

7.0 Voorkennis

Definitie = Een afspraak, die niet bewezen hoeft te worden.

Voorbeeld definitie:

- Een **gestrekte hoek** is een hoek van 180° ;
- Een **rechte hoek** is een hoek van 90° ;
- Een **parallellogram** is een vierhoek waarvan beide paren overstaande zijden evenwijdig zijn;
- Een **ruit** is een vierhoek met vier gelijke zijden;
- Een **rechthoek** is een vierhoek met vier rechte hoeken;
- Een **vierkant** is een ruit die tevens een rechthoek is.

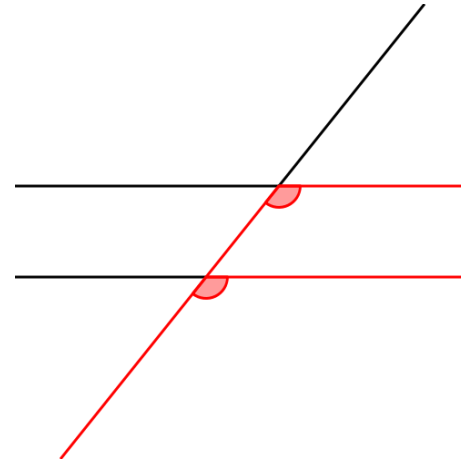
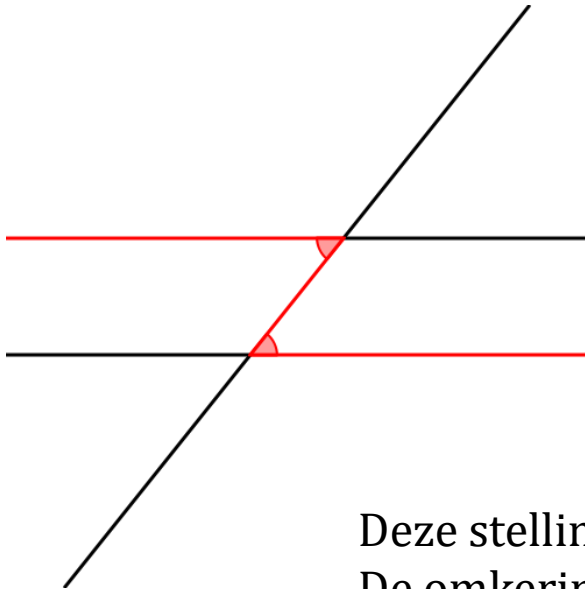
Stelling = Een eigenschap, die bewezen moet worden. Voor het bewijs kun je alle bekende definities en eerder bewezen stellingen gebruiken.

Bij het **vermoeden** dat een bepaalde meetkundige eigenschap geldt, is het voldoende om met één tegenvoorbeeld aan te tonen dat dit vermoeden niet juist is. Dit doe je als het je niet lukt om een vermoeden te bewijzen.

7.0 Voorkennis

Voorbeelden stellingen:

Twee evenwijdige lijnen worden gesneden door een derde lijn. De twee rode hoeken (**F-hoeken**) zijn gelijk. Stelling geldt ook omgekeerd.



Twee evenwijdige lijnen worden gesneden door een derde lijn. De twee rode hoeken (**Z-hoeken**) zijn gelijk. Stelling geldt ook omgekeerd.

Deze stellingen zijn **omkeerbare stellingen**.
De omkering van de stellingen is ook waar.

7.0 Voorkennis

Voorbeelden stellingen:

- Bij twee snijdende lijnen zijn de **overstaande hoeken** even groot;
- De som van de hoeken van een driehoek is 180° (**hoekensom driehoek**);
- Een **buitenhoek van een driehoek** is gelijk aan de som van de twee niet-aanliggende binnendriehoeken;
- De som van de hoeken van een vierhoek is 360° (**hoekensom vierhoek**);
- In een **parallellogram** zijn de overstaande hoeken even groot;
- Als in een vierhoek twee paar overstaande hoeken even groot zijn, dan is de vierhoek een **parallellogram**;
- Een **rechthoek** is tevens een parallellogram;
- Als in een parallellogram een hoek recht is, dan is het parallellogram een **rechthoek**.

Let op:

- Definities mag je altijd gebruiken bij het bewijzen van stellingen;
- Als een stelling eenmaal bewezen is, mag je deze zonder bewijs opnieuw gebruiken.

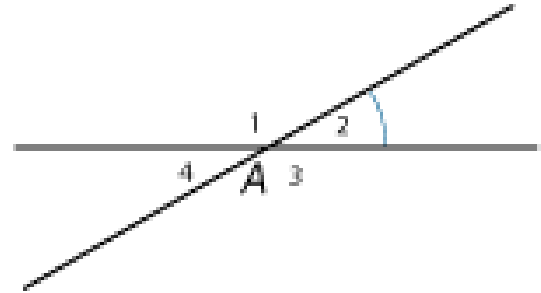
7.0 Voorkennis

Voorbeeld:

Bewijs de stelling van de overstaande hoeken.

Gegeven:

Twee lijnen die elkaar snijden in A .



Te bewijzen:

$$\angle A_1 = \angle A_3 \text{ en } \angle A_2 = \angle A_4$$

Bewijs:

$$\angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte } \angle \text{)}$$

$$\angle A_3 + \angle A_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte } \angle \text{)}$$

$$\text{Hieruit volgt: } \angle A_1 = \angle A_3$$

$$\text{Op dezelfde manier kan bewezen worden: } \angle A_2 = \angle A_4$$

Let op:

- Schrijf eerst op wat gegeven is;
- Noteer dan wat je moet bewijzen;
- Geef dan het bewijs en licht elke stap toe.

7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken [1]

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben	
twee paren hoeken (hh)	
een paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden (zhz)	
de verhouding van de zijden (zzz)	
een paar rechte hoeken en de verhouding van twee niet-omliggende zijden ($z zr$)	

Gelijkvormige driehoeken ($\sim$) hebben dezelfde vorm

7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken [1]

Voorbeeld 1:

Toon aan dat $\triangle PQR$ gelijkvormig is met $\triangle PST$

Gegeven:

$\triangle PQR$ met $\angle Q = 90^\circ$ en $\triangle PST$ met $\angle S = 90^\circ$

Te bewijzen:

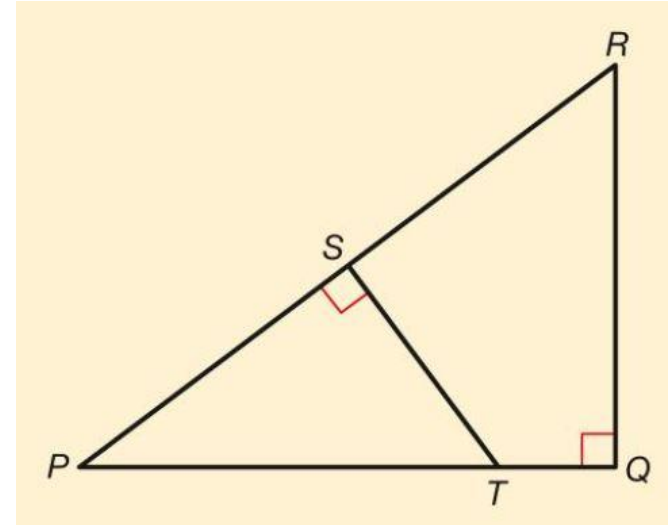
$\triangle PQR \sim \triangle PST$

Bewijs:

$\angle P = \angle P$ ($\angle P$ ligt in beide driehoeken)

$\angle Q = \angle S = 90^\circ$

Hieruit volgt $\triangle PQR \sim \triangle PST$ (hh).



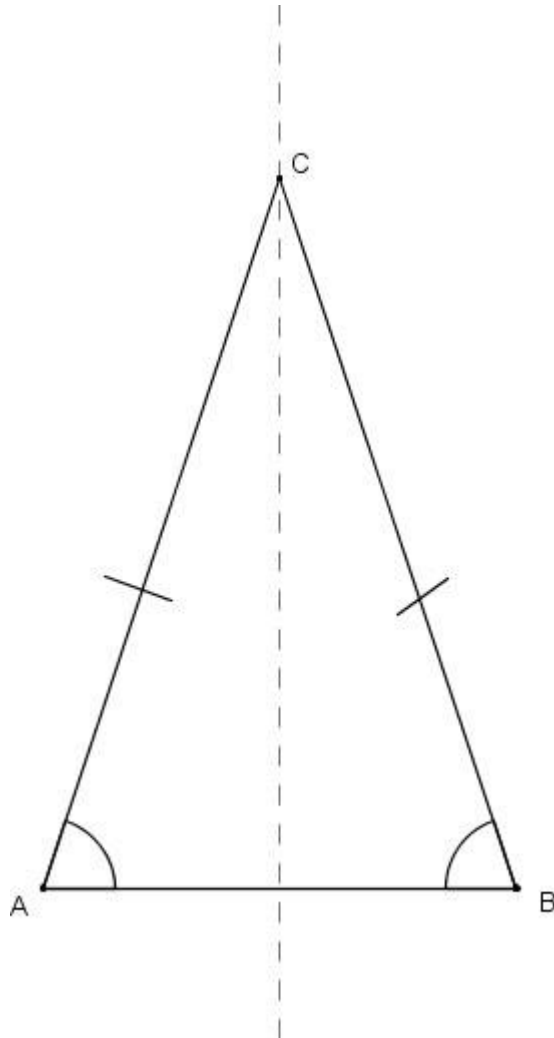
7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken [1]

Twee driehoeken zijn congruent als ze gelijk hebben	
een zijde en twee aanliggende hoeken (HZH)	
een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek (ZHH)	
twee zijden en de ingesloten hoek (ZHZ)	
alle zijden (ZZZ)	
twee zijden en een rechte hoek tegenover een van die zijden (ZZR)	

Let op:

Congruente driehoeken ($\cong$) zijn niet alleen gelijkvormig maar ook even groot.

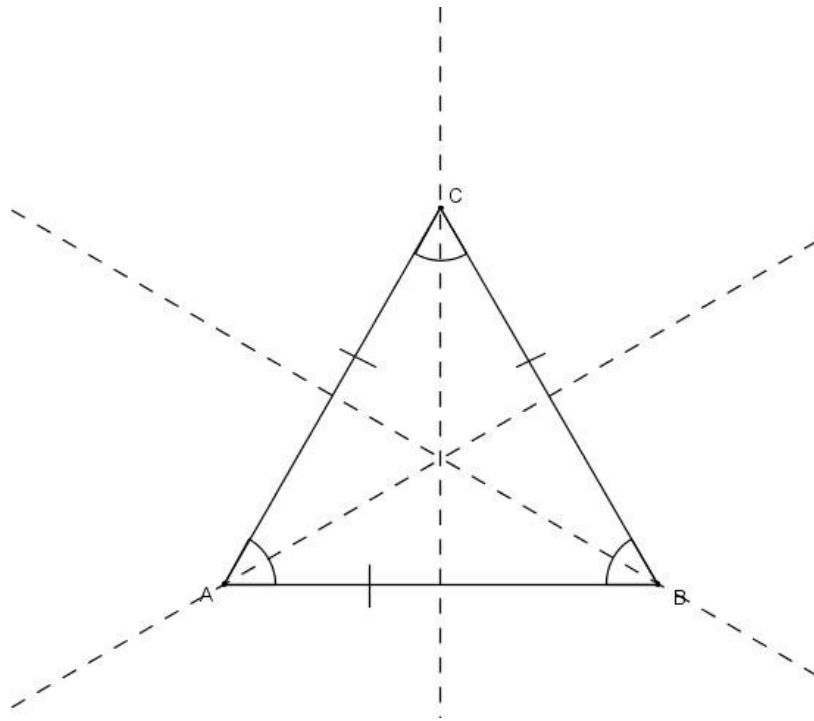
7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken [1]



Gelijkbenige driehoek:

- 2 gelijke zijden (**benen**);
- De andere zijde heet de **basis**;
- 2 gelijke **basishoeken**;
- De ander hoek heet de **tophoek**.

7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken [1]



Gelijkzijdige driehoek:

- 3 gelijke zijden;
- Elke hoek is 60° .

7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken [1]

Voorbeeld 1:

Bewijs de stelling dat in een gelijkbenige driehoek de hoeken tegenover de even lange zijden even groot zijn.

Gegeven:

$\triangle ABC$ met $AC = BC$

Te bewijzen:

$\angle A = \angle B$

Bewijs:

Teken CD loodrecht op AB .

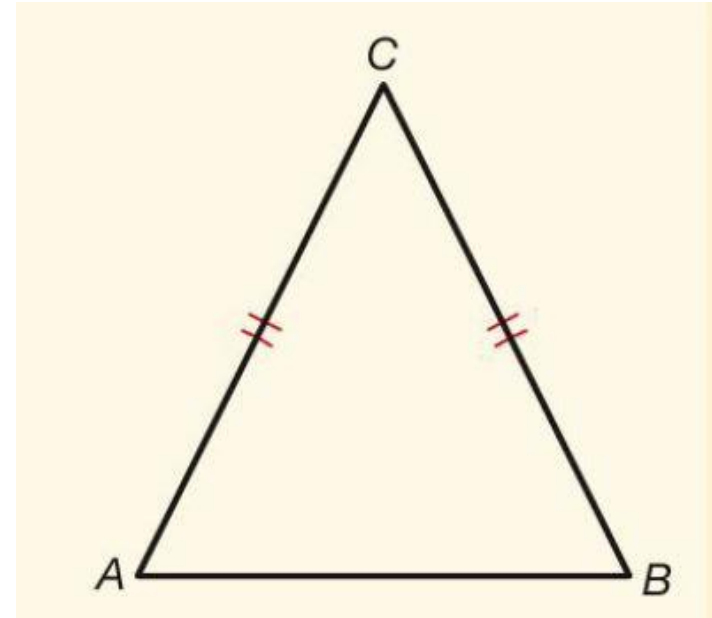
$AC = BC$ (gegeven)

$CD = CD$

$\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$

Hieruit volgt $\triangle ADC \sim \triangle BDC$ (ZZR).

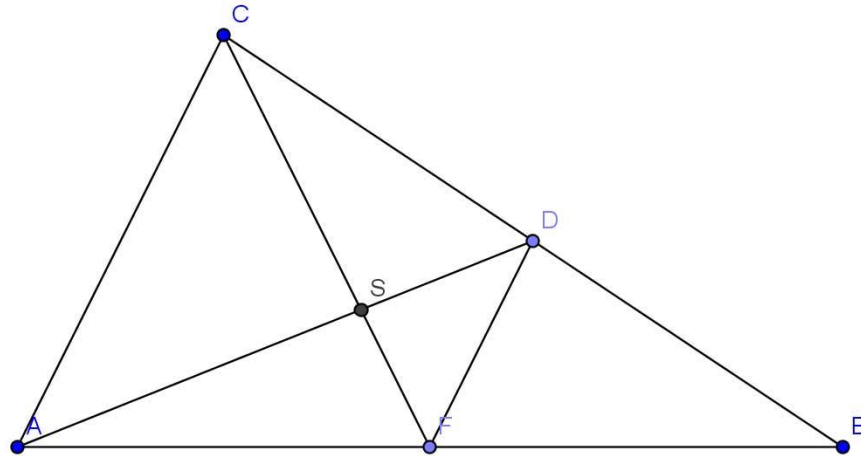
Dit betekent $\angle A = \angle B$



7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken [2]

Voorbeeld:

Bewijs dat de zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan.



Gegeven:

$\triangle ABC$ met de zwaartelijnen AD , BE en CF

Te bewijzen:

AD , BE en CF gaan door één punt S .

7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken [2]

Voorbeeld:

Bewijs dat de zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan.

Bewijs:

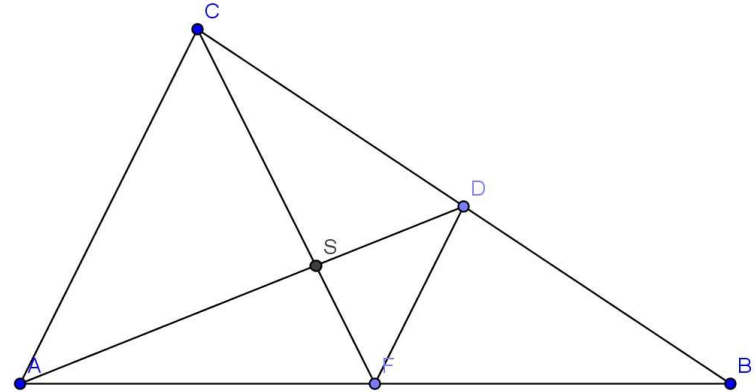
AD en CF snijden elkaar in S .

$AB : FB = 2 : 1$ (F is het midden van AB)

$BC : BD = 2 : 1$ (D is het midden van BC)

$\angle B = \angle B$

Via zhz volgt nu dat $\triangle ABC$ en $\triangle FBD$ gelijkvormig zijn.



Doordat $\triangle ABC$ en $\triangle FBD$ gelijkvormig zijn geldt: $AC : FD = 2 : 1$ en $\angle CAB = \angle DFB$.

Via Z-hoeken volgt nu $AC \parallel FD$

$\angle ACS = \angle DFS$ (Z-hoeken)

$\angle ASC = \angle DSF$ (overstaande hoeken)

Via hh volgt nu dat $\triangle ACS$ en $\triangle DFS$ gelijkvormig zijn.

$AC : FD = 2 : 1$ en dus ook $AS : DS = 2 : 1$

7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken [2]

Voorbeeld:

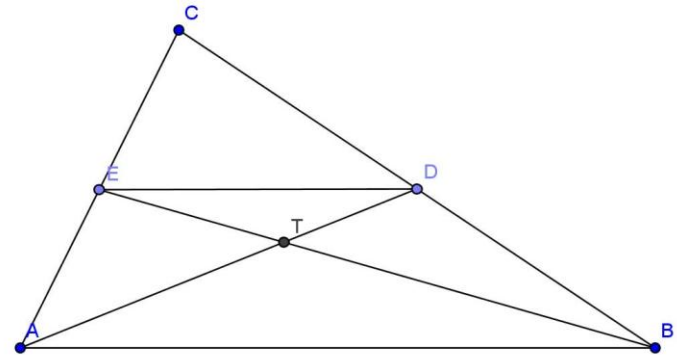
Bewijs het vermoeden dat de drie zwaartelijnen in een driehoek door één punt gaan.

Op dezelfde manier zoals zojuist is nu
Te bewijzen dat $AT : DT = 2 : 1$

Er zijn nu twee zaken bewezen:

$$AS : DS = 2 : 1$$

$$AT : DT = 2 : 1$$



Op AD kan slechts één punt P liggen met $AP : DP = 2 : 1$
Dus S en T zijn hetzelfde punt.

Het snijpunt S van AD en CF valt dus samen met het snijpunt T van AD en BE .

De zwaartelijnen AD , BE en CF gaan dus door één punt.

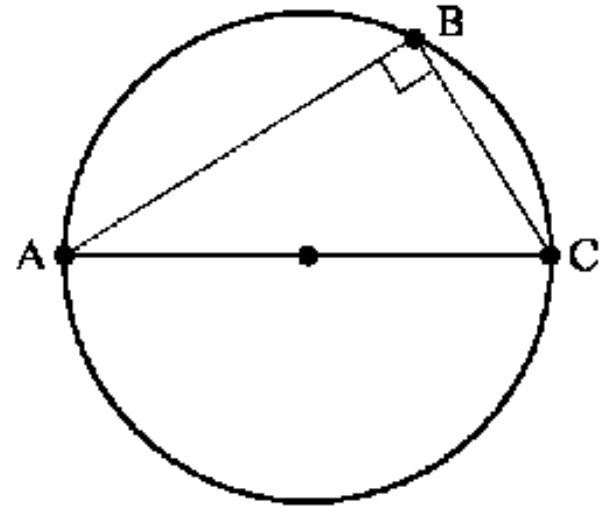
7.2 Bewijzen in cirkels [1]

Stelling van Thales:

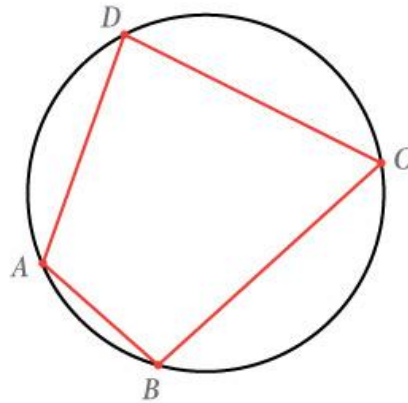
Als $\triangle ABC$ rechthoekig is in B ,
dan ligt B op de cirkel met middellijn AC .

Omgekeerde stelling van Thales:

Als van $\triangle ABC$ de zijde AC middellijn
van een cirkel is en punt B op die cirkel ligt,
dan is de $\triangle$ rechthoekig in C .



7.2 Bewijzen in cirkels [2]



Definitie koordenvierhoek:

Een koordenvierhoek is een vierhoek waarvan de hoekpunten op één cirkel liggen.

Koordenvierhoekstelling:

Als $ABCD$ een koordenvierhoek is, dan is de som van elk paar overstaande hoeken 180° .

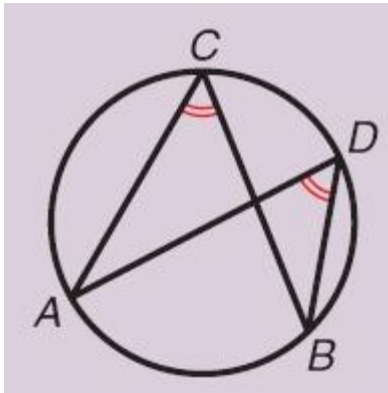
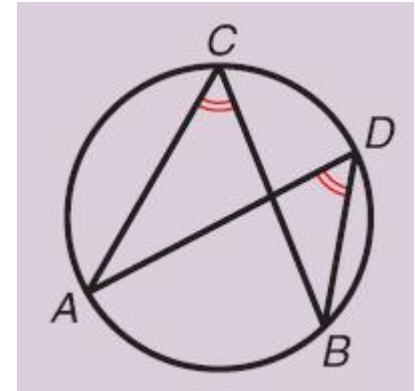
Omgekeerde koordenvierhoekstelling:

Als in een vierhoek de som van een paar overstaande hoeken 180° is, dan is het een koordenvierhoek.

7.2 Bewijzen in cirkels [3]

Stelling van de constante hoek:

Voor de punten C en D op dezelfde cirkelboog AB geldt: $\angle ACB = \angle ADB$.



Omgekeerde stelling van de constante hoek:

Als punt D aan dezelfde kant van AB ligt als punt C en $\angle ADB = \angle ACB$, dan liggen C en D op dezelfde cirkelboog AB .

7.2 Bewijzen in cirkels [3]

Opgave 24:

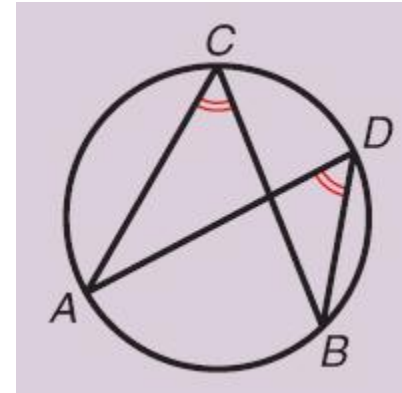
Bewijs de stelling van de constante hoek.

Gegeven:

De punten C en D op dezelfde cirkelboog AB .

Te bewijzen:

$$\angle ACB = \angle ADB$$



Aanpak:

Merk op dat de punten A , B , C en D op dezelfde cirkel liggen. Teken een punt E op De cirkelboog waarop niet de punten C en D liggen.

Bewijs:

$$\angle ACB + \angle AEB = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek AEBC)}$$

$$\angle ADB + \angle AEB = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek ADBE)}$$

Hieruit volgt: $\angle ACB = \angle ADB$

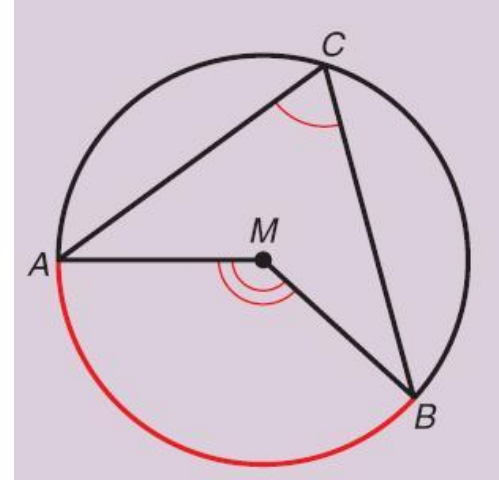
7.2 Bewijzen in cirkels [3]

Definitie:

Als A , B en C op een cirkel liggen met middelpunt M , dan is $\angle ACB$ een **omtrekshoek** op de boog AB waar C niet op ligt.

$\angle AMB$ is de bijbehorende **middelpuntshoek**.

De lijnstukken AC en BC zijn **koorden**. De eindpunten van deze lijnstukken liggen op de cirkel.



Stelling van de omtrekshoek:

Een omtrekshoek is de helft van de bijbehorende middelpuntshoek, die dezelfde koorde insluit als die omtrekshoek.

Stelling boog en koorde:

In een cirkel behoren gelijke bogen bij gelijke koorden.

7.2 Bewijzen in cirkels [3]

Voorbeeld 1 (Opgave 26 aangepast):

Bewijs dat geldt: $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB$.

Gegeven:

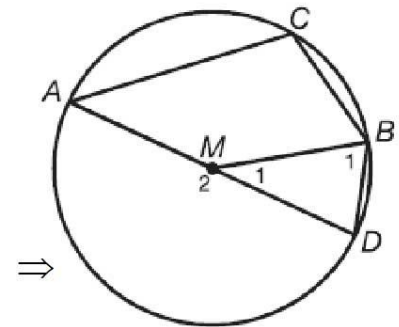
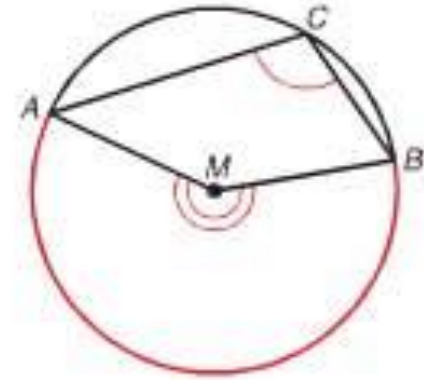
De punten A , B en C op de cirkel met middelpunt M zoals hiernaast.

Te bewijzen:

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB$$

Aanpak:

Het plaatje bevat weinig informatie. Trek de lijn AM door zodat middellijn AD ontstaat. Op deze manier ontstaat een koorden-vierhoek. Hier geldt dat: $\angle C + \angle D = 180$ graden. $\triangle MBD$ is gelijkbenig. Op deze manier kan dus een verband gelegd worden Tussen $\angle C$, $\angle D$, $\angle B_1$ en $\angle M_1$.



7.2 Bewijzen in cirkels [3]

Voorbeeld 1 (Opgave 26 aangepast):

Bewijs dat geldt: $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB$.

Bewijs:

$\angle D = 180^\circ - \angle C$ (koordenvierhoek)

$\angle B_1 = \angle D$ (gelijkbenige Δ)

$\angle M_1 + \angle D + \angle B_1 = 180^\circ$ ($\angle$ -som Δ)

Hieruit volgt:

$\angle M_1 + 180^\circ - \angle C + 180^\circ - \angle C = 180^\circ$

$\angle M_2 = 180^\circ$ (gestrekte $\angle$)

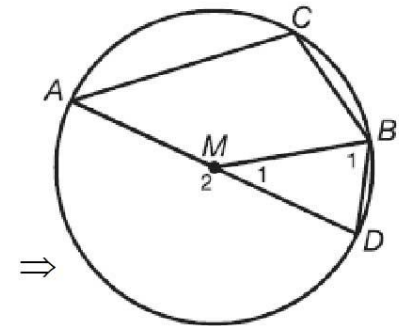
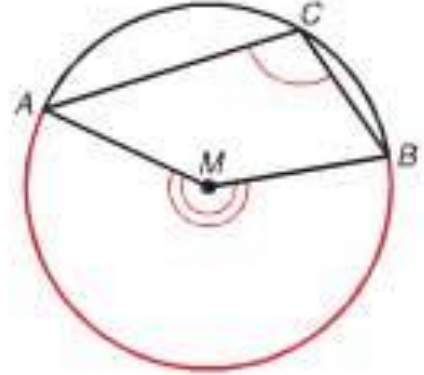
Hieruit volgt:

$\angle M_1 + \angle M_2 - \angle C + 180^\circ - \angle C = 180^\circ$

$\angle M_{12} = 2\angle C$

$\frac{1}{2}\angle M_{12} = \angle C$

$\frac{1}{2}\angle AMB = \angle ACB$



7.2 Bewijzen in cirkels [3]

Voorbeeld 2:

Bewijs dat in het plaatje hiernaast geldt dat de drie omgeschreven cirkels van de gelijkzijdige driehoeken door één punt T gaan.

Dit punt ligt binnen $\triangle ABC$.

Gegeven:

$\triangle ABC$ met de naar buiten gerichte gelijkzijdige driehoeken BCP , ACQ en ABR zoals hiernaast.

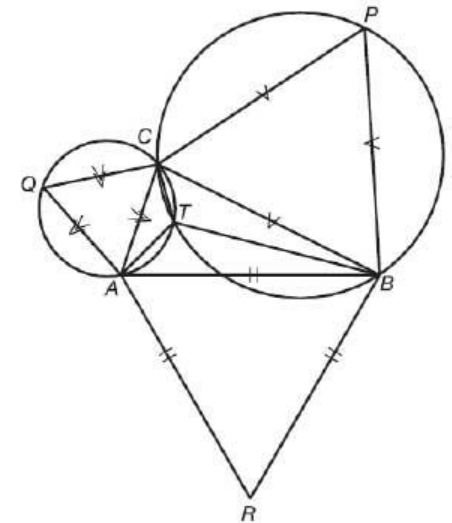
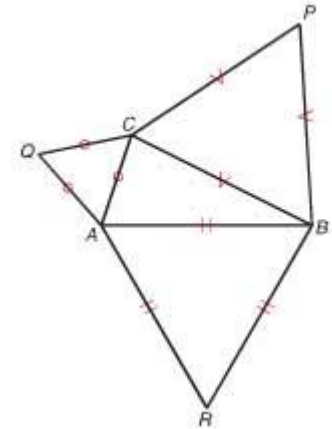
Te bewijzen:

De omgeschreven cirkels van de driehoeken BCP , ACQ en ABR gaan door één punt.

Aanpak:

Teken de omgeschreven cirkels van de driehoeken BCP , ACQ en ABR . Alle hoeken van deze driehoeken zijn gelijk aan 60° .

Als T het snijpunt is van de omgeschreven cirkels van de driehoeken BCP en ACQ dan zijn $PBTC$ en $CTAQ$ koordenvierhoeken. Nu moet bewezen worden dat $ATBR$ ook een koordenvierhoek is, want dan ligt T op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABR$.



7.2 Bewijzen in cirkels [3]

Voorbeeld 2:

Bewijs dat in het plaatje hiernaast geldt dat de drie omgeschreven cirkels van de gelijkzijdige driehoeken door één punt T gaan.

Dit punt ligt binnen $\triangle ABC$.

Bewijs:

$\angle P + \angle BTC = 180^\circ$ (koordenvierhoek)

$\angle P = 60^\circ$ (gelijkzijdige $\triangle$)

Hieruit volgt: $\angle BTC = 120^\circ$ (1)

$\angle Q + \angle ATC = 180^\circ$ (koordenvierhoek)

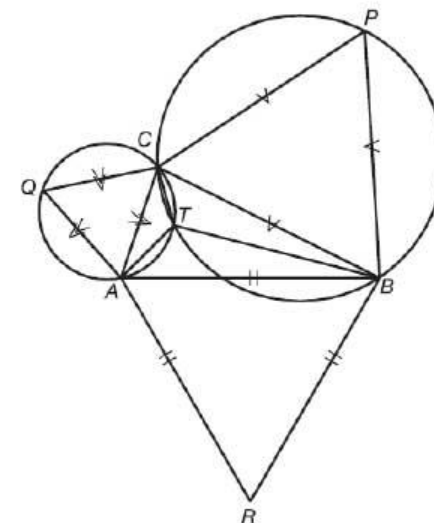
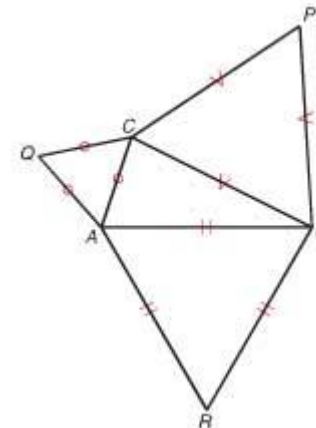
$\angle Q = 60^\circ$ (gelijkzijdige $\triangle$)

Hieruit volgt: $\angle ATC = 120^\circ$ (2)

Uit (1) en (2) volgt $\angle ATB = 120^\circ$

$\angle R = 60^\circ$ (gelijkzijdige $\triangle$) en $\angle ATB + \angle R = 180^\circ$

Dus vierhoek $ATBR$ is een koordenvierhoek en T ligt op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABR$.



7.2 Bewijzen in cirkels [3]

Voorbeeld 3 (Opgave 32A):

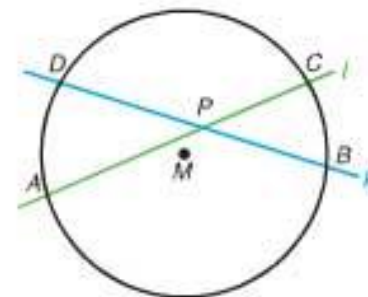
Bewijs dat in het plaatje hiernaast geldt: $\angle APB = \frac{1}{2} (\angle AMB + \angle CMD)$

Gegeven:

Een cirkel met middelpunt M , de lijn l die de cirkel

Snijdt in A en C en de lijn k die de cirkel snijdt in B

En D zo, dat het snijpunt P van k en l binnen de cirkel ligt.



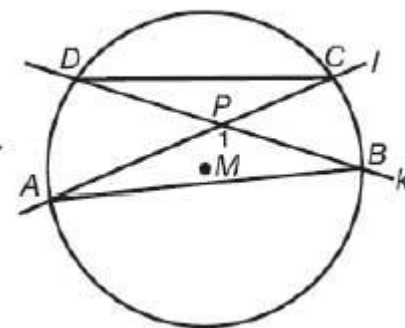
figuur 12.11

Te bewijzen:

$$\angle APB = \frac{1}{2} (\angle AMB + \angle CMD)$$

Aanpak:

- Teken AB en CD , want dan kun je de stelling van de omtrekshoek gebruiken. (Bij omtrekshoek A hoort middelpuntshoek CMB);
- Merk op dat de hoeken AMB , CMB , CMD en DMA samen 360° zijn;
- $\angle APB$ ligt in de gelijknamige driehoek. Als je $\angle A$ en $\angle B$ weet, weet je $\angle APB$. Via omtrekshoek A kom je bij middelpuntshoek CMB en je weet dat deze samen met drie andere hoeken 360 graden is.



7.2 Bewijzen in cirkels [3]

Voorbeeld 3 (Opgave 32A):

Bewijs dat in het plaatje hiernaast geldt: $\angle APB = \frac{1}{2} (\angle AMB + \angle CMD)$

Bewijs:

$$\angle P_1 + \angle A + \angle B = 180^\circ (\angle\text{-som } \Delta)$$

$$\angle A = \frac{1}{2} \angle BMC (\text{omtrekshoek})$$

$$\angle B = \frac{1}{2} \angle DMA (\text{omtrekshoek})$$

$$\text{Hieruit volgt: } \angle P_1 + \frac{1}{2} \angle BMC + \frac{1}{2} \angle DMA = 180^\circ$$

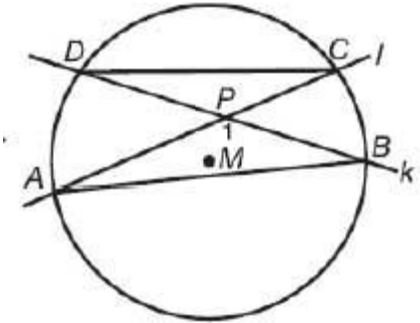
$$\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle DMA = 360^\circ$$

$$\frac{1}{2} \angle AMB + \frac{1}{2} \angle BMC + \frac{1}{2} \angle CMD + \frac{1}{2} \angle DMA = 180^\circ$$

$$\angle P_1 + \frac{1}{2} \angle BMC + \frac{1}{2} \angle DMA = \frac{1}{2} \angle AMB + \frac{1}{2} \angle BMC + \frac{1}{2} \angle CMD + \frac{1}{2} \angle DMA = 180^\circ$$

$$\angle P_1 = \frac{1}{2} \angle AMB + \frac{1}{2} \angle CMD$$

$$\angle APB = \frac{1}{2} (\angle AMB + \angle CMD)$$



7.3 Volledige inductie [1]

Voorbeeld 1:

Bewijs dat $7^n + 3^{n+1}$ deelbaar is door 4 voor elk natuurlijk getal n .

Dit kan bewezen worden met behulp van **volledige inductie**.

Stap 1: (Inductiebasis)

Bewijs dat de bewering waar is voor $n = 0$.

$$7^0 + 3^{0+1} = 1 + 3 = 4.$$

4 is deelbaar door 4.

Stap 2: (Inductiehypothese en inductiestap)

Neem aan dat de bewering waar is voor een natuurlijk getal p en bewijs dat de bewering dan ook waar is voor het getal $p + 1$.

Neem aan: $7^p + 3^{p+1}$ is deelbaar door 4 voor elk natuurlijk getal p .

Te bewijzen: $7^{p+1} + 3^{p+2}$ is deelbaar door 4 voor elk natuurlijk getal p .

7.3 Volledige inductie [1]

Voorbeeld 1:

Bewijs dat $7^n + 3^{n+1}$ deelbaar is door 4 voor elk natuurlijk getal n .

Stap 2: (Inductiehypothese en inductiestap)

$$\begin{aligned} 7^{p+1} + 3^{p+2} &= 7 \cdot 7^p + 3 \cdot 3^{p+1} \\ &= 7 \cdot 7^p + 7 \cdot 3^{p+1} - 4 \cdot 3^{p+1} \\ &= 7 \cdot (7^p + 3^{p+1}) - 4 \cdot 3^{p+1} \end{aligned}$$

Vanwege de inductiehypothese is $7^p + 3^{p+1}$ deelbaar door 4.

Dit betekent dat $7 \cdot (7^p + 3^{p+1})$ ook deelbaar is door 4.

$4 \cdot 3^{p+1}$ is vanzelfsprekend ook deelbaar door 4.

Stap 3: (Conclusie)

Uit stap 2 volgt dat $7^n + 3^{n+1}$ deelbaar is door 4 voor elk natuurlijk getal n .

7.3 Volledige inductie [1]

Voorbeeld 2:

Bewijs dat $3 \cdot 2^n > 5n + 1$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 2$.

Dit kan bewezen worden met behulp van **volledige inductie**.

Stap 1: (Inductiebasis)

Bewijs dat de bewering waar is voor $n = 2$.

$$3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$$

$$5 \cdot 2 + 1 = 11$$

$12 > 11$ en dus is de bewering waar voor $n = 2$.

Stap 2: (Inductiehypothese en inductiestap)

Neem aan dat de bewering waar is voor een natuurlijk getal p en bewijs dat de bewering dan ook waar is voor het getal $p + 1$.

Neem aan: $3 \cdot 2^p > 5p + 1$ voor elk natuurlijk getal $p \geq 2$.

Te bewijzen: $3 \cdot 2^{p+1} > 5(p + 1) + 1$ voor elk natuurlijk getal $p \geq 2$.

7.3 Volledige inductie [1]

Voorbeeld 2:

Bewijs dat $3 \cdot 2^n > 5n + 1$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 2$.

Dit kan bewezen worden met behulp van **volledige inductie**.

Stap 2: (Inductiehypothese en inductiestap)

$$3 \cdot 2^{p+1} = 3 \cdot 2^p \cdot 2^1 = 2 \cdot 3 \cdot 2^p$$

Op basis van de inductiehypothese geldt $= 2 \cdot 3 \cdot 2^p > 2 \cdot (5p + 1)$

Nu moet nog bewezen worden voor welke p geldt: $2(5p + 1) > 5(p + 1) + 1$

$$2(5p + 1) > 5(p + 1) + 1$$

$$10p + 2 > 5p + 6$$

$$5p > 4$$

$$p > 4/5$$

Stap 3: (Conclusie)

Uit stap 2 volgt dat $3 \cdot 2^n > 5n + 1$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 2$.

7.3 Volledige inductie [2]

Voorbeeld:

Bewijs dat $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

Dit kan bewezen worden met behulp van **volledige inductie**.

Stap 1: (Inductiebasis)

Bewijs dat de bewering waar is voor $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 \quad \text{en} \quad \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2^2 = 1$$

$1 = 1$ en dus is de bewering waar voor $n = 1$.

7.3 Volledige inductie [2]

Voorbeeld:

Bewijs dat $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

Dit kan bewezen worden met behulp van **volledige inductie**.

Stap 2: (Inductiehypothese en inductiestap)

Neem aan dat de bewering waar is voor een natuurlijk getal p en bewijs dat de bewering dan ook waar is voor het getal $p + 1$.

Neem aan: $\sum_{k=1}^p k^3 = \frac{1}{4}p^2(p+1)^2$ voor elk natuurlijk getal $p \geq 1$.

Te bewijzen: $\sum_{k=1}^{p+1} k^3 = \frac{1}{4}(p+1)^2(p+2)^2$

7.3 Volledige inductie [2]

Voorbeeld:

Bewijs dat $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

Dit kan bewezen worden met behulp van **volledige inductie**.

Stap 2: (Inductiehypothese en inductiestap)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p+1} k^3 &= \sum_{k=1}^p k^3 + (p+1)^3 &&= \frac{1}{4}p^2(p+1)^2 + (p+1)^3 \\ &&&= \frac{1}{4}p^2(p+1)^2 + (p+1)(p+1)^2 \\ &&&= \frac{1}{4}p^2(p+1)^2 + \frac{1}{4}(4p+4)(p+1)^2 \\ &&&= \frac{1}{4}(p+1)p^2 + \frac{1}{4}(p+1)^2(4p+4) \\ &&&= \frac{1}{4}(p+1)^2(p^2 + 4p + 4) \\ &&&= \frac{1}{4}(p+1)^2(p+2)^2\end{aligned}$$

Stap 3: (Conclusie)

Uit stap 2 volgt dat $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

7.4 Andere bewijsmethoden [1]

Voorbeeld:

Bewijs dat er geen grootste reëel getal bestaat dat kleiner is dan 2.

Dit kan bewezen worden met behulp van een **bewijs uit het ongerijmde**.

Stap 1 (Formuleer wat je wilt bewijzen):

Stelling: Er bestaat geen grootste getal $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt $x < 2$.

Stap 2 (Veronderstel dat wat je wilt bewijzen niet juist is (de **negatie**)):

Stelling: Er is wel een grootste getal x waarvoor geldt $x < 2$.

7.4 Andere bewijsmethoden [1]

Voorbeeld:

Bewijs dat er geen grootste reëel getal bestaat dat kleiner is dan 2.
Dit kan bewezen worden met behulp van een **bewijs uit het ongerijmde**.

Stap 3 (Toon aan dat de negatie leidt tot een tegenspraak):

Stel y is het gemiddelde van x en 2. Dus $y = \frac{x+2}{2}$

Omdat geldt $x < 2$ en $x < y < 2$, is dit in tegenspraak met de negatie.

Stap 4(Conclusie):

Uit de tegenspraak volgt dat er geen grootste getal $x \in \mathbb{R}$ is waarvoor geldt $x < 2$.

7.4 Andere bewijsmethoden [2]

Voorbeeld 1:

Je hebt 11 knikkers, die je in 10 laden legt.

Bewijs dat er minstens één lade is met meer dan één knikker.

Als je in elke lade één knikker legt, heb je 10 knikkers weggelegd. Je hebt nu nog één knikker over. Er is dus altijd één lade met meer dan één knikker.

Dit is het **ladenprincipe**.

Let op:

- Je kunt niet zeggen in welke lade er meer dan één knikker ligt;
- Er kunnen meerdere laden zijn waarin één knikker ligt, maar het is er altijd minstens één.

7.4 Andere bewijsmethoden [2]

Voorbeeld 2:

In een klas zitten 16 meisjes en 11 jongens.

Bewijs dat minstens drie leerlingen uit deze klas in dezelfde maand jarig zijn.

Ga met behulp van het ladenprincipe uit van 27 knikkers (de leerlingen) en 12 laden (de maanden).

- Je legt vervolgens in elke lade 2 knikkers;
- Van de 27 knikkers heb je er 24 weggelegd en dus blijven er 3 over;
- Hieruit volgt dat er dus altijd een lade is met minstens 3 knikkers;
- Dit betekent dat minstens drie leerlingen in dezelfde maand jarig zijn.

7.4 Andere bewijsmethoden [2]

Voorbeeld 3 (Opgave 61):

Kies vijf verschillende getallen uit de gehele getallen 1 tot en met 8.

Bewijs dat hier altijd een tweetal bij is met een verschil van 4.

Er zijn vier tweetallen met een verschil van 4: { 1, 5}, {2, 6}, {3, 7}, {4, 8}.

- De 4 tweetallen zijn de laden;
- De 5 gekozen getallen zijn de knikkers;
- Leg in elk van de laden 1 knikker;
- Van de 5 knikkers is er nu nog 1 over, die ook in een lade gestopt moet worden;
- Er is dus altijd een lade met minstens twee knikkers;
- Er is dus minstens een tweetal getallen waarbij het verschil 4 is.

7.4 Andere bewijsmethoden [3]

Voorbeeld 1:

Bewijs dat het kwadraat van een oneven getal o altijd oneven is.

Ga uit van: $o = 2n + 1$

$$o^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

Dit valt te schrijven als $o^2 = 2q + 1$ met $q = 2n^2 + 2n$

Hieruit volgt dat het kwadraat van o altijd oneven is.

Eigenschappen:

- Elk even getal e kan geschreven worden als $e = 2n$ met n een natuurlijk getal;
- Elk oneven getal o kan geschreven worden als $o = 2n + 1$ met n een natuurlijk getal;
- Elk drievoud d kan geschreven worden als $d = 3n$, elk viervoud als $v = 4n$ met n een natuurlijk getal;
- Elk rationeel getal r kan worden geschreven als $r = a/b$ waarbij a en b gehele getallen zijn en $b \neq 0$ is.

7.4 Andere bewijsmethoden [3]

Voorbeeld 2:

Bewijs dat het product van twee even getallen deelbaar is door 4.

Ga uit van: $x = 2n$ en $y = 2p$ waarbij n en p natuurlijke getallen zijn.

Er geldt nu: $x \cdot y = 2n \cdot 2p = 4np$

$4np$ delen door 4 levert het natuurlijke getal np op. Het product van twee even getallen is dus deelbaar door 4.

7.4 Andere bewijsmethoden [3]

Voorbeeld 3:

Bewijs dat de som van twee rationale getallen een rationeel getal is.

Stel $a = \frac{p}{q}$ en $b = \frac{r}{s}$ waarbij p, q, r en s gehele getallen zijn.

Er geldt nu: $a + b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs} + \frac{qr}{qs} = \frac{ps + qr}{qs}$

Omdat in de teller en noemer een geheel getal staat is deze som een rationeel getal.

7.4 Andere bewijsmethoden [3]

Voorbeeld 4:

Gebruik een bewijs uit het ongerijmde om aan te tonen dat $\sqrt{2}$ een irrationeel getal is.

Stap 1 (Stelling):

$\sqrt{2}$ is een irrationeel getal (Dit is een getal dat niet te schrijven is als breuk van twee gehele getallen)

Stap 2 (Negatie):

$\sqrt{2}$ is een rationeel getal

Stap 3 (Toon aan dat de negatie tot een tegenspraak leidt):

Omdat je stelt dat $\sqrt{2}$ een rationeel getal is, zou moeten gelden: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

a en b zijn gehele getallen en mogen geen gemeenschappelijke delers hebben. Dit betekent dat a en b niet beide even kunnen zijn.

7.4 Andere bewijsmethoden [3]

Voorbeeld 4:

Gebruik een bewijs uit het ongerijmde om aan te tonen dat $\sqrt{2}$ een irrationeel getal is.

Stap 3 (Toon aan dat de negatie tot een tegenspraak leidt):

Er geldt nu: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$a^2 = 2b^2$$

Het rechterlid is even, dus a^2 is even en a is ook even.

Omdat a even is, geldt er $a = 2n$

$$(2n)^2 = 2b^2$$

$$4n^2 = 2b^2$$

$$2n^2 = b^2.$$

Hieruit volgt dat b ook even moet zijn.

7.4 Andere bewijsmethoden [3]

Voorbeeld 4:

Gebruik een bewijs uit het ongerijmde om aan te tonen dat $\sqrt{2}$ een irrationeel getal is.

Stap 3 (Toon aan dat de negatie tot een tegenspraak leidt):

Op basis van de negatie heb je nu aangetoond dat als $\sqrt{2}$ een rationeel getal zou zijn, a en b allebei even zijn. Dit betekent dat de breuk a/b vereenvoudigd kan worden en dat is in tegenspraak met de aanname dat a en b geen gemeenschappelijke delers hebben.

Stap 4 (Conclusie):

Met een bewijs uit het ongerijmde heb je bewezen dat $\sqrt{2}$ een irrationeel getal is.