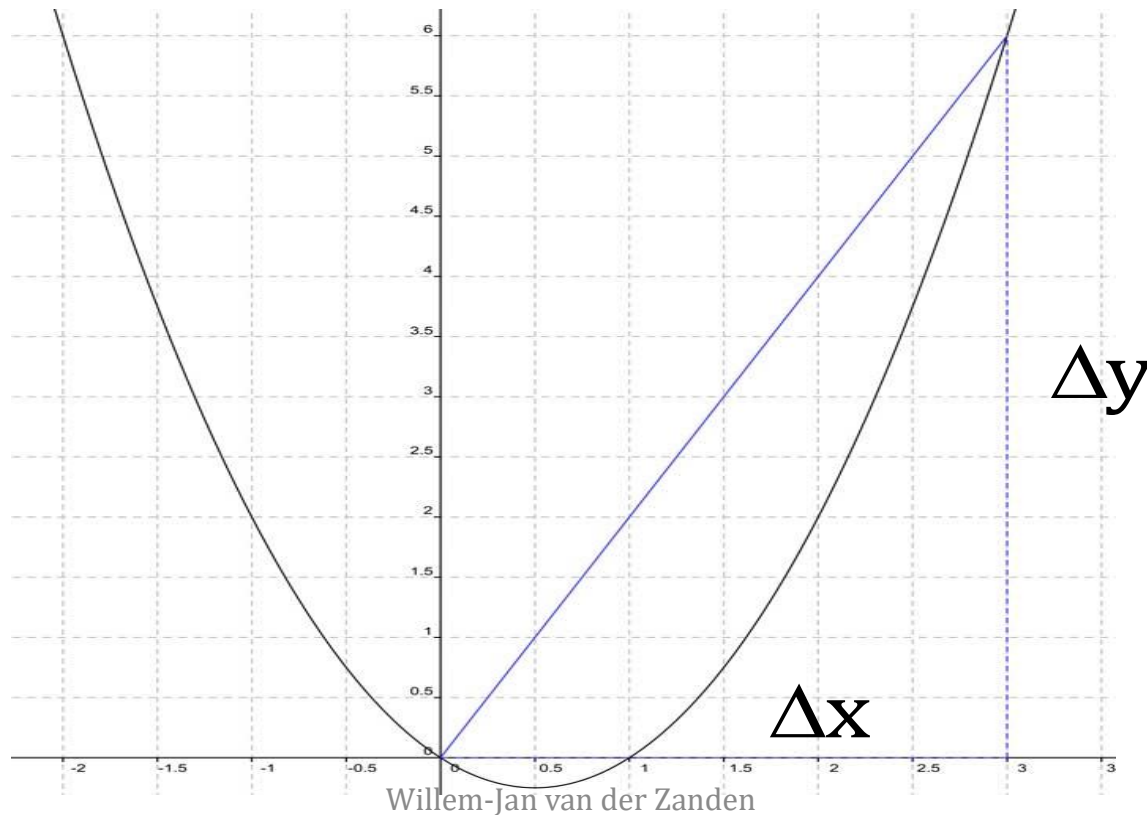
Soorten van stijgen en dalen			
stijging	constant 	toenemend 	afnemend 
daling	constant 	toenemend 	afnemend 

8.3 Gemiddelde veranderingen en hellingen [2]

Voorbeeld: $f(x) = x^2 - x$

De **gemiddelde verandering** van $f(x)$ **per tijdseenheid** op $[0, 3]$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{6 - 0}{3 - 0} = 2$$



8.3 Gemiddelde veranderingen en hellingen [2]

Algemeen:

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is:

- De gemiddelde toename van y op $[x_A, x_B]$;
- De richtingscoëfficiënt van de lijn AB ;
- De helling van de lijn AB ;

- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

8.3 Gemiddelde veranderingen en hellingen [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de tijd-afstandformule: $s = t^3 + t^2$ met t in seconden en s in meters. Bereken de snelheid op $t = 3$

De snelheid van deze tijd-afstandformule kun je benaderen door het differentiequotiënt op een klein interval rond $t = 3$ te berekenen. Neem bijvoorbeeld het interval $[3; 3,001]$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3,001) - s(3)}{3,001 - 3} \approx \frac{36,033 - 36}{3,001 - 3} \approx 33$$

Hieruit volgt dat de snelheid op $t = 3$ ongeveer 33 m/s is.

Algemeen:

Bij een tijd-afstandformule benader je de snelheid op het tijdstip $t = a$ met het differentiequotiënt op het interval $[a, a + \Delta t]$, met bijvoorbeeld $\Delta t = 0,01$ of $\Delta t = 0,001$

8.3 Gemiddelde veranderingen en hellingen [3]

Met het differentiequotiënt bereken je de gemiddelde verandering per tijdseenheid.

Voorbeeld: $s = t^2 - t + 0,25$

Differentiequotiënt van s op $[0, 3] =$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = \frac{6,25 - 0,25}{3 - 0} = 2$$

Differentiequotiënt van s op $[2, 3] =$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{6,25 - 2,25}{3 - 2} = 4$$

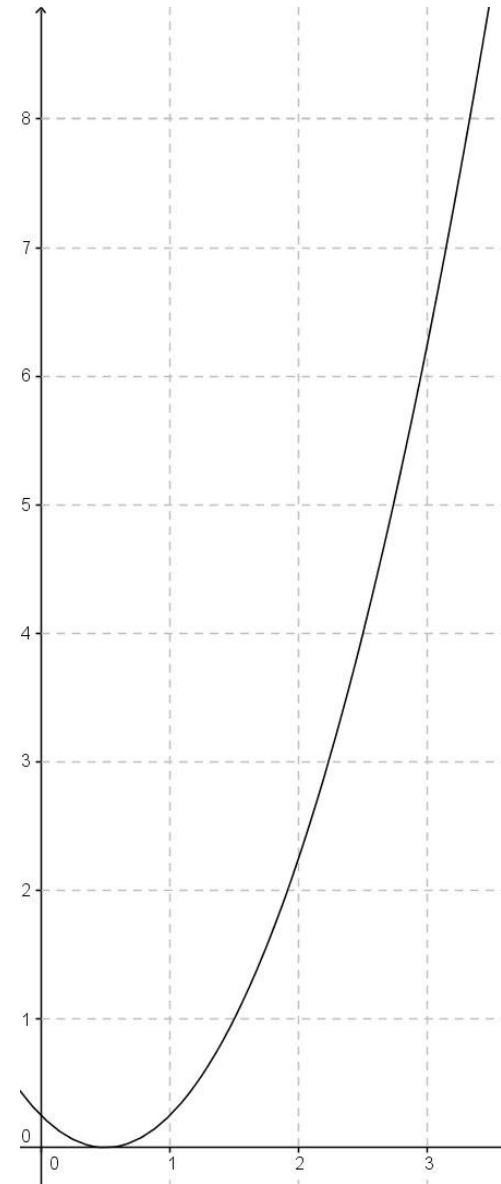
Differentiequotiënt van s op $[2,99 ; 3] =$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(2,99)}{3 - 2,99} = \frac{6,25 - 6,2001}{3 - 2,99} \approx 4,99$$

Algemeen:

In een tijd-afstandsgrafiek is de snelheid $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.

Willem-Jan van der Zanden



8.3 Gemiddelde veranderingen en hellingen [3]

Voorbeeld:

Zie de grafiek rechts. Schat de snelheid op $t = 3$.

Stap 1:

Teken de raaklijn k in het punt op de grafiek met $t = 3$.

Stap 2:

Lees twee punten af die op de raaklijn liggen.

$A(2; 1,25)$ en $B(3; 6,25)$.

Stap 3:

Bereken de snelheid met behulp van de twee punten.

$$\text{Snelheid} = \frac{6,25 - 1,25}{3 - 2} = \frac{5}{1} = 5$$

