

6.0 Voorkennis [1]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de getallenrij 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Dit is de **rij van Fibonacci**. Elke term is de som van de twee voorafgaande termen.

Algemeen: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 1$

Bereken de 12^{de} term van deze rij

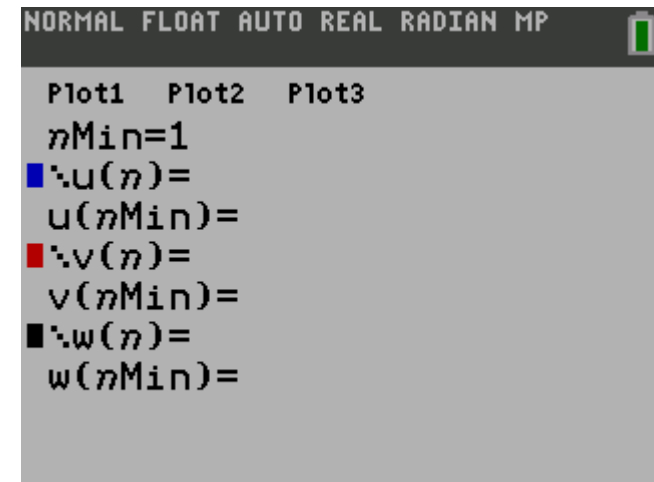
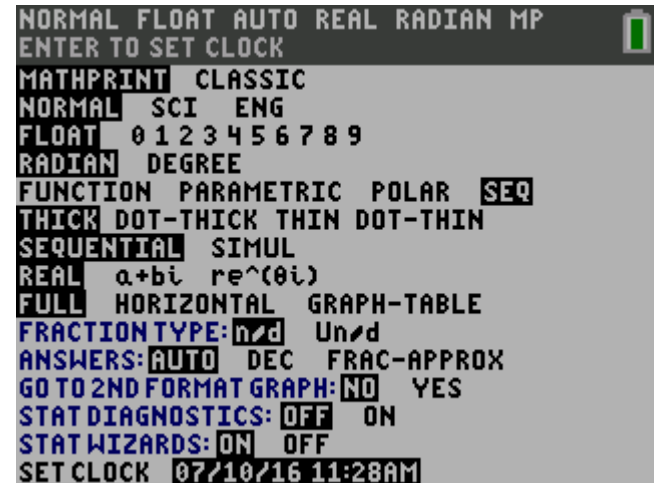
Stap 1:

Zet eerst in het MODE menu de optie SEQ aan.

Stap 2:

Druk op de knop Y=

De indeling van het scherm is nu anders dan normaal.



6.0 Voorkennis [1]

Voorbeeld 1:

Bereken de 12^{de} term van deze rij

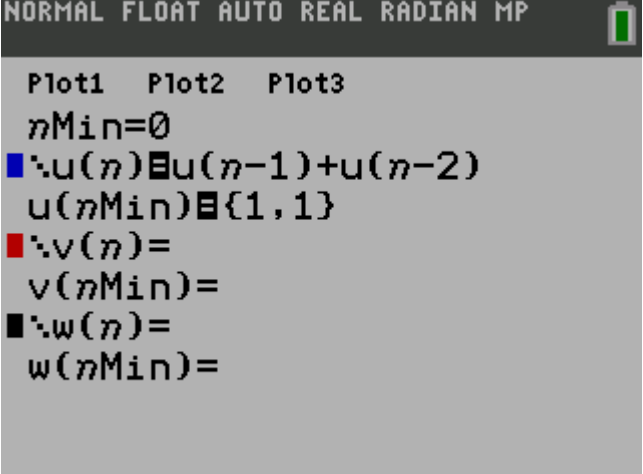
Stap 3:

Vul nu het volgende in:

Bij $nMin$ 0

Bij $u(n)$ $u(n-1) + u(n-2)$

Bij $u(nMin)$ $\{1, 1\}$



```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)+u(n-2)
u(nMin)={1,1}
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=
```

Op de GR krijg je:

u via de toets 2ND | 7

n via de toets die je normaal gebruikt voor de variabele X

$\{$ via de toets 2ND | (

$\}$ via de toets 2ND |)

Je moet bij $u(nMin)$ de eerste twee termen invullen. **Vul eerst de tweede term in en dan de eerste.** Is maar één term nodig, dan hoeft je geen $\{ \}$ te gebruiken.

6.0 Voorkennis [1]

Voorbeeld 1:

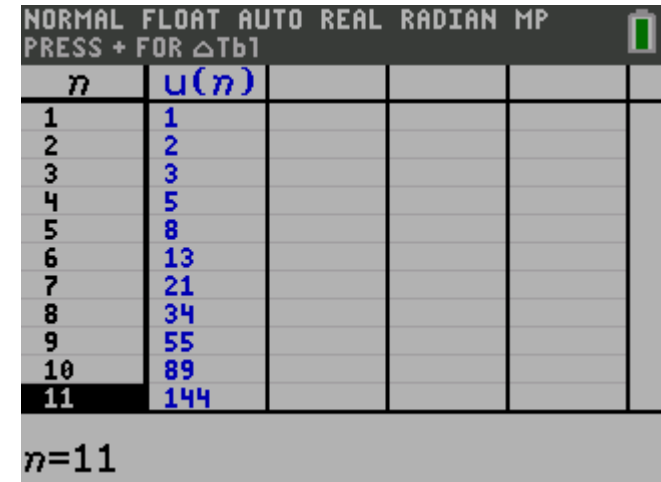
Bereken de 12^{de} term van deze rij

Stap 4:

De uitkomst kun je vinden via **2ND | GRAPH**

De 12^{de} term (u_{11}) heeft de waarde 144.

Als je in het normale scherm $u(11)$ krijg je ook de uitkomst 144.



n	$u(n)$				
1	1				
2	2				
3	3				
4	5				
5	8				
6	13				
7	21				
8	34				
9	55				
10	89				
11	144				

$n=11$

Voorbeeld 2:

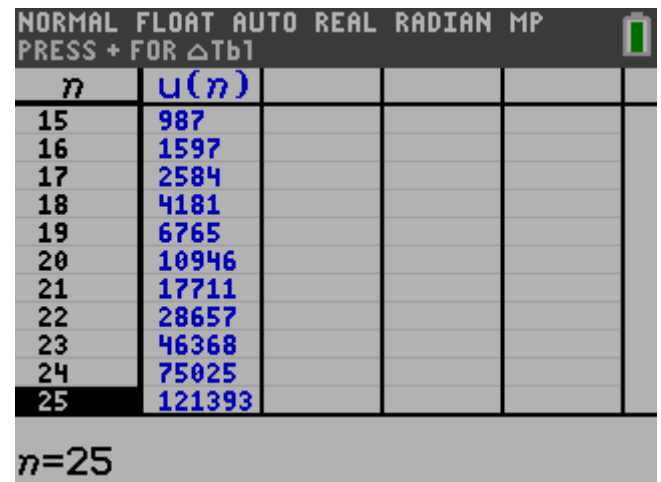
Vanaf welke term geldt bij de Rij van Fibonacci:

$$u_n > 100.000?$$

Uit de tabel volgt:

$$u_{24} = 75.025$$

$$u_{25} = 121.393$$



n	$u(n)$				
15	987				
16	1597				
17	2584				
18	4181				
19	6765				
20	10946				
21	17711				
22	28657				
23	46368				
24	75025				
25	121393				

$n=25$

Vanaf de 26^{ste} term zijn er waarden groter dan 100.000.

6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de recursieve formule: $u_n = 0,4u_{n-1} + 140$.

Dit is een formule van de vorm $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$

Dit is een **differentievergelijking van de eerste orde**.

Er is bij deze formule een lineair verband tussen u_n en u_{n-1} .

Een dergelijke formule wordt een **lineaire differentievergelijking** genoemd.

Als je deze formule invoert, zoals geleerd in de voorkennis zul je zien dat u_n op den duur nadert tot 233,33. Dit is de **grenswaarde** van deze recursieve formule.

6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [1]

Voorbeeld:

Met behulp van de GR kunnen we een **tijdgrafiek** van deze differentievergelijking maken.

Op de horizontale n -as, staat de tijd. Op de verticale as, de hoeveelheid.

Stap 1:

Vul de recursieve formule in bij Y = in de GR.

Neem als startwaarde: $u_0 = 50$.

Stap 2:

Vul in het venster WINDOW het volgende in:

$n_{\text{Min}} = 0$

$n_{\text{Max}} = 15$

$X_{\text{min}} = 0$

$X_{\text{max}} = 15$

$Y_{\text{min}} = 0$

$Y_{\text{max}} = 250$

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
■ %u(n)=0.4u(n-1)+140
u(nMin)={50}
■ %v(n)=
v(nMin)=
■ %w(n)=
w(nMin)=
```

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
WINDOW
nMin=0
nMax=15
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=15
Xscl=1
Ymin=0
↓Ymax=250
```

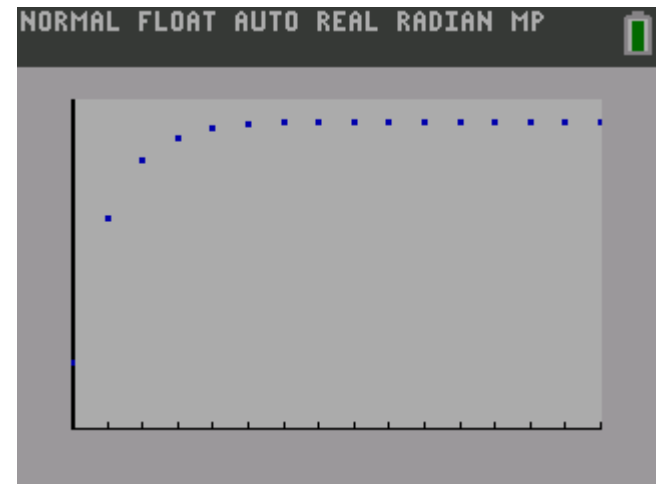
6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [1]

Voorbeeld:

Met behulp van de GR kunnen we een tijdgrafiek van deze differentievergelijking maken. Op de horizontale n -as, staat de tijd. Op de verticale as, de hoeveelheid.

Stap 3:

GRAPH geeft nu de tijdgrafiek.



6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [2]

Voorbeeld 1:

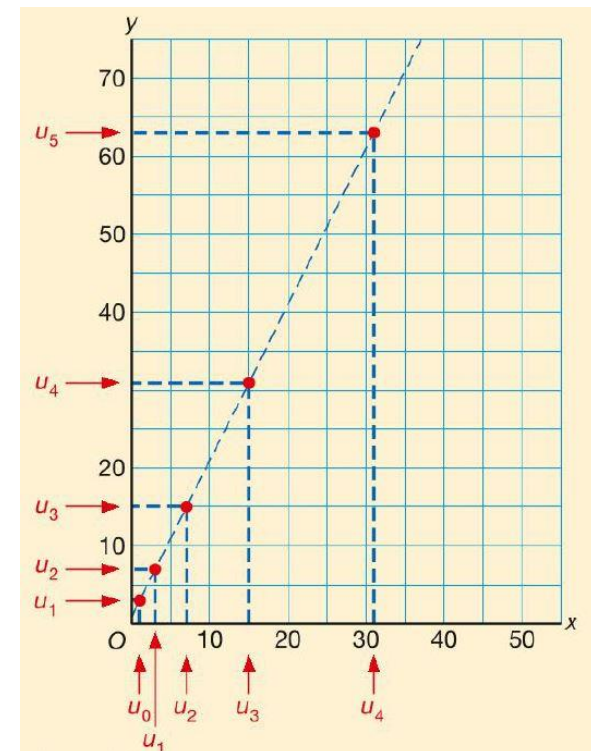
Gegeven is de differentievergelijking $u_n = 2u_{n-1} + 1$ met $u_0 = 1$.

$u_0 = 1$	$u_1 = 3$	$u_2 = 7$	$u_3 = 15$	$u_4 = 31$	$u_5 = 63$	...
$u_1 = 3$	$u_2 = 7$	$u_3 = 15$	$u_4 = 31$	$u_5 = 63$	$u_6 = 127$	...

Je krijgt nu de puntenrij
(1, 3) (3, 7) (7, 15) (15, 31) (31, 63) (63, 127) ...

Bij de rij $u_n = 2u_{n-1} + 1$ geldt nu steeds:
 u_n (y-coördinaat) en u_{n-1} (x-coördinaat).
De punten uit de tabel liggen dus op de
lijn $y = 2x + 1$.

Bij de differentievergelijking $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$
liggen de punten (u_{n-1}, u_n) op de lijn $y = ax + b$



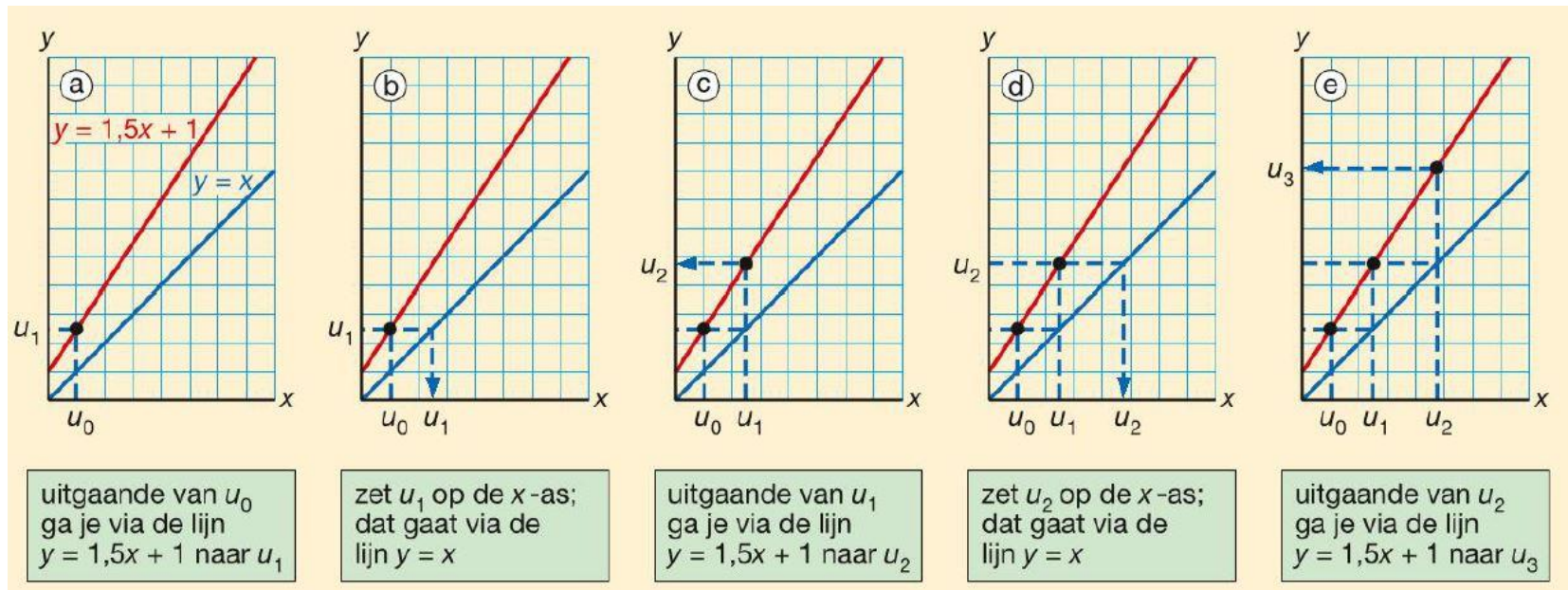
6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de differentievergelijking $u_n = 1,5u_{n-1} + 1$ met $u_0 = 1$.

De punten van deze differentievergelijking liggen op de lijn $y = 1,5x + 1$.

Hieronder staat hoe je bij een bepaalde startwaarde u_0 , snel de andere punten van de lijn kunt tekenen.



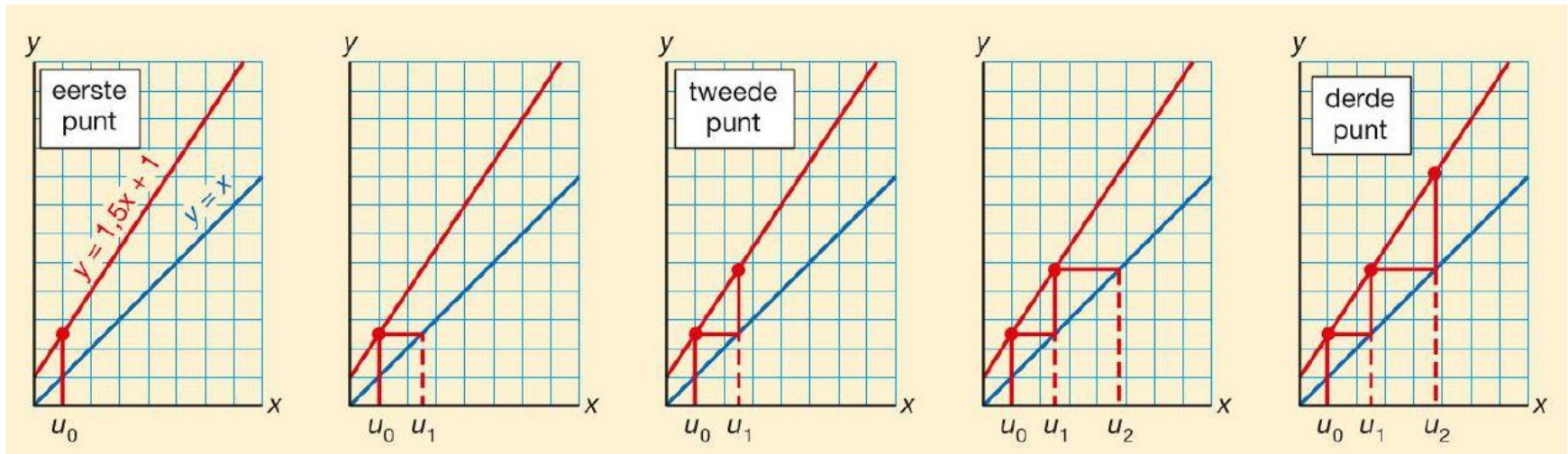
6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de differentievergelijking $u_n = 1,5u_{n-1} + 1$ met $u_0 = 1$.

De punten van deze differentievergelijking liggen op de lijn $y = 1,5x + 1$.

Een andere, eenvoudigere manier, is de onderstaande:

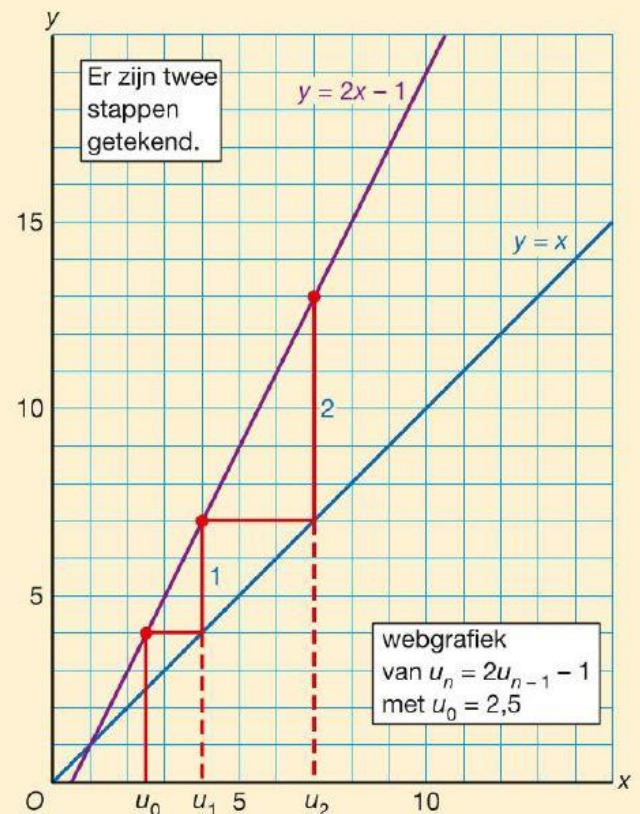
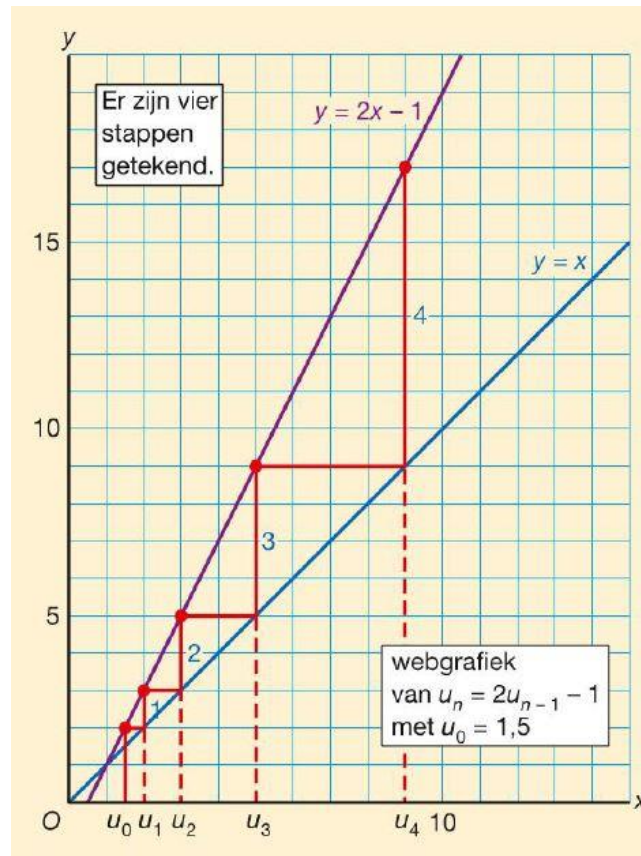


6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [2]

Voorbeeld 3:

Gegeven is de differentievergelijking $u_n = 2u_{n-1} - 1$ met $u_0 = 1,5$.

Links is de **webgrafiek** van deze differentievergelijking getekend.



6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [3]

De webgrafiek van de differentievergelijking $u_n = au_{n-1} + b$ bevat de lijnen $y = ax + b$ en $y = x$.

De x-coördinaat van het snijpunt van deze lijnen heet het **dekpunt**:

Het dekpunt is te berekenen via:

$$ax + b = x$$

$$x - ax = b$$

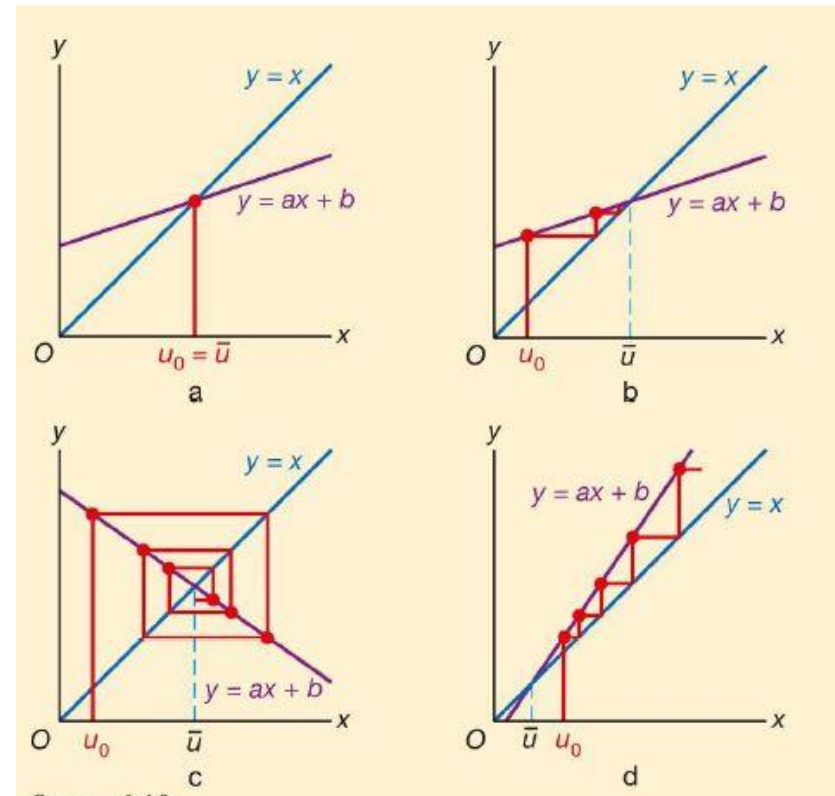
$$(1 - a)x = b$$

$$\bar{u} = x = \frac{b}{1 - a}$$

Afhankelijk van de startwaarde u_0

Krijg je nu:

- een **constante rij** (situatie a);
- een **convergerende rij** met een **stabiel evenwicht** (situatie b en c);
- een **divergerende rij** met een **instabiel evenwicht** (situatie d).



6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [3]

Voorbeeld:

Maak met behulp van de GR een webgrafiek van de differentievergelijking: $u_n = -0,6u_{n-1} + 16$ met $u_0 = 1$.

Stap 1:

Vul de differentievergelijking in bij Y =

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
Y u(n)=-0.6u(n-1)+16
u(nMin)={1}
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=
```

Stap 2:

Selecteer bij 2ND |ZOOM de optie WEB.

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
Time Web uv vw uw
RectGC PolarGC
CoordOn CoordOff
GridOff GridDot GridLine
GridColor: MEDGRAY
Axes: BLACK
LabelOff LabelOn
ExprOn ExprOff
BorderColor: 1
Background: Off
```

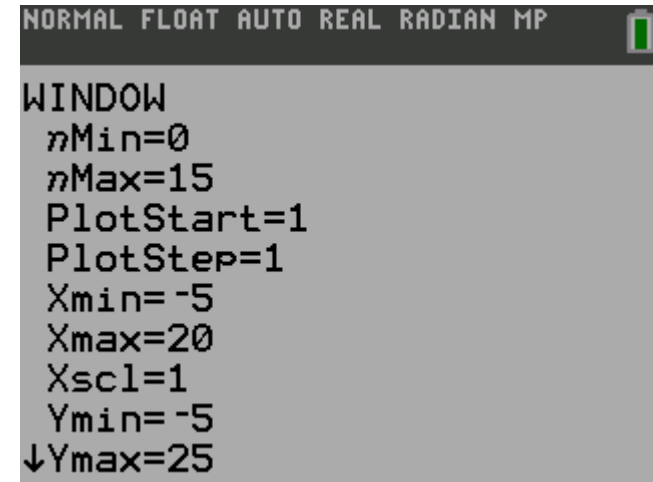
6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [3]

Voorbeeld:

Maak met behulp van de GR een webgrafiek van de differentievergelijking: $u_n = -0,6u_{n-1} + 16$ met $u_0 = 1$.

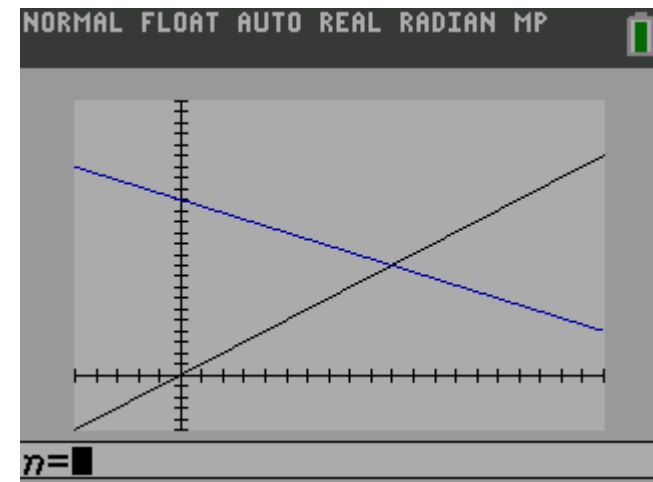
Stap 3:

Vul bij WINDOW het volgende in:



Stap 4:

2ND | TRACE Optie 1: VALUE geeft de twee lijnen, die bij deze webgrafiek horen. Vul voor n het getal 10 in (en herhaal de vierde stap daarna voor de getallen 11 en 12).



6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [3]

Voorbeeld:

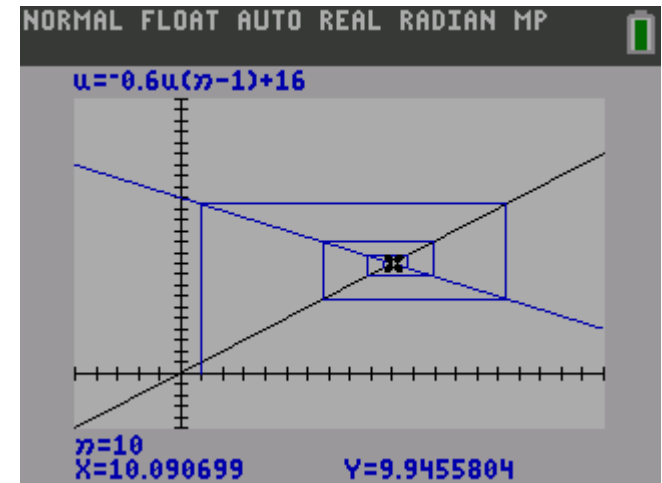
Maak met behulp van de GR een webgrafiek van de differentievergelijking:

$$u_n = -0,6u_{n-1} + 16 \text{ met } u_0 = 1.$$

Stap 5:

Bij de waarde 10 krijg je uitkomsten rond de 10.
Dit is ook bij 11 en 12 het geval.

Hieruit volgt het vermoeden, dat er sprake is van een stabiel evenwicht bij 10.



Een berekening geeft het volgende dekpunt: $\bar{u} = \frac{b}{1-a} = \frac{16}{1+0,6} = 10$

6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [4]

Voorbeeld:

Gegeven is de rij $u_n = 3u_{n-1} + 60$ met $u_0 = 5$

Stel de directe formule van deze rij op:

Stap 1:

Bereken het dekpunt $\bar{u}$

$$\bar{u} = 3\bar{u} - 60$$

$$-2\bar{u} = -60$$

$$\bar{u} = 30$$

Stap 2:

De directe formule van $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ is: $u_n = A \cdot a^n + \bar{u}$

Met $\bar{u}$ als dekpunt en A als constante.

$$u_n = A \cdot 3^n + 30$$

Invullen van $u_0 = 5$ geeft voor A de oplossing $A = -25$

$$u_n = -25 \cdot 3^n + 30$$

6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde [4]

In voorbeelden waar bv. uitsluitend wordt gekeken naar het bedrag dat aan het Begin van het jaar op een spaarrekening staat, is er sprake van een **discreet model**. Je kunt niet berekenen hoeveel er op een ander tijdstip op deze rekening staat met dit model. Omdat de tijd een rol speelt is het een **discreet dynamisch model**.

6.2 Logistische groei [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de volgende differentievergelijking: $P_t = 1,05P_{t-1} = (P_{t-1} + 0,05P_{t-1})$
met $P_0 = 4000$.

Dit kan bijvoorbeeld een populatie zijn van 4000 dieren, die elk jaar met 5% toeneemt.

De jaarlijkse toename is: $0,05P_{t-1}$

De **groeivoet** k is nu gelijk aan 0,05.

In de praktijk zal onder invloed van de omgeving de groei geremd worden, anders zou het aantal dieren oneindig toe kunnen blijven nemen.

De differentievergelijking wordt nu: $P_t = P_{t-1} + 0,05P_{t-1} \cdot \text{remfactor}$.

Voor de remfactor geldt:

- De remfactor ligt tussen 0 en 1;
- De remfactor wordt kleiner naarmate P_{t-1} dichterbij de grenswaarde G ligt.

6.2 Logistische groei [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de volgende differentievergelijking: $P_t = P_{t-1} + 0,05P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{20000}\right)$
met $P_0 = 4000$.

Er is nu sprake van een **lineaire remfactor**.

De exponentiële groei die geremd wordt door een lineaire remfactor heet **logistische groei**.

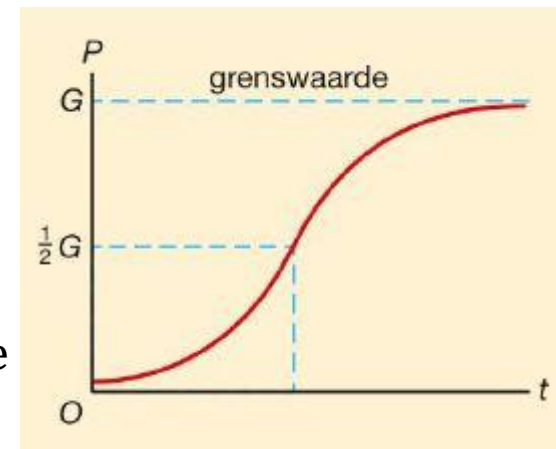
Algemeen:

Bij logistische groei hoort de differentievergelijking

$$P_t = P_{t-1} + k \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{G}\right)$$

met k als groeivoet en G als grenswaarde.

Hiernaast staat de globale grafiek van bovenstaande differentievergelijking.



6.2 Logistische groei [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de differentievergelijking: $P_t = P_{t-1} + 0,5P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{20}\right)$
met $P_0 = 5$.

Er ontstaat nu een puntenrij $(P_0, P_1), (P_1, P_2), (P_2, P_3), \dots$

Elk punt (x, y) van deze rij voldoet aan de bovenstaande differentievergelijking.

Hieruit volgt: $y = x + 0,5x \left(1 - \frac{x}{20}\right) = x + 0,5x - \frac{0,5}{20}x^2 = 1,5x - 0,025x^2$

Alle punten liggen dus op deze bergparabool.

Bereken nu de grenswaarde van deze differentievergelijking

6.2 Logistische groei [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de differentievergelijking: $P_t = P_{t-1} + 0,5P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{20}\right)$
met $P_0 = 5$.

Bereken nu de grenswaarde van deze differentievergelijking

$$1,5x - 0,025x^2 = x$$

$$-0,025x^2 + 0,5x = 0$$

$$x(-0,025x + 0,5) = 0$$

$$x = 0 \vee -0,025x = -0,5$$

$$x = 0 \vee x = \frac{-0,5}{-0,025} = 20$$

Hieruit volgt een **grenswaarde** van **20**.

6.3 Stelsels differentievergelijkingen [1]

Voorbeeld:

Ga uit van een afgesloten gebied waarin 700 prooidieren en 200 roofdieren leven. De dieren beïnvloeden elkaar niet. De populatie prooidieren neemt per maand met 25% toe. De populatie roofdieren neemt per maand met 3% af.

$$P_t = P_{t-1} + \Delta P \text{ met } \Delta P = 0,25P_{t-1} \text{ en } P_0 = 700.$$

$$R_t = R_{t-1} + \Delta R \text{ met } \Delta R = -0,03R_{t-1} \text{ en } R_0 = 200.$$

De **groeivoet** is bij de prooidieren de factor 0,25 en bij de roofdieren de factor -0,03. Doordat de beide soorten dieren elkaar beïnvloeden, passen we het model aan zodat de groeivoeten veranderen.

$$P_t = P_{t-1} + \Delta P \text{ met } \Delta P = (0,25 - 0,0105R_{t-1})P_{t-1} \text{ en } P_0 = 700.$$

$$P_t = P_{t-1} + (0,25 - 0,0015R_{t-1})P_{t-1} = 1,25P_{t-1} - 0,0015R_{t-1}P_{t-1}$$

Naarmate het aantal roofdieren groter wordt zal de groeivoet van de prooidieren kleiner worden en op den duur zelfs negatief worden.

6.3 Stelsels differentievergelijkingen [1]

Voorbeeld:

$R_t = R_{t-1} + \Delta R$ met $\Delta R = (-0,03 + 0,00004P_{t-1})R_{t-1}$ en $R_0 = 200$.

$$R_t = R_{t-1} + (-0,03 + 0,00004P_{t-1})R_{t-1} = 0,97R_{t-1} + 0,00004P_{t-1}R_{t-1}$$

Naarmate het aantal prooidieren groter wordt zal de groeivoet van de roofdieren groter worden en op den duur zelfs positief worden.

De **prooi-roofdiercyclus** is nu samen te vatten met het volgende stelsel van differentievergelijkingen:

$$P_t = 1,25P_{t-1} - 0,0015R_{t-1}P_{t-1}$$

$$R_t = 0,97R_{t-1} + 0,00004P_{t-1}R_{t-1}$$

$$P_0 = 700 \text{ en } R_0 = 200.$$

Als $\Delta P + \Delta R = 0$ is er sprake van een **gesloten systeem**, waarbij het totaal aantal dieren steeds gelijk blijft.

6.3 Stelsels differentievergelijkingen [1]

Voorbeeld:

$$P_t = 1,25P_{t-1} - 0,0015R_{t-1}P_{t-1}$$

$$R_t = 0,97R_{t-1} + 0,00004P_{t-1}R_{t-1}$$

$$P_0 = 700 \text{ en } R_0 = 200.$$

Het plotten van het bovenstaande stelsel van differentievergelijkingen gaat als volgt:

Stap 1:

Vul de recursieve formule in bij Y = in de GR.

Stap 2:

Vul in het venster WINDOW het volgende in:

$$nMin = 0$$

$$nMax = 500$$

$$Xmin = 0$$

$$Xmax = 300$$

$$Ymin = 0$$

$$Ymax = 2500$$

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
▀ %u(n)▀1.25u(n-1)-0.0015v(n-1)u(n-1)
u(nMin)▀{700}
▀ %v(n)▀0.97v(n-1)+0.00004u(n-1)v(n-1)
v(nMin)▀{200}
▀ %w(n)=
w(nMin)=
```

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
WINDOW
nMin=0
nMax=500
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=300
Xscl=1
Ymin=0
↓Ymax=2500
```

6.3 Stelsels differentievergelijkingen [1]

Voorbeeld:

$$P_t = 1,25P_{t-1} - 0,0015R_{t-1}P_{t-1}$$

$$R_t = 0,97R_{t-1} + 0,00004P_{t-1}R_{t-1}$$

$$P_0 = 700 \text{ en } R_0 = 200.$$

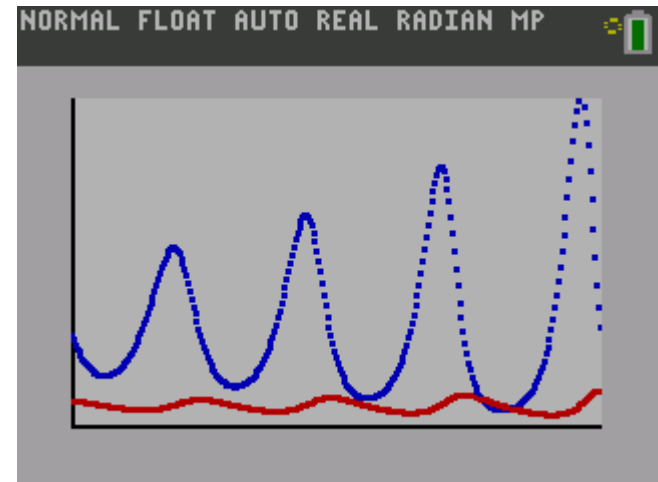
Het plotten van het bovenstaande stelsel van differentievergelijkingen gaat als volgt:

Stap 3:

Nu kun je de tabel en de tijdsgrafiek zien op je GR.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP					
PRESS + FOR Δ Tb1					
n	$u(n)$	$v(n)$			
0	700	200			
1	665	199.6			
2	632.15	198.92			
3	601.56	197.98			
4	573.31	196.81			
5	547.39	195.42			
6	523.78	193.83			
7	502.43	192.08			
8	483.28	190.18			
9	466.24	188.15			
10	451.22	186.01			

$n=0$



6.3 Stelsels differentievergelijkingen [2]

Voorbeeld:

Gegeven is het volgende stelsel van differentievergelijkingen:

$$P_t = 0,8P_{t-1} + 0,04S_{t-1}$$

$$S_t = 0,2P_{t-1} + 0,96S_{t-1}$$

Met $P_0 = 1,2$ en $S_0 = 3,9$ en $t = 0$ in 1990.

P_t = het aantal inwoners in miljoenen op het platteland.

S_t = het aantal inwoners in miljoen in de stad.

Er is sprake van een **gesloten systeem**.

80% van de mensen die in een bepaald jaar op het platteland woont, woont daar het volgende jaar nog steeds. De overige 20% is verhuisd naar de stad.

96% van de mensen die in een bepaald jaar in de stad woont, woont daar het volgende jaar nog steeds. De overige 4% is verhuisd naar het platteland.

Er geldt nu voor elke t : $P_t + S_t = 5,1$

6.3 Stelsels differentievergelijkingen [3]

Voorbeeld:

Gegeven is het volgende stelsel van differentievergelijkingen:

$$P_t = 0,8P_{t-1} + 0,04S_{t-1}$$

$$S_t = 0,2P_{t-1} + 0,96S_{t-1}$$

Met $P_0 = 1,2$ en $S_0 = 3,9$ en $t = 0$ in 1990.

Stel de directe formules van P_t en S_t op.

Stap 1:

Schrijf P_t als een recursieve formule:

Er geldt nu voor elke t : $P_t + S_t = 5,1$ (en dus ook $P_{t-1} + S_{t-1} = 5,1 \Leftrightarrow S_{t-1} = 5,1 - P_{t-1}$)

Hierdoor volgt

$$\begin{aligned} P_t &= 0,8P_{t-1} + 0,04S_{t-1} \\ &= 0,8P_{t-1} + 0,04(5,1 - P_{t-1}) \\ &= 0,8P_{t-1} + 0,204 - 0,04P_{t-1} \\ &= 0,76P_{t-1} + 0,204 \quad \text{met } a = 0,76 \text{ en } b = 0,204 \end{aligned}$$

6.3 Stelsels differentievergelijkingen [3]

Voorbeeld:

Gegeven is het volgende stelsel van differentievergelijkingen:

$$P_t = 0,8P_{t-1} + 0,04S_{t-1}$$

$$S_t = 0,2P_{t-1} + 0,96S_{t-1}$$

Met $P_0 = 1,2$ en $S_0 = 3,9$ en $t = 0$ in 1990.

Er geldt: $P_t = 0,76P_{t-1} + 0,204$ met $a = 0,76$ en $b = 0,204$

Stap 2:

Schrijf P_t als een directe formule:

$$\bar{P} = 0,76\bar{P} + 0,204$$

$$0,24\bar{P} = 0,204$$

$$\bar{P} = 0,85$$

Hieruit volgt: $P_t = A \cdot 0,76^t + 0,85$

Invullen van $P_0 = 1,2$ geeft $A = 0,35$

6.3 Stelsels differentievergelijkingen [3]

Voorbeeld:

Gegeven is het volgende stelsel van differentievergelijkingen:

$$P_t = 0,8P_{t-1} + 0,04S_{t-1}$$

$$S_t = 0,2P_{t-1} + 0,96S_{t-1}$$

Met $P_0 = 1,2$ en $S_0 = 3,9$ en $t = 0$ in 1990.

Op den duur wonen er 0,85 miljoen mensen op het platteland en $5,1 - 0,85 = 4,25$ miljoen in de stad.

Stap 3:

Stel de directe formule van P_t op:

Invullen van $P_t = 0,85 + 0,35 \cdot 0,76^t$ in $S_t = 5,1 - P_t$ geeft:

$$S_t = 5,1 - 0,85 - 0,35 \cdot 0,76^t = 4,25 - 0,35 \cdot 0,76^t$$

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde [1]

Algemeen:

Gegeven is de recursieve formule van de lineaire differentievergelijking van de eerste orde: $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ met beginterm u_0 .

Een recursieve formule van de vorm: $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ met $b \neq 0$ is een **lineaire differentievergelijking van de tweede orde**.

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde [1]

Voorbeeld:

Stel de directe formule op bij de rij $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 4$

Stap 1:

Substitueer $u_n = g^n$ en herleid de vergelijking tot de vorm $g^2 - ag - b = 0$.

$$g^n = g^{n-1} + 2g^{n-2}$$

$$g^2 = g + 2$$

$$g^2 - g - 2 = 0$$

Stap 2:

Los de nu ontstane vergelijking op:

$$(g - 2)(g + 1) = 0$$

$$g = 2 \vee g = -1$$

Let op:

Dit is een vergelijking met **twee reële** oplossingen. Bij gebruik van de discriminantmethode krijg je **$D > 0$** .

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde [1]

Voorbeeld:

Stel de directe formule op bij de rij $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 4$

Stap 3:

Stel nu $u_n = A \cdot (g_1)^n + B \cdot (g_2)^n$ en bereken A en B door de startwaarden u_0 en u_1 te gebruiken. g_1 en g_2 zijn de gevonden oplossingen uit stap 2.

$$u_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$$

$$u_0 = 5 \text{ geeft } A \cdot 2^0 + B \cdot (-1)^0 = 5, \text{ dus } A + B = 5$$

$$u_1 = 4 \text{ geeft } A \cdot 2^1 + B \cdot (-1)^1 = 4, \text{ dus } 2A - B = 4$$

$$A + B = 5 \Leftrightarrow B = 5 - A$$

Invullen in de andere vergelijking geeft:

$$2A - B = 4 \Leftrightarrow$$

$$2A - (5 - A) = 4$$

$$2A - 5 + A = 4$$

$$3A = 9$$

$$A = 3 \text{ (invullen geeft } B = 2)$$

$$u_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n$$

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde [2]

Voorbeeld:

Stel de directe formule op bij de rij $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 3$

Stap 1:

Substitueer $u_n = g^n$ en herleid de vergelijking tot de vorm $g^2 - ag - b = 0$.

$$g^n = 4g^{n-1} - 4g^{n-2}$$

$$g^2 = 4g - 4$$

$$g^2 - 4g + 4 = 0$$

Stap 2:

Los de nu ontstane vergelijking op:

$$(g - 2)(g - 2) = 0$$

$$g = 2$$

Let op:

Dit is een vergelijking met **een reële** oplossing. Bij gebruik van de discriminantmethode krijg je **$D = 0$** .

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde [2]

Voorbeeld:

Stel de directe formule op bij de rij $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 3$

Stap 3:

Stel nu $u_n = (A + Bn) \cdot g^n$ en bereken A en B door de startwaarden u_0 en u_1 te gebruiken. g is de gevonden oplossing uit stap 2.

$$u_n = (A + Bn) \cdot 2^n$$

$$u_0 = 1 \text{ geeft } (A + B \cdot 0) \cdot 2^0 = 1, \text{ dus } A = 1$$

$$u_1 = 3 \text{ geeft } (A + B \cdot 1) \cdot 2^1 = 3, \text{ dus } 2(A + B) = 3 \Leftrightarrow A + B = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } B = \frac{1}{2}$$

$$u_n = (1 + \frac{1}{2}n) \cdot 2^n$$

Let op:

Bij een vergelijking met **geen reële** oplossingen krijg je bij gebruik van de Discriminantmethode $D < 0$.

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde [3]

Voorbeeld:

Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} & (1) \\ y_n = -x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases} \text{ met } x_0 = 10 \text{ en } y_0 = 20.$$

Stel de directe formule op van x_n .

Stap 1:

Herschrijf het stelsel van vergelijkingen tot één lineaire differentievergelijking.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n & (2) \\ y_n = -x_{n-1} + 4y_{n-1} & (3) \end{cases}$$

Invullen van (3) in (2) geeft:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2(-x_{n-1} + 4y_{n-1}) \\ x_{n+1} &= x_n - 2x_{n-1} + 4 \cdot 2y_{n-1} & (4) \end{aligned}$$

Herschrijven van (1) geeft:

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ 2y_{n-1} &= x_n - x_{n-1} & (5) \end{aligned}$$

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde [3]

Voorbeeld:

Invullen van (5) in (4) geeft:

$$x_{n+1} = x_n - 2x_{n-1} + 4(x_n - x_{n-1})$$

$$x_{n+1} = x_n - 2x_{n-1} + 4x_n - 4x_{n-1}$$

$$x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1}$$

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$$

Stap 2:

Substitueer $u_n = g^n$ en herleid de vergelijking tot de vorm $g^2 - ag - b = 0$.

$$g^n = 5g^{n-1} - 6g^{n-2}$$

$$g^2 = 5g - 6$$

$$g^2 - 5g + 6 = 0$$

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde [3]

Voorbeeld:

Stap 3:

Los de nu ontstane vergelijking op:

$$(g - 2)(g - 3) = 0$$

$$g = 2 \vee g = 3$$

Let op:

Dit is een vergelijking met **twee reële** oplossingen. Bij gebruik van de discriminantmethode krijg je $D > 0$.

Stap 4:

Bereken de waarde van x_1 .

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

$$x_0 = 10 \text{ en } y_0 = 20 \text{ geeft } x_1 = 10 + 2 \cdot 20 = 50 \quad \text{Invullen in (1)}$$

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde [3]

Voorbeeld:

Stap 5:

Stel nu $u_n = A \cdot (g_1)^n + B \cdot (g_2)^n$ en bereken A en B door de startwaarden x_0 en x_1 te gebruiken. g_1 en g_2 zijn de gevonden oplossingen uit stap 3.

$$u_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

$$x_0 = 10 \text{ geeft } A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 = 10, \text{ dus } A + B = 10$$

$$x_1 = 50 \text{ geeft } A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 = 50, \text{ dus } 2A + 3B = 50$$

$$A + B = 10 \Leftrightarrow B = 10 - A$$

Invullen in de andere vergelijking geeft:

$$2A + 3B = 50 \Leftrightarrow$$

$$2A + 3(10 - A) = 50$$

$$2A + 30 - 3A = 50$$

$$-A = 20$$

$$A = -20 \text{ (invullen geeft } B = 30)$$

$$u_n = -20 \cdot 2^n + 30 \cdot 3^n$$