

5.0 Voorkennis

Voorbeeld 1:

In een vaas zitten 10 rode, 5 witte en 6 blauwe knikkers. Er worden 9 knikkers uit de vaas gepakt.

a) Bereken de kans op minstens 7 rode knikkers:

$$P(\text{minstens 7 rood}) = P(7 \text{ rood}) + P(8 \text{ rood}) + P(9 \text{ rood}) =$$

$$\frac{\binom{10}{7}\binom{11}{2}}{\binom{21}{9}} + \frac{\binom{10}{8}\binom{11}{1}}{\binom{21}{9}} + \frac{\binom{10}{9}}{\binom{21}{9}} \approx 0,024$$

b) Bereken de kans op minstens 2 blauwe knikker:

$$P(\text{minstens 2 blauw}) = 1 - P(0 \text{ blauw}) - P(1 \text{ blauw}) = 1 - \frac{\binom{15}{9}}{\binom{21}{9}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{15}{8}}{\binom{21}{9}} \approx 0,852$$

5.0 Voorkennis

Voorbeeld 2:

Een gokkast bestaat uit een drietal schijven die ronddraaien.

Op schijf 1 staan: 5 bananen, 4 appels, 3 citroenen en 3 kersen;

Op schijf 2 staan: 7 bananen, 3 appels, 2 citroenen en 3 kersen;

Op schijf 3 staan: 1 banaan, 5 appels, 6 citroenen en 3 kersen.

a) Bereken de kans op 3 keer appel:

$$P(3 \text{ keer appel}) = P(\text{aaa}) = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{60}{3375} \approx 0,0178$$

b) Bereken de kans op 2 keer citroen:

$$P(2 \text{ keer citroen}) = P(\text{ecc}) + P(\text{cec}) + P(\text{cce}) =$$

$$\frac{12}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{6}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{6}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{9}{15} \approx 0,128$$

c) Bereken de kans op 0 keer kers:

$$P(0 \text{ keer kers}) = P(\text{kkk}) = \frac{12}{15} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{12}{15} \approx 0,512$$

5.0 Voorkennis

Bij samengestelde kansexperimenten maak je gebruik van de productregel.

Productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen:

Als de gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn geldt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Somregel:

Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen A en B geldt de somregel:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Voor gebeurtenissen A en B , die elkaar niet uitsluiten geldt de aangepaste somregel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5.1 Het herhalen van kansexperimenten [1]

Voorbeeld:

Op een schijf staan een zestal afbeeldingen in even grote vakjes:

3 keer appel, 2 keer banaan, 1 keer peer.

Sandra draait zes keer aan de schijf.

a) Bereken de kans dat Sandra zes keer een banaan krijgt:

$$P(\text{zes keer banaan}) = P(\text{bbbbbb}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \left(\frac{2}{6}\right)^6 \approx 0,00137$$

b) Bereken de kans dat Sandra één keer een banaan krijgt:

$$\begin{aligned} P(\text{een keer banaan}) &= P(\text{b b b b b b}) + P(\text{b b b b b b}) + P(\text{b b b b b b}) \\ &\quad + P(\text{b b b b b b}) + P(\text{b b b b b b}) + P(\text{b b b b b b}) \end{aligned}$$

$$\text{Elke uitkomst heeft een kans van: } \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^5$$

Er zijn $\binom{6}{1} = 6$ mogelijkheden voor de ene banaan.

$$P(\text{een keer banaan}) = \binom{6}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^5 \approx 0,263$$

5.1 Het herhalen van kansexperimenten [1]

Voorbeeld:

Op een schijf staan een zestal afbeeldingen in even grote vakjes:

3 keer appel, 2 keer banaan, 1 keer peer.

Sandra draait zes keer aan de schijf.

c) Bereken de kans dat Sandra twee keer een banaan krijgt:

$$\begin{aligned} P(\text{twee keer banaan}) &= P(\text{bb}\text{~~bbbb~~}) + P(\text{b}\text{~~bbbbb~~}) + \dots \\ &+ \dots + P(\text{~~bbbbb~~b}) + P(\text{~~bbbbbb~~)} \end{aligned}$$

$$\text{Elke uitkomst heeft een kans van: } \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^4$$

Er zijn $\binom{6}{2} = 15$ mogelijkheden voor de twee bananen.

$$P(\text{twee keer banaan}) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^4 \approx 0,329$$

5.1 Het herhalen van kansexperimenten [1]

Voorbeeld:

Op een schijf staan een zestal afbeeldingen in even grote vakjes:

3 keer appel, 2 keer banaan, 1 keer peer.

Sandra draait zes keer aan de schijf.

d) Bereken de kans dat Sandra hoogstens twee keer een banaan krijgt:

$$P(\text{hoogstens twee keer banaan}) = P(0 \text{ banaan}) + P(1 \text{ banaan}) + P(2 \text{ banaan})$$

$$\binom{6}{0} \left(\frac{4}{6}\right)^6 + \binom{6}{1} \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^5 + \binom{6}{2} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^4 \approx 0,594$$

5.1 Het herhalen van kansexperimenten [2]

Voorbeeld 1:

In een vaas zitten 15 knikkers. 10 van deze knikkers zijn rood en 5 blauw.

Uit deze vaas worden vier knikkers gepakt.

Bereken de kans dat vier rode knikkers worden gepakt.

Stap 1:

$$P(4 \text{ rode knikkers}) = P(\text{rrrr})$$

Stap 2:

De eerste knikker moet rood zijn.

In de vaas zitten 15 knikkers (10 rood en 5 blauw)

$$P(\text{eerste knikker rood}) = \frac{10}{15}$$

Stap 3:

De tweede knikker moet rood zijn.

In de vaas zitten 14 knikkers (9 rood en 5 blauw)

$$P(\text{tweede knikker rood}) = \frac{9}{14}$$

5.1 Het herhalen van kansexperimenten [2]

Stap 4:

De derde knikker moet rood zijn.

In de vaas zitten 13 knikkers (8 rood en 5 blauw)

$$P(\text{derde knikker rood}) = \frac{8}{13}$$

Stap 5:

De vierde knikker moet rood zijn.

In de vaas zitten 12 knikkers (7 rood en 5 blauw)

$$P(\text{vierde knikker rood}) = \frac{7}{12}$$

Stap 6:

$$P(4 \text{ knikkers rood}) = P(\text{rrrr}) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \approx 0,154$$

5.1 Het herhalen van kansexperimenten [2]

Voorbeeld 2:

In een vaas zitten 15 knikkers. 10 van deze knikkers zijn rood en 5 wit.

Uit deze vaas worden twee knikkers gepakt.

Bereken de kans dat 1 rode en 1 witte knikker gepakt worden

Stap 1:

$$P(\text{eerste rood}) \cdot P(\text{tweede is wit} \mid \text{eerste is rood}) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \approx 0,238$$

Stap 2:

$$P(\text{eerste wit}) \cdot P(\text{tweede is rood} \mid \text{eerste is wit}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \approx 0,238$$

Stap 3:

Optellen van de uitkomsten van stap 1 en 2 geeft het antwoord.

Let op:

Dit kun je ook sneller uitrekenen: $P(1 \text{ rood en } 1 \text{ wit}) = 2 \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \approx 0,476$

De vermenigvuldiging met 2 is nodig omdat er 2 uitkomsten zijn (die elk dezelfde kans hebben)

5.1 Het herhalen van kansexperimenten [2]

Voorbeeld 3:

In een vaas zitten 15 knikkers. 10 van deze knikkers zijn rood en 5 wit.

Uit deze vaas worden drie knikkers gepakt.

Bereken de kans dat 2 rode en 1 witte knikker gepakt worden

Stap 1:

Er zijn $\binom{3}{2}$ mogelijke uitkomsten (RRW, RWR, WRR)

Stap 2:

De kans van elke uitkomst afzonderlijk is: $\frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \approx 0,092$

Stap 3:

Uit de eerste twee stappen volgt:

$$P(2 \text{ rood en } 1 \text{ wit}) = \binom{3}{2} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \approx 0,275$$

5.1 Het herhalen van kansexperimenten [3]

Voorbeeld:

In een vaas zitten 15 knikkers. 10 van deze knikkers zijn rood en 5 blauw. Uit deze vaas worden net zo lang knikkers gehaald totdat er een blauwe knikker gepakt wordt. Bereken de kans dat iemand vier knikkers pakt.

Stap 1:

$$P(4 \text{ knikkers}) = P(\text{rrrrb})$$

Stap 2:

De eerste knikker moet rood zijn.

In de vaas zitten 15 knikkers (10 rood en 5 blauw)

$$P(\text{eerste knikker rood}) = \frac{10}{15}$$

Stap 3:

De tweede knikker moet rood zijn.

In de vaas zitten 14 knikkers (9 rood en 5 blauw)

$$P(\text{tweede knikker rood}) = \frac{9}{14}$$

5.1 Het herhalen van kansexperimenten [3]

Stap 4:

De derde knikker moet rood zijn.

In de vaas zitten 13 knikkers (8 rood en 5 blauw)

$$P(\text{eerste knikker rood}) = \frac{8}{13}$$

Stap 5:

De vierde knikker moet blauw zijn.

In de vaas zitten 12 knikkers (7 rood en 5 blauw)

$$P(\text{tweede knikker rood}) = \frac{5}{12}$$

Stap 6:

$$P(\text{rrrb}) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} \approx 0,110$$

Let op:

Er is nu maar **één** volgorde als uitkomst mogelijk!!!

5.2 Trekken met en zonder terugleggen [1]

Voorbeeld 1 (Trekken met teruglegging):

Jan gooit vijf keer met een dobbelsteen. Bereken de kans dat hij twee keer minstens vijf ogen gooit.

Er is sprake van trekken met teruglegging. Een getal dat gegooid is met de dobbelsteen kan later opnieuw gegooid worden.

$$P(\text{twee keer minstens vijf gooien}) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^3 \approx 0,329$$

Let op:

Bij trekken **met teruglegging** wordt gebruik gemaakt van de productregel:

Als de gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn geldt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

5.2 Trekken met en zonder terugleggen [1]

Voorbeeld 2 (Trekken zonder teruglegging):

In een bak zitten 6 knikkers. 2 knikkers zijn rood en 4 knikkers zijn groen. Jan pakt 5 knikkers uit de bak. Bereken de kans dat Jan twee keer een rode knikker pakt.

Er is sprake van trekken zonder teruglegging. Een knikker die uit de vaas gehaald is, kan niet nogmaals gepakt worden.

$$P(\text{twee rode knikkers}) = \frac{\binom{2}{2} \binom{4}{3}}{\binom{6}{5}} = \frac{2}{3}$$

Let op:

Bij trekken **zonder teruglegging** wordt gebruik gemaakt van combinaties.

5.2 Trekken met en zonder terugleggen [1]

Voorbeeld 2 (Trekken zonder teruglegging – Alternatieve oplossing):

In een bak zitten 6 knikkers. 2 knikkers zijn rood en 4 knikkers zijn groen. Jan pakt 5 knikkers uit de bak. Bereken de kans dat Jan twee keer een rode knikker pakt.

Er is sprake van trekken zonder teruglegging. Een knikker die uit de vaas gehaald is, kan niet nogmaals gepakt worden.

$$P(\text{twee rode knikkers}) = \binom{5}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{3}$$

Let op:

~~RRRRR~~ is één van de manieren om bij vijf keer trekken, 2 rode knikkers te hebben.

De kans op deze volgorde is $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2}$. Je hebt steeds één knikker minder in de bak zitten. In totaal zijn er $\binom{5}{2}$ van dit soort volgordes.

5.2 Trekken met en zonder terugleggen [2]

Voorbeeld 1:

Uit een vaas met 500.000 knikkers worden 5 knikkers gehaald. Van de knikkers in de vaas zijn er 350.000 groen en 150.000 rood. Bereken de kans dat er 3 groene knikkers uit de vaas gehaald worden.

Er is nu sprake van trekken zonder teruglegging. We gebruiken nu dus combinaties:

$$P(3 \text{ groene knikkers}) = \frac{\binom{350.000}{3} \binom{150.000}{2}}{\binom{500.000}{5}} \approx 0,309$$

Het berekenen van de oplossing waarbij we doen of er sprake is van trekken met Teruglegging (De inhoud van de vaas verandert immers nauwelijks als we 5 knikkers van de 500.000 eruit halen)

$$P(3 \text{ groene knikkers}) = \binom{5}{2} \left(\frac{350.000}{500.000} \right)^3 \left(\frac{150.000}{500.000} \right)^2 \approx 0,309$$

5.2 Trekken met en zonder terugleggen [2]

Algemeen:

Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je trekken zonder terugleggen opvatten als trekken met terugleggen.

Voorbeeld 2:

Uit een onderzoek in september 2010 bleek dat 65% van alle huishoudens digitale televisie had. Voor een onderzoek worden 20 personen ondervraagd.

a) Bereken de kans dat al deze 20 personen digitale televisie hebben.

$$P(20 \text{ digitaal}) = \binom{20}{0} (0,65)^{20} (0,35)^0 \approx 0,000181$$

b) Bereken de kans dat precies 13 personen digitale televisie hebben.

$$P(13 \text{ digitaal}) = \binom{20}{13} (0,65)^{13} (0,35)^7 \approx 0,184$$

5.3 De verwachtingswaarde [1]

Voorbeeld:

Bij een loterij worden 50 loten verkocht. Er zijn 10 loten, die recht op een prijs geven. Eén van deze prijzen is de hoofdprijs. De rest zijn gewone prijzen. Sander koopt 4 loten.

X = het aantal hoofdprijzen

Y = het aantal gewone prijzen

X en Y zijn **toevalsvariabelen** (of **stochastische variabelen** of **stochast**)

$$P(\text{Sander wint de hoofdprijs}) = P(X = 1) = \frac{\binom{1}{1} \binom{49}{4}}{\binom{50}{5}} = 0,1$$

$P(\text{Sander wint drie gewone prijzen en geen hoofdprijs}) =$

$$P(X = 0 \text{ en } Y = 3) = \frac{\binom{1}{0} \binom{9}{3} \binom{40}{2}}{\binom{50}{5}} \approx 0,0309$$

5.3 De verwachtingswaarde [2]

Voorbeeld 1:

Yvette pakt vier knikkers uit een vaas waar er 20 inzitten. 9 van de knikkers zijn rood en 11 van de knikkers zijn blauw.

X = het aantal rode knikkers dat Yvette pakt.

Er zijn nu een vijftal mogelijk uitkomsten:

- 0 rode knikkers pakken ($X = 0$);
- 1 rode knikker pakken ($X = 1$);
- 2 rode knikkers pakken ($X = 2$);
- 3 rode knikkers pakken ($X = 3$);
- 4 rode knikkers pakken ($X = 4$).

Het overzicht van alle mogelijke waarden van de toevalsvariabele met bijbehorende kansen is een **kansverdeling**.

In het voorbeeld kan X alleen losse waarden aannemen. X is een **discrete stochast** en de bijbehorende kansverdeling is een **discrete kansverdeling**.

5.3 De verwachtingswaarde [2]

Voorbeeld 1:

Yvette pakt vier knikkers uit een vaas waar er 20 inzitten. 9 van de knikkers zijn rood en 11 van de knikkers zijn blauw.

X = het aantal rode knikkers dat Yvette pakt.

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,0681	0,307	0,409	0,191	0,0260

Let op:

Alle kansen van elke kansverdeling tellen steeds op tot één.

In dit voorbeeld heb je te maken met een verdeling zonder terugleggen. Kansen worden uitgerekend met de productregel of via combinaties. Dit is een voorbeeld van een **hypergeometrische verdeling**.

Is bij het trekken met terugleggen de stochast X het aantal trekkingen totdat Succes optreedt, dan heeft X een **geometrische verdeling**.

5.3 De verwachtingswaarde [2]

Voorbeeld 2:

Peter gooit met een dobbelsteen. Stel de kansverdeling op die hier bij hoort.

X = aantal ogen

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Let op:

Alle kansen van deze discrete kansverdeling zijn gelijk. Er is nu sprake van een **discrete uniforme verdeling**.

Bij een discrete uniforme verdeling met n uitkomsten heeft elke uitkomst de kans $\frac{1}{n}$.

5.3 De verwachtingswaarde [3]

Voorbeeld:

Een loterij heeft 1000 loten. Er is één hoofdprijs van 100 euro. Er zijn 100 troostprijzen van 5 euro. Elk lot kost één euro.

Wat is de verwachte winst van iemand die meedoet aan deze loterij?

Stap 1:

Maak een tabel met alle mogelijke winsten en hun kans.

w	99	4	-1
$P(W = w)$	0,001	0,1	0,899

- Als je de hoofdprijs wint (Kans is $1/1000 = 0,001$), krijg je 100 euro. Het lot wat je gekocht hebt, kostte 1 euro. Dus de winst is $100 - 1 = 99$ euro;
- Als je de troostprijs wint (Kans is $100/1000 = 0,1$) krijg je 5 euro. Het lot wat je gekocht hebt, kostte 1 euro. Dus de winst is $5 - 1 = 4$ euro.
- Als je niets wint (Kans is $899/1000 = 0,899$) krijg je 0 euro. Het lot wat je gekocht hebt, kostte 1 euro. Dus de winst is $0 - 1 = -1$ euro.

5.3 De verwachtingswaarde [3]

Voorbeeld:

Een loterij heeft 1000 loten. Er is één hoofdprijs van 100 euro. Er zijn 100 troostprijzen van 5 euro. Elk lot kost één euro.

Wat is de verwachte winst van iemand die meedoet aan deze loterij?

Stap 2:

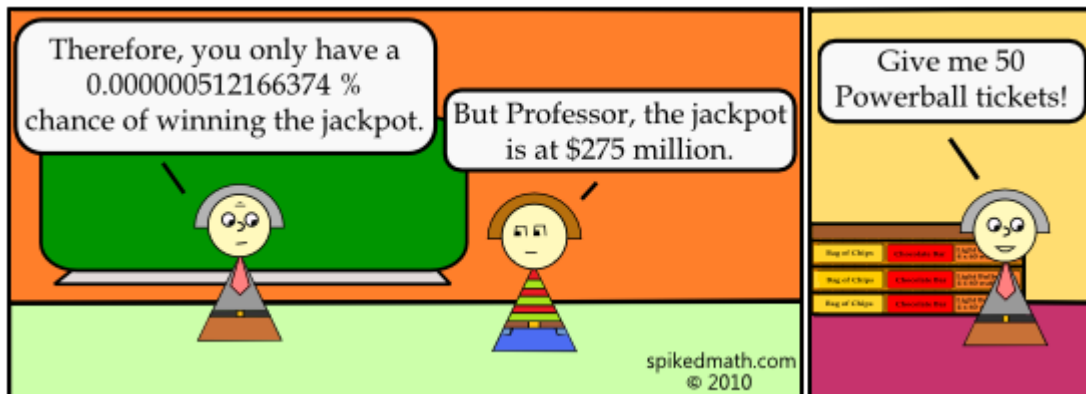
Vermenigvuldig elke mogelijke waarde van W met zijn kans en tel de uitkomsten op. Je berekent nu de **verwachtingswaarde**:

$$E(W) = 99 \cdot 0,001 + 4 \cdot 0,1 - 1 \cdot 0,899 = -0,4$$

Conclusie:

De verwachtingswaarde van -0,4 betekent dat een deelnemer per lot gemiddeld 0,4 euro verliest.

(De organisator van de loterij maakt per lot dus gemiddeld 0,4 euro winst)



5.4 De binomiale verdeling [1]

Bernoulli-experiment = een kansexperiment met slechts **twee** mogelijke uitkomsten. De kans op **succes** is p . De kans op **mislukking** is $1 - p$.

Voorbeelden:

- Gooien met een muntstuk (Kop of munt)
- Beantwoorden meerkeuze vragen (Goed of fout)
- Examen doen (Slagen of zakken)

Voorbeeld :

In een loterij met 40 loten zijn 5 prijzen te winnen. Iemand koopt vier loten. Het winnen van twee prijzen is voor deze persoon een succes.

Bereken p

$$p = P(2 \text{ prijzen}) = \frac{\binom{5}{2} \binom{35}{2}}{\binom{40}{4}} \approx 0,0651$$

5.4 De binomiale verdeling [1]

Binomiaal kansexperiment = Het een aantal keer (n) achter elkaar uitvoeren van hetzelfde Bernoulli experiment.

Voorbeelden:

- 10 keer gooien met een muntstuk
(X = aantal keer munt, $n = 10$, $p = \frac{1}{2}$)
- 20 vierkeuze vragen gokken
(X = aantal vragen goed, $n = 20$, $p = \frac{1}{4}$)
- 12 keer elke maand met loterij het vorige voorbeeld meedoen
(X = aantal keer 2 prijs, $n = 12$, $p = 0,0651$)

In de bovenstaande voorbeelden is X een **binomiale toevalsvariabele**.
 X is **binomiaal verdeeld**. De stochast X geeft het aantal keer succes aan.

5.4 De binomiale verdeling [1]

Voorbeeld:

Iemand beantwoordt 20 vierkeuzevragen. Bereken de kans op 15 goede antwoorden:

$X = \text{aantal juiste antwoorden}$, $n = 20$, $p = \frac{1}{4}$

Stap 1:

De kans op 15 keer succes en 5 keer een mislukking is: $(\frac{1}{4})^{15}(\frac{3}{4})^5$

Stap 2:

Je kunt op een aantal manieren 15 keer succes en 5 keer een mislukking hebben:

- SSSSSSSSSSSSSSSMMMMM, SSSSSMMMMMSSSSSSSSSSS, enz....

In totaal zijn er $\binom{20}{15}\binom{5}{5} = \binom{20}{15}$ mogelijkheden

Stap 3:

$$P(X = 15) = \binom{20}{15} (\frac{1}{4})^{15} (\frac{3}{4})^5$$

5.4 De binomiale verdeling [1]

Voorbeeld:

Iemand beantwoordt n meerkeuzevragen. Bereken de kans op k goede antwoorden:

$X = \text{aantal juiste antwoorden}$, $n = n$, $p = p$

Stap 1:

De kans op k keer succes en $n-k$ keer een mislukking is: $(p)^k(1-p)^{n-k}$

Stap 2:

Je kunt op een aantal manieren n keer succes en $n-k$ keer een mislukking hebben.

In totaal zijn er $\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-k} = \binom{n}{k}$ mogelijkheden

Stap 3:

Dus: $P(X = k) = \binom{n}{k} (p)^k(1-p)^{n-k}$

Verder geldt: $E(X) = n \cdot p$.

5.4 De binomiale verdeling [2]

Voorbeeld 1:

Een schijf heeft vijf sectoren (2 appel, 2 kers en 1 banaan)

Bereken de kans op twee keer banaan in acht beurten:

$X = \text{aantal keer banaan}$, $n = 8$, $p = 0,2$

$$P(X = 2) = \text{binompdf}(8, 0.2, 2) \approx 0,294$$

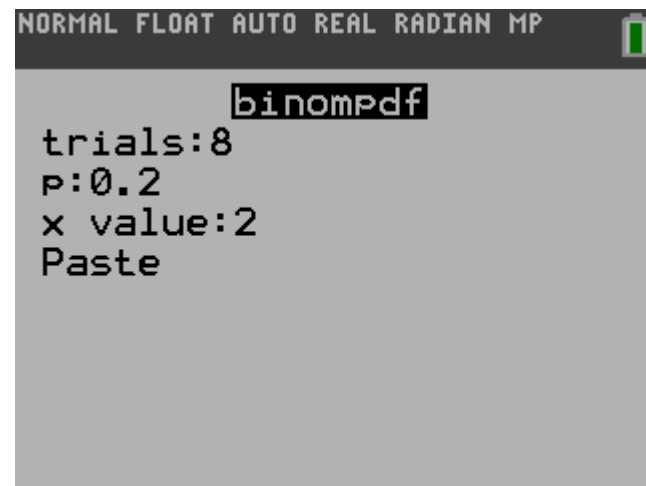
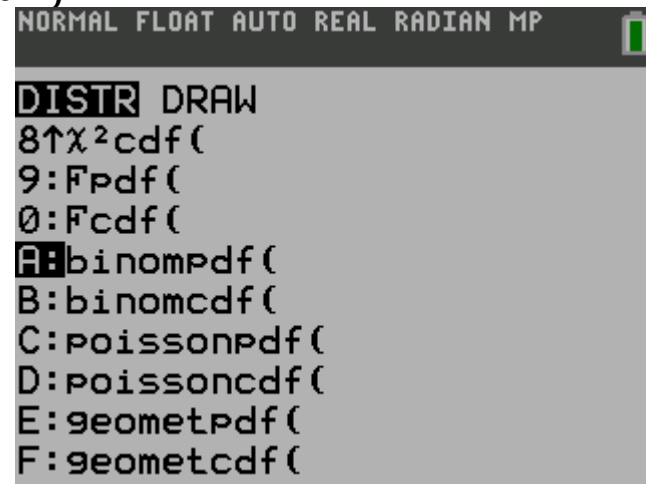
Op de GR: 2ND | VARS | A: binompdf(

Vul bij **trials** 8 in

Vul bij **p** 0.2 in

Vul bij **x value** 2 in.

Enter geeft de uitkomst.



5.4 De binomiale verdeling [2]

Voorbeeld 2:

Een schijf heeft vijf sectoren (2 appel, 2 kers en 1 banaan)

Bereken de kans op hoogstens drie kers in twaalf beurten:

X = aantal keer kers, $n = 12$, $p = 0,4$

$$P(X \leq 3) = \text{binomcdf}(12, 0.4, 3) \approx 0,225$$

Op de GR: 2ND | VARS | B: binomcdf(

Vul bij **trials** 12 in

Vul bij **p** 0.4 in

Vul bij **x value** 3 in.

Enter geeft de uitkomst.



5.4 De binomiale verdeling [3]

Let op:

Cumulatieve binomiale verdeling: $P(X \leq k) = \text{binomcdf}(n, p, k)$

Wanneer je met `binomcdf` werkt, werk je dus altijd met een kans van de vorm $P(X \leq k)$

Voorbeeld 1:

Binomiaal kansexperiment met $n = 25$ en $p = 0,20$ en X = aantal keer succes

$$P(X \leq 7) = \text{binomcdf}(25, 0.20, 7) \approx 0,891$$

Voorbeeld 2:

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \text{binomcdf}(25, 0.20, 7) = 1 - 0,891... \approx 0,109$$

Voorbeeld 3:

$$P(X < 8) = P(X \leq 7) = \text{binomcdf}(25, 0.20, 7) \approx 0,891$$

5.4 De binomiale verdeling [3]

Voorbeeld 4:

Binomiaal kansexperiment met $n = 25$ en $p = 0,20$ en $X =$ aantal keer succes

$$\begin{aligned} P(\text{tussen 5 en 10 keer succes}) &= P(5 < X < 10) = P(6, 7, 8 \text{ of } 9 \text{ keer succes}) = \\ &= P(X \leq 9) - P(X \leq 5) = \text{binomcdf}(25, 0.20, 9) - \text{binomcdf}(25, 0.20, 5) \\ &= 0,982... - 0,616... \approx 0,366 \end{aligned}$$

Voorbeeld 5:

$$\begin{aligned} P(7 \text{ of } 8 \text{ keer succes}) &= \text{binompdf}(25, 0.20, 7) + \text{binompdf}(25, 0.20, 8) \\ &= 0,110... + 0,062... \approx 0,173 \end{aligned}$$

5.4 De binomiale verdeling [4]

Let op:

Tot nu toe was n (aantal keren dat je experiment doet) bekend.

Voorbeeld:

Gooien met muntstuk.

Bereken hoeveel keer je moet gooien zodat de kans op minstens drie keer munt groter dan 98% is.

X = aantal keer munt, $p = 0,5$, n = onbekend

Dus bij welke n geldt: $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$ is groter dan 0.98

Invullen in de GR:

$Y1 = 1 - \text{binomcdf}(X, 0.5, 2)$

$Y2 = 0.98$

Aflezen uit TABLE geeft

$n = 11 \Rightarrow 1 - P(X \leq 2) \approx 0,967$

$n = 12 \Rightarrow 1 - P(X \leq 2) \approx 0,981$

Dus je moet minstens 12 keer gooien.

5.4 De binomiale verdeling [5]

Voorbeeld:

Bereken de kans dat als je 10 keer met een dobbelsteen gooit, er drie keer 1 of 2 ogen, drie keer 3 ogen en vier keer 5 of 6 ogen gegooid wordt.

Er is nu geen sprake van een binomiaal kansexperiment omdat er meer dan 2 uitkomsten zijn. Dit heet een **multinomiaal kansexperiment**. Dit kansexperiment is **multinomiaal verdeeld**. Deze verdeling is een uitbreiding van de binomiale verdeling.

P(drie keer 1 of 2, drie keer 3, vier keer 5 of 6) =

$$\binom{10}{3} \binom{7}{3} \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^4 \approx 0,009$$

Alternatieve notaties:

$$\binom{10}{3} \binom{7}{3} \binom{4}{4} = \frac{10!}{3!3!4!} = \binom{10}{3,3,4}$$

5.5 De poissonverdeling [1]

Voorbeeld 1:

Bij een helpdesk van een bedrijf komen op een ochtend tussen 8 en 9 uur gemiddeld 15 telefoontjes binnen. Wat is de kans dat er op een ochtend tussen 8 en 9 uur, minstens 20 telefoontjes binnenkomen?

Stel dat dit bedrijf 10.000 klanten heeft. De kans dat een willekeurige klant op een ochtend tussen 8 en 9 uur belt is dan $\frac{15}{10.000}$.

Er is nu sprake van een binomiale verdeling met

$X =$ aantal telefoontjes dat binnenkomt

$n = 10.000$

$p = \frac{15}{10.000}$

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - \text{binomcdf}(10.000, \frac{15}{10.000}, 19) \approx 0,125$$

Als je voor n een ander groot getal kiest (p verandert dan ook), krijg je steeds dezelfde uitkomst.

5.5 De poissonverdeling [1]

In het voorbeeld weet je eigenlijk heel weinig. Je weet wel dat er sprake is van een binomiale kans met een zeer groot aantal experimenten en een zeer kleine kans op succes. In dit geval kun je gebruik maken van de **poissonverdeling**:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \text{ voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

e = grondtal van de natuurlijke logaritme ($e \approx 2,718$)

λ = gemiddeld aantal keren succes

λ is de parameter van een poissonverdeelde stochast.

Je gebruikt de poissonverdeling als **alleen** het gemiddelde aantal keren succes bekend is.

Voorbeeld 2:

Bij een helpdesk van een bedrijf komen op een ochtend tussen 8 en 9 uur gemiddeld 15 telefoontjes binnen. Bereken zonder GR de kans dat er op een ochtend tussen 8 en 9 uur, 20 telefoontjes binnenkomen?

$$\lambda = 15$$

$$P(X = 20) = e^{-15} \cdot \frac{15^{20}}{20!} \approx 0,042$$

5.5 De poissonverdeling [1]

Voorbeeld 3:

Bij een helpdesk van een bedrijf komen op een ochtend tussen 8 en 9 uur gemiddeld 15 telefoontjes binnen. Wat is de kans dat er op een ochtend tussen 8 en 9 uur, 20 telefoontjes binnenkomen?

$\lambda = 15$ en $X =$ aantal telefoontjes

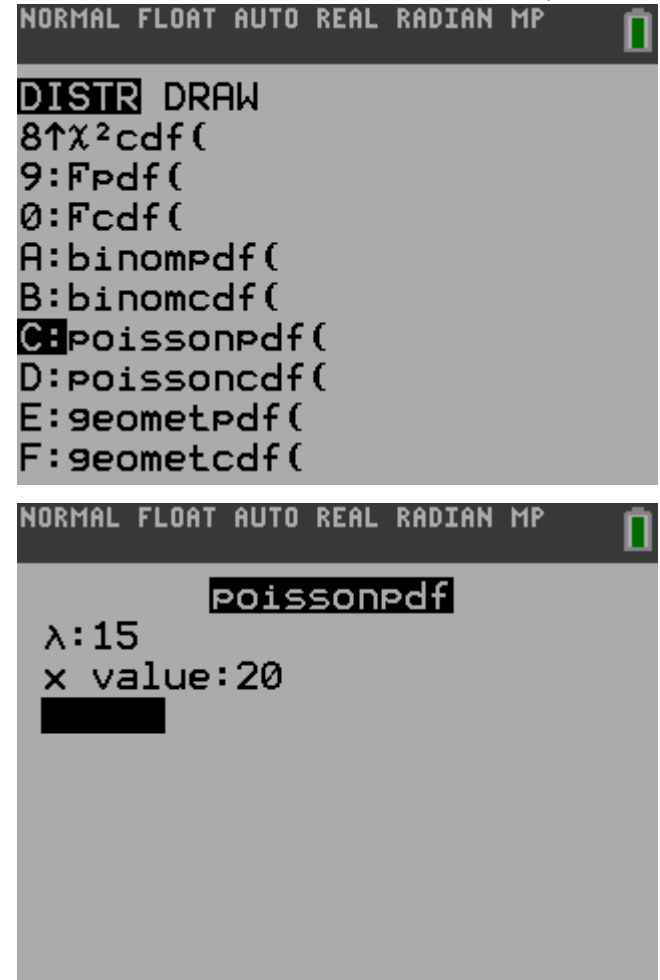
$P(X = 20) = \text{poissonpdf}(15, 20) \approx 0,042$

Op de GR: 2ND | VARS | C: poissonpdf(

Vul bij λ 15 in

Vul bij **x value** 20 in.

Twee keer **Enter** geeft de uitkomst.



5.5 De poissonverdeling [1]

Voorbeeld 3:

Bij een helpdesk van een bedrijf komen op een ochtend tussen 8 en 9 uur gemiddeld 15 telefoontjes binnen. Wat is de kans dat er op een ochtend tussen 8 en 9 uur, minstens 20 telefoontjes binnenkomen?

$\lambda = 15$ en $X =$ aantal telefoontjes

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) =$$
$$1 - \text{poissoncdf}(15, 19) = 1 - 0,875... \approx 0,125$$

Op de GR: 2ND | VARS | D: poissoncdf(

Vul bij λ 15 in

Vul bij x value 19 in.

Twee keer **Enter** geeft de uitkomst.

Let op:

Net als bij binomcdf reken je bij poissoncdf

Uit $P(X \leq ...)$

