

4.0 Voorkennis [1]

Voorbeeld 1 (Elimineren door substitutie):

Los op:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$$

Stap 1:

Maak bij een van de vergelijkingen een variabele vrij.

$$4x - y = 3$$

$$y = 4x - 3$$

Stap 2:

Vul de vrijgemaakte variabele in de andere vergelijking in en los de verkregen vergelijking op.

$$3x + 4y = 26$$

$$3x + 4(4x - 3) = 26$$

4.0 Voorkennis [1]

Stap 2:

Vul de vrijgemaakte variabele in de andere vergelijking in en los de verkregen vergelijking op.

$$3x + 4y = 26$$

$$3x + 4(4x - 3) = 26$$

$$3x + 16x - 12 = 26$$

$$19x = 38$$

$$x = 2$$

Stap 3:

Vul het gevonden antwoord in de vergelijking uit stap 1 in.

$$y = 4x - 3$$

$$y = 4 \cdot 2 - 3$$

$$y = 8 - 3 = 5$$

4.0 Voorkennis [1]

Voorbeeld 2 (Achterwaartse substitutie):

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 21 \\ 6y - z = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

Stap 1:

Substitueer $z = 5$ in de tweede vergelijking.

$$6y - z = 1$$

$$6y - 5 = 1$$

$$6y = 6$$

$$y = 1$$

4.0 Voorkennis [1]

Voorbeeld 2 (Achterwaartse substitutie):

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 21 \\ 6y - z = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

Stap 2:

Substitueer $y = 1$ en $z = 5$ in de eerste vergelijking.

$$x + 2y + 3z = 21$$

$$x + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 21$$

$$x + 17 = 21$$

$$x = 4$$

De oplossing is nu $(x, y, z) = (4, 1, 5)$

4.1 Rekenen met matrices [1]



- Een spoorwegkaart is een voorbeeld van een **graaf**;
- Een graaf bestaat uit **punten**;
- De punten worden door **wegen** met elkaar verbonden;
- De plaats van de punten en de vorm van de wegen is van minder belang dan bij een “echte” landkaart.

Definitie:

Een graaf bestaat uit punten, waarvan er twee of meer door wegen verbonden zijn.

4.1 Rekenen met matrices [1]



Het is handiger om de afstanden tussen de vier plaatsen in een **matrix** (een soort “tabel”) weg te zetten. Omdat er afstanden in de matrix staan wordt het dus een **afstandmatrix**.

De afstand van Groningen naar Amersfoort is $30 + 145 = 175$ km

De afstandsmatrix heeft vier **rijen** (horizontaal) en vier **kolommen** (verticaal). Deze matrix heeft 16 **elementen**.

	Am	Ap	As	Gr
Am	0	43	145	175
Ap	43	0	118	148
As	145	118	0	30
Gr	175	148	30	0

4.1 Rekenen met matrices [1]

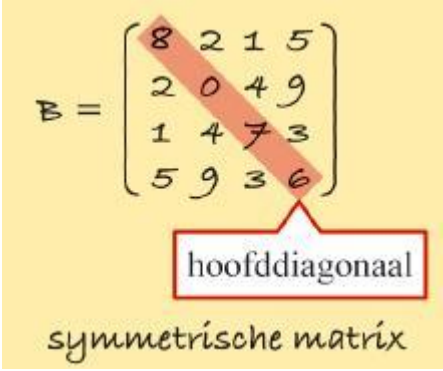
$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{fil 1} \\ \text{fil 2} \\ \text{fil 3} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 88 & 53 & 80 & 48 \\ 57 & 127 & 90 & 58 \\ 46 & 70 & 97 & 50 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

De bovenstaande matrix heeft drie rijen en vier kolommen. Deze matrix heeft nu de **afmeting** 3 x 4. Element m_{32} is het getal dat in de derde rij en de tweede kolom staat. m_{32} is dus 70.

Definitie:

Een $n \times m$ matrix M heeft n rijen en m kolommen. Element m_{ij} is het getal in de i -de rij en de j -de kolom van M .

4.1 Rekenen met matrices [1]



The image shows a 4x4 matrix B with the following elements:

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

A red diagonal line runs from the top-left element (8) to the bottom-right element (6). A red box labeled "hoofddiagonaal" points to this line. Below the matrix, the text "symmetrische matrix" is written.

Een **vierkante matrix** is een matrix met evenveel rijen als kolommen.
De vier rode elementen b_{11} , b_{22} , b_{33} , b_{44} liggen op de **hoofddiagonaal**.

De matrix hierboven is ook **symmetrisch** want $b_{ij} = b_{ji}$ voor elke i en j .

4.1 Rekenen met matrices [1]

Optellen (en aftrekken) van matrices:

Twee matrices met dezelfde afmeting kunnen bij elkaar opgeteld worden. De sommatrix ontstaat door de getallen op de overeenkomstige plaatsen op te tellen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Matrix vermenigvuldigen met een getal:

Vermenigvuldig elk element van de matrix met dit getal.

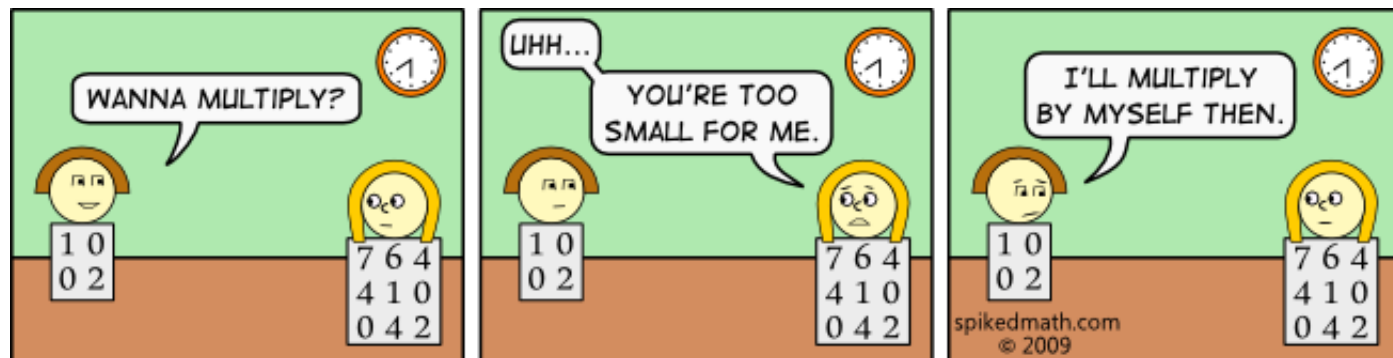
$$6A = 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 30 \\ 48 & 24 \end{pmatrix}$$

4.1 Rekenen met matrices [2]

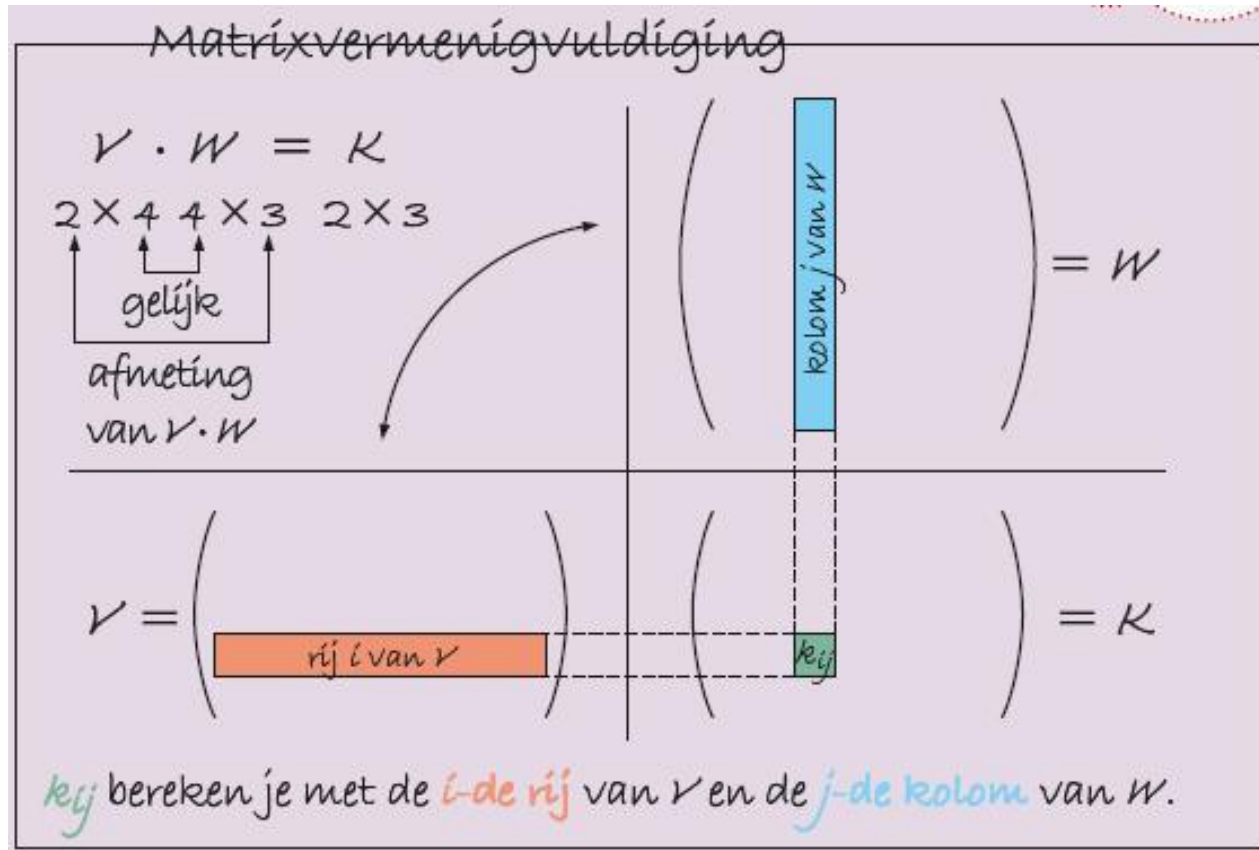
$$V = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 3 \\ 20 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

V is een 2×4 matrix. W is een 4×3 matrix. Deze twee matrices kunnen met elkaar vermenigvuldigd worden. Want het aantal kolommen van matrix V is gelijk aan het aantal rijen van matrix W .

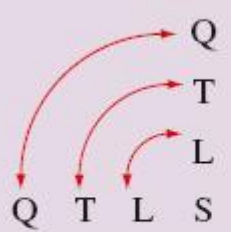


4.1 Rekenen met matrices [2]



Element k_{23} bereken je dus door de 2-de rij van V en de 3-de kolom van W met elkaar te vermenigvuldigen.

4.1 Rekenen met matrices [2]

				prijs winst software $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 3 \\ 20 & 5 & 4 \end{pmatrix} = W$
$V = \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 260 & 51 & 38 \\ 184 & 37 & 29 \end{pmatrix} = K$			

Om element k_{11} te krijgen vermenigvuldigen we de eerste rij van V met de eerste kolom van W :

$$k_{11} = 8 \cdot 8 + 6 \cdot 12 + 4 \cdot 16 + 3 \cdot 20 = 260$$

Om element k_{12} te krijgen vermenigvuldigen we de eerste rij van V met de tweede kolom van W :

$$k_{12} = 8 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 50$$

Om element k_{23} te krijgen vermenigvuldigen we de tweede rij van V met de derde kolom van W :

$$k_{23} = 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 29$$

4.1 Rekenen met matrices [3]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Een **eenheidsmatrix** is een vierkante matrix met op de hoofddiagonaal uitsluitend enen. Alle andere elementen zijn gelijk aan nul.

Een vierkante matrix kan met zichzelf vermenigvuldigd worden.

$$Q = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$Q^2 = Q \cdot Q = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 & 90 \\ 165 & 115 \end{pmatrix}$$

4.1 Rekenen met matrices [3]

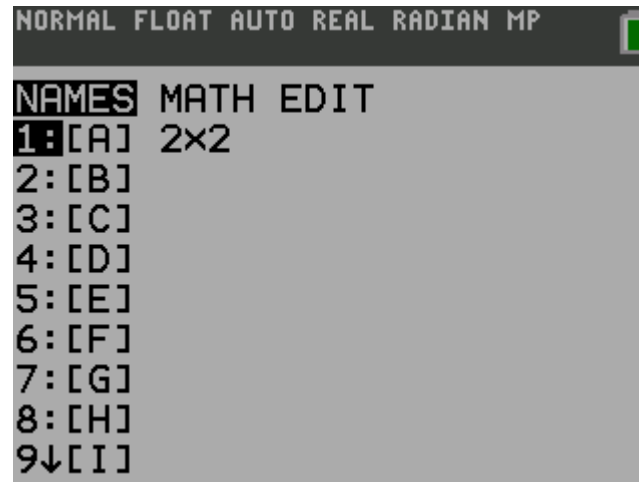
$$Q = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$Q^2 = Q \cdot Q = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 & 90 \\ 165 & 115 \end{pmatrix}$$

Matrix en GR:

Stap 1:

2ND | X⁻¹ | EDIT | ENTER



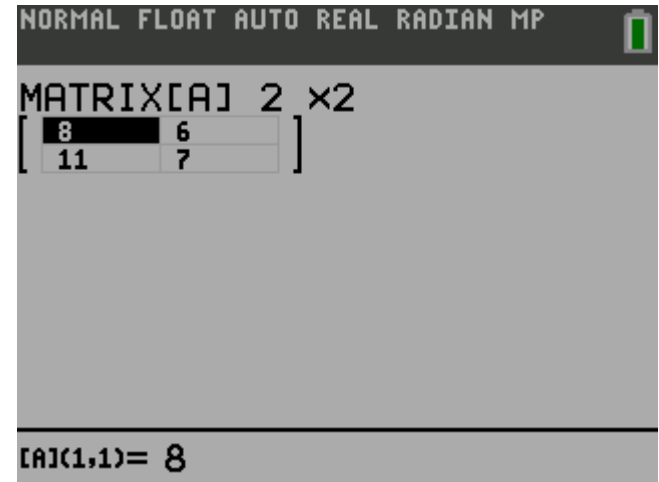
4.1 Rekenen met matrices [3]

Matrix en GR:

Stap 2:

Vul afmetingen Matrix in.

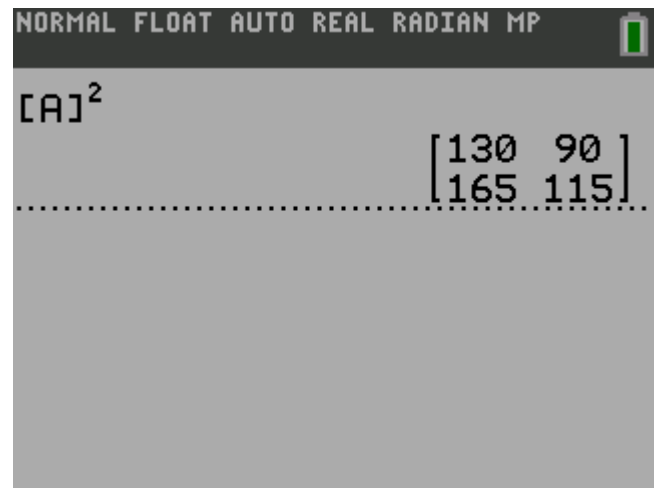
Vul getallen in Matrix in.



Stap 3:

2ND | X⁻¹ | NAMES | 1 : [A] | ENTER | ^2 | ENTER

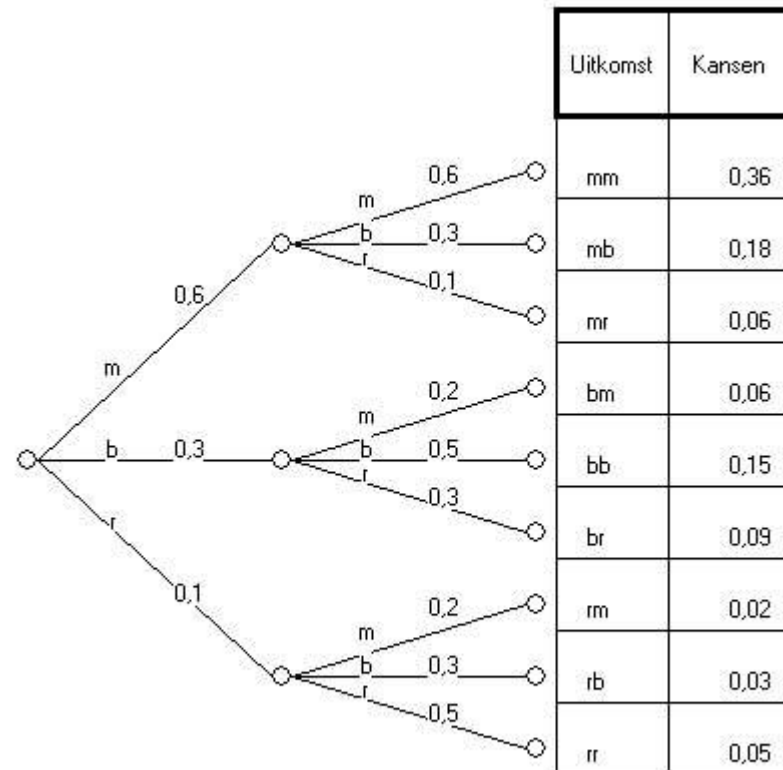
De GR berekent nu de matrix A^2



4.2 Matrices en kansen [1]

Voorbeeld:

- Als het vandaag mooi weer is, dan zijn de kansen voor morgen: mooi weer 0,6; bewolkt 0,3 en regen 0,1
- Als het vandaag bewolkt is, dan zijn de kansen voor morgen: mooi weer 0,2; bewolkt 0,5 en regen 0,3
- Als het vandaag regenachtig is, dan zijn de kansen voor morgen: mooi weer 0,2; bewolkt 0,3 en regen 0,5



Wat is de kans dat het over 2 Dagen regent als het nu mooi weer is?

4.2 Matrices en kansen [1]

Vraag:

Wat is de kans dat het over 2 dagen bewolkt als het nu mooi weer is?

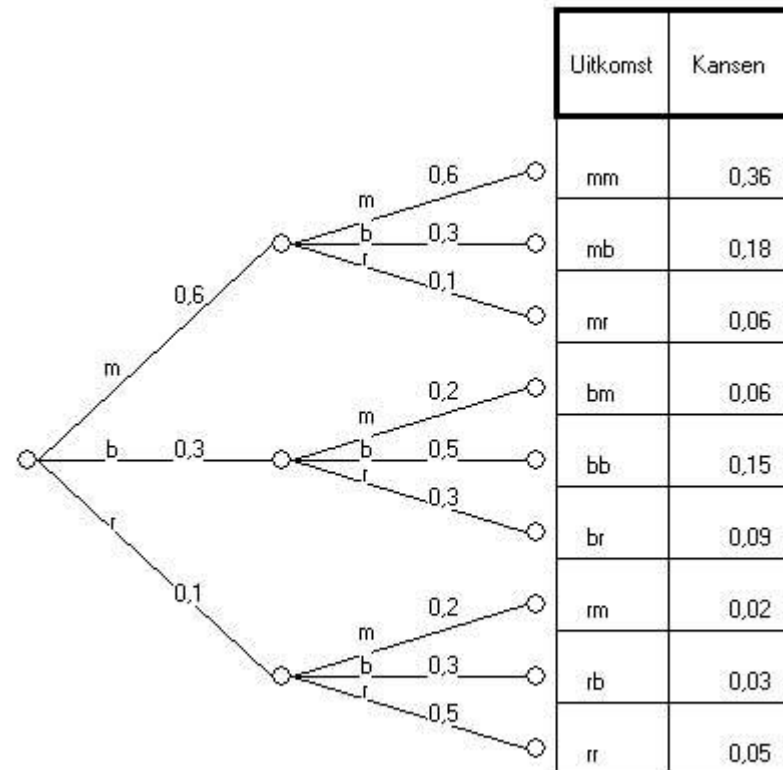
De mogelijkheden zijn:

- dag 1 mooi, dag 2 bewolkt (MB)
- dag 1 bew, dag 2 bewolkt (BB)
- dag 1 regen, dag 2 bewolkt (RB)

$$\begin{aligned} P(\text{dag 2 bewolkt en nu mooi}) &= \\ P(\text{MB}) + P(\text{BB}) + P(\text{RB}) &= \\ 0,18 + 0,15 + 0,03 &= 0,36 \end{aligned}$$

Maar:

Erg onhandig bij grotere aantallen.



4.2 Matrices en kansen [1]

Voorbeeld:

Wat is de kans dat het over 2 dagen regent als het nu mooi weer is?

De **overgangsmatrix** W geeft aan wat de kans op een bepaald weertype voor morgen is, afhankelijk van het weer van vandaag

W_{21} = Kans dat het morgen bewolkt is, als het vandaag mooi weer is (= 0,3)

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{array}{c} m \\ b \\ r \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{c} m \\ b \\ r \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} = W$$

4.2 Matrices en kansen [1]

Voorbeeld:

Wat is de kans dat het over 2 dagen regent als het nu mooi weer is?

Wanneer we de matrix W met zichzelf vermenigvuldigen, krijgen we de matrix W^2 . De **matrix** W^2 geeft aan wat de kans op een bepaald weertype voor over twee dagen is, afhankelijk van het weer van vandaag.

W^2_{21} = Kans dat het over twee dagen bewolkt is, als het vandaag mooi weer is (= 0,36)

$$\begin{array}{c} \text{naar} \end{array} \begin{array}{c} m \\ b \\ r \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ m \quad b \quad r \end{array} \begin{pmatrix} 0,44 & 0,28 & 0,28 \\ 0,36 & 0,4 & 0,36 \\ 0,2 & 0,32 & 0,36 \end{pmatrix} = W^2$$

4.2 Matrices en kansen [1]

Voorbeeld:

Wat is de kans dat het over n dagen regent als het nu mooi weer is?

Dit is te vinden wanneer we de matrix W^n

W^n_{21} = Kans dat het over n dagen bewolkt is, als het vandaag mooi weer is

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ m \\ b \\ r \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ m \\ b \\ r \end{array} \begin{pmatrix} 0,44 & 0,28 & 0,28 \\ 0,36 & 0,4 & 0,36 \\ 0,2 & 0,32 & 0,36 \end{pmatrix} = W^2$$

4.2 Matrices en kansen [2]

Voorbeeld:

- Op 1-1-2007 heeft de Krant “De Ster” 60.000 abonnees. De Krant “De Koerier” heeft er 40.000.
- Van de abonnees van “De Ster” blijft per jaar 80% de krant trouw. 20% stapt over.
- Van de abonnees van “De Koerier” blijft per jaar 60% de krant trouw. 40% stapt over.

De matrix B geeft de beginpopulatie: $B = \begin{matrix} S \\ K \end{matrix} \begin{pmatrix} 60.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$

De matrix V is de overgangsmatrix: $V = \begin{matrix} S \\ K \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$

4.2 Matrices en kansen [2]

Voorbeeld:

Het vermenigvuldigen van de overgangsmatrix V met de matrix B geeft de verdeling van abonnees één jaar later.

$$V \cdot B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60.000 \\ 40.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64.000 \\ 36.000 \end{pmatrix}$$

Het vermenigvuldigen van de matrix V^2 met de matrix B geeft de verdeling van abonnees twee jaar later.

$$V^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 60.000 \\ 40.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65.600 \\ 34.400 \end{pmatrix}$$

In dit voorbeeld is sprake van een **markovketen**.

Hiervoor gelden de volgende randvoorwaarden:

- De in de matrix vermelde kansen blijven gelden;
- Er is een **gesloten systeem**. Het totaal aantal abonnees blijft gelijk.

4.2 Matrices en kansen [3]

Voorbeeld:

- Op 1-1-2007 heeft de Krant “De Ster” 60.000 abonnees. De Krant “De Koerier” heeft er 40.000.
- Van de abonnees van “De Ster” blijft per jaar 80% de krant trouw. 20% stapt over.
- Van de abonnees van “De Koerier” blijft per jaar 60% de krant trouw. 40% stapt over.

De matrix B geeft de beginpopulatie: $B = \begin{matrix} S \\ K \end{matrix} \begin{pmatrix} 60.000 \\ 40.000 \end{pmatrix}$

De matrix V is de overgangsmatrix: $V = \begin{matrix} S \\ K \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$

Vraag:

Ontstaat er op de lange termijn een evenwicht?

4.2 Matrices en kansen [3]

Het aantal abonnees na één jaar is: $V \cdot B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60.000 \\ 40.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64.000 \\ 36.000 \end{pmatrix}$

Het aantal abonnees na 2 jaar is: $V^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 60.000 \\ 40.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65.600 \\ 34.400 \end{pmatrix}$

Het aantal abonnees na 3 jaar is: $V^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 60.000 \\ 40.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66.240 \\ 33.760 \end{pmatrix}$

Het aantal abonnees na 4 jaar is: $V^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 60.000 \\ 40.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66.496 \\ 33.504 \end{pmatrix}$

Het aantal abonnees na 15 jaar is: $V^{15} \cdot B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}^{15} \begin{pmatrix} 60.000 \\ 40.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66.667 \\ 33.333 \end{pmatrix}$

Conclusie:

Er ontstaat een evenwicht. Dit kun je ook concluderen door enkel naar de matrix V^n te kijken.

4.2 Matrices en kansen [4]

Voorbeeld:

Bij een insectensoort zijn er 400 eitjes, 200 larven en 50 insecten.
Elke levensfase duurt één maand.

- Per maand komt 95% van de eitjes niet uit;
- Per maand wordt 25% van de larven een insect;
- Per maand blijven er 0 insecten over, maar legt elke insect 100 eitjes.

De matrix P geeft de beginsituatie : $P = \begin{matrix} e \\ l \\ i \end{matrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix}$

De overgangsmatrix heet nu een **Lesliematrix**
of **populatievoorspellingsmatrix** L :

$$L = \begin{matrix} e \\ l \\ i \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Matrices en kansen [4]

$$L = \begin{matrix} & \begin{matrix} e & l & i \end{matrix} \\ \begin{matrix} e \\ l \\ i \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad P = \begin{matrix} e \\ l \\ i \end{matrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix}$$

- Het getal 0,05 geeft aan dat 5% van alle eitjes een larve wordt;
- Het getal 0,25 geeft aan dat 25% van alle larve een insect wordt;
- Het getal 100 geeft weer dat één insect 100 eitjes legt. (**Vruchtbaarheidscijfer**)
- Na één maand zijn er de volgende aantallen:

$$L \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Uitgegaan wordt van:

- Gelijke overlevingskansen voor mannen en vrouwen;
- Geen immigratie en emigratie;
- De matrix blijft gelijk in de loop van de tijd.

4.3 Stelsels en matrices [1]

Gegeven is het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x - 4y = 8 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Dit kan ook geschreven worden in de vorm van een matrix.

Coëfficiëntenmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Aangevulde matrix: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right)$

4.3 Stelsels en matrices [1]

Voorbeeld:

Los het volgende stelsel van vergelijkingen op:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - y + 4z = 3 \\ 2x + 5y - z = 15 \end{cases}$$

Stap 1:

Noteer het stelsel als een matrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 15 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - y + 4z = 3 \\ 2x + 5y - z = 15 \end{cases}$$

4.3 Stelsels en matrices [1]

Stap 2:

Trek van rij 1 drie keer van rij 2 af. Dit is: $3x + 6y + 9z = 0$

Trek rij 1 twee keer van rij 3 af. Dit is $2x + 4y + 6z = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -7y - 5z = 3 \\ y - 7z = 15 \end{cases}$$

Stap 3:

Tel bij rij 2 zeven keer rij 3 op. Dit is $7x - 14y = 105$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -54 & 108 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -54z = 108 \\ y - 7z = 15 \end{cases}$$

4.3 Stelsels en matrices [1]

Stap 4:

Deel rij 2 nu door -54.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ z = -2 \\ y - 7z = 15 \end{cases}$$

Stap 5:

Verwissel de rijen 2 en 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y - 7z = 15 \\ z = -2 \end{cases}$$

Uit rij 3 volgt nu: $z = -2$.

4.3 Stelsels en matrices [1]

Stap 6:

Invullen van $z = -2$ in de tweede rij geeft: $y - 7 \cdot -2 = 15 \Leftrightarrow y = 1$.

Invullen van $y = 1$ en $z = -2$ in de eerste rij geeft: $x + 2 \cdot 1 + 3 \cdot -2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

De oplossing van het stelsel is dus $(x, y, z) = (4, 1, -2)$

Bij deze stap pas je achterwaartse substitutie toe.

4.3 Stelsels en matrices [1]

Toegestane bewerkingen (Elementaire rij-bewerkingen):

- Twee rijen verwisselen;
- Een rij vermenigvuldigen met een getal dat niet nul is;
- Een veelvoud van een rij optellen (of aftrekken) bij een andere rij.

Als je gebruik maakt van elementaire rij-bewerkingen ontstaan **rij-equivalente matrices**.

Als bij een stelsel van drie vergelijkingen en drie onbekenden de matrix tot de volgende vorm herleid is, kun je met achterwaartse substitutie de oplossing Berekenen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{array} \right)$$

4.3 Stelsels en matrices [2]

Voorbeeld:

Gegeven is het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - y + 4z = 3 \\ 2x + 5y - z = 15 \end{cases}$$

Door te vegen in de kolommen ontstaat de volgende **rij-echelonvorm** matrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Nulrij = een rij met enkel nullen.

Leidende element = eerste element in rij ongelijk nul.

- Elk leidend element in de matrix is gelijk aan 1;
- De niet-nulrijen zijn zo geordend dat elke volgende rij met meer nullen begint;
- Eventuele nulrijen staan onderaan in de matrix.

4.3 Stelsels en matrices [2]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Deze matrix kan nog verder herleid worden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Tel rij 3 zeven keer op bij rij 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Haal rij 3 drie keer van rij 1 af.

Haal rij 2 twee keer van rij 1 af.

Dit is de matrix in **gereduceerde rij-echelonvorm**

4.3 Stelsels en matrices [2]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Deze matrix kan nog verder herleid worden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Tel rij 3 zeven keer op bij rij 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Haal rij 3 drie keer van rij 1 af.

Haal rij 2 twee keer van rij 1 af.

Dit is de matrix in **gereduceerde rij-echelonvorm**

4.3 Stelsels en matrices [3]

1. Samenhangend en bepaald stelsel

Gegeven is het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Hierbij hoort de volgende aangevulde matrix: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 5 \end{array} \right)$

Deze matrix is om te vormen tot: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$

- Dit stelsel heeft één oplossing.;
- De gereduceerde rij-echelonmatrix van de aangevulde matrix bestaat uit een $n \times n$ eenheidsmatrix en een kolom met de oplossing;
- De vergelijkingen van het stelsel zijn onafhankelijk van elkaar.

4.3 Stelsels en matrices [3]

2. Niet-samenhangend en strijdig stelsel

Gegeven is het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Hierbij hoort de volgende aangevulde matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

Deze matrix is om te vormen tot: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

- Dit stelsel heeft geen oplossing;
- De gereduceerde rij-echelonmatrix van de aangevulde matrix heeft een rij die begint met n nullen en eindigt met een getal ongelijk nul;
- De vergelijkingen van het stelsel zijn strijdig.

4.3 Stelsels en matrices [3]

3. Samenhangend en onbepaald stelsel

Gegeven is het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$$

Hierbij hoort de volgende aangevulde matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \end{array} \right)$$

Deze matrix is om te vormen tot: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

- Dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen;
- De gereduceerde rij-echelonmatrix van de aangevulde matrix heeft een nulrij;
- De vergelijkingen van het stelsel zijn afhankelijk.

4.3 Stelsels en matrices [3]

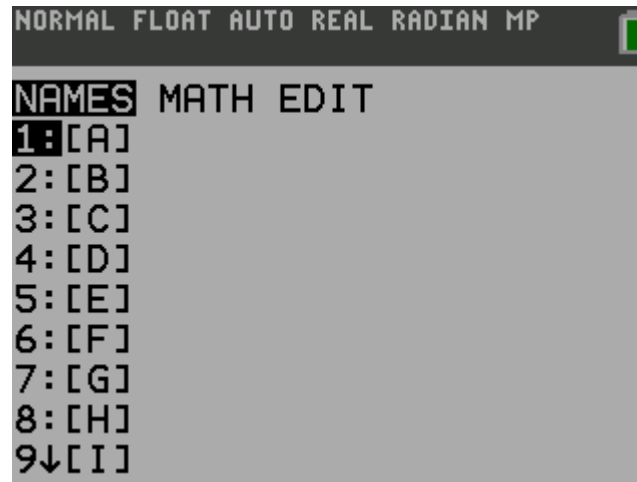
Voorbeeld:

Onderzoek van welk type het volgende stelsel is:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 11 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

Stap 1:

2ND | X⁻¹ | EDIT | ENTER



4.3 Stelsels en matrices [3]

Stap 2:

Vul afmetingen Matrix in.

Vul getallen in Matrix in.

Schrijf wat op je GR scherm staat over.

NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP

MATRIX[A] 4 × 5

1	2	-3	1	-4
2	-1	1	-1	11
1	-3	2	1	6
3	1	-4	3	-2

[A](1,1)= 1

Stap 3:

2ND | X^{-1} | MATH | B : rref(| ENTER

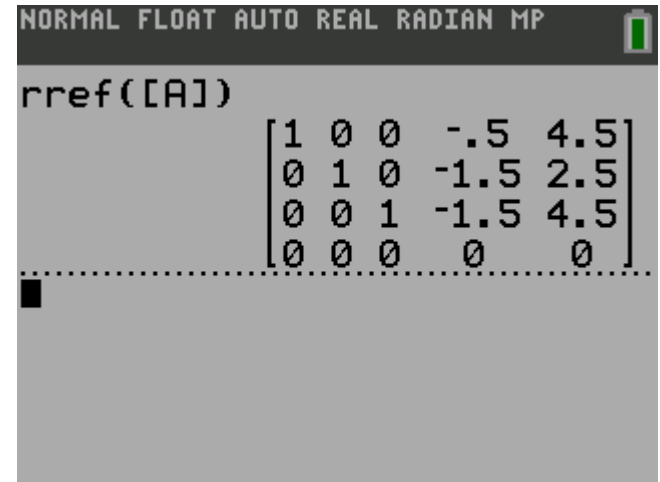
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP

rref(

4.3 Stelsels en matrices [3]

Stap 4:

2ND | X^{-1} | NAMES | 1 : [A] | ENTER |) | ENTER



Schrijf wat op je GR scherm staat over.

Conclusie:

Het stelsel is samenhangend en onbepaald.

Er zijn oneindig veel oplossingen.

4.4 Inverse matrices en determinanten [1]

Inverse matrix:

Bij een vierkante matrix A kan precies één matrix B horen waarvoor geldt:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

I = eenheidsmatrix (een matrix met enen op de diagonaal, alle andere elementen zijn nul.

B = inverse matrix (of inverse) $B = A^{-1}$

De oplossing van het stelsel $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ is gelijk aan $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Voorwaarde is dat de inverse matrix A^{-1} van de coëfficiëntenmatrix A bestaat.

4.4 Inverse matrices en determinanten [1]

Voorbeeld:
Gegeven is het stelsel

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x + 5y + 3z = -1 \end{cases}$$

Los het stelsel op door gebruik te maken van een inverse matrix.

Stap 1:

Voer de volgende matrices in:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.4 Inverse matrices en determinanten [1]

Stap 2:

2ND | x^{-1} | 1: [A] | ENTER | x^{-1}



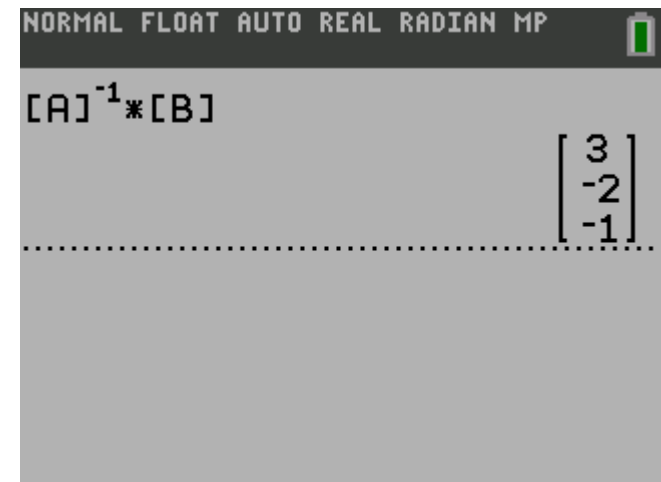
Stap 3:

• | 2ND | x^{-1} | 1: [B] | ENTER geeft als uitkomst

Schrijf wat op je GR scherm staat over.

Let op:

Met behulp van de inverse matrix kun je bij overgangsmatrices terug rekenen in de tijd.



4.4 Inverse matrices en determinanten [2]

Algemeen:

Gegeven is het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

De coëfficiëntenmatrix van dit stelsel is: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix}$

De term $aq - bp$ heet de **determinant** ($\det(A)$ of $|A|$) van de matrix A .

Dit stelsel heeft één oplossing als: $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ en dus $|A| \neq 0$

Dit stelsel heeft geen oplossingen als: $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ en dus $|A| = 0$

Dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen als: $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ en dus $|A| = 0$

4.4 Inverse matrices en determinanten [2]

Ook voor andere vierkante matrices dan een 2 x 2 matrix valt een determinant te berekenen.

De determinant van de matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

is gelijk aan $|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

Let op:

De **onderdeterminant** van a_{11} is de determinant van de

ondermatrix $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Deze is gelijk aan: $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

De onderdeterminant van a_{12} is gelijk aan $a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$

De onderdeterminant van a_{13} is gelijk aan $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$

4.4 Inverse matrices en determinanten [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & p \\ 2p & 1 & 2 \\ 1 & 4 & p \end{pmatrix}$

Bereken voor welke p geldt $|A| = 0$.

$$\begin{aligned} |A| &= 2(p - 8) - 3(2p^2 - 2) + p(8p - 1) \\ &= 2p - 16 = 6p^2 + 6 + 8p^2 - p \\ &= 2p^2 + p - 10 \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \text{ geeft } 2p^2 + p - 10 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot -10 = 81$$

$$p = \frac{-1 - 9}{4} = -2\frac{1}{2} \quad \vee \quad p = \frac{-1 + 9}{4} = 2$$