

8.0 Voorkennis

De pijlen van $O(0, 0)$ naar $A(4, 2)$
en van $A(4, 2)$ naar $B(2, 3)$ zijn **vectoren**.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Het bovenste **kengetal** geeft aan hoeveel de vector naar links of rechts gaat.

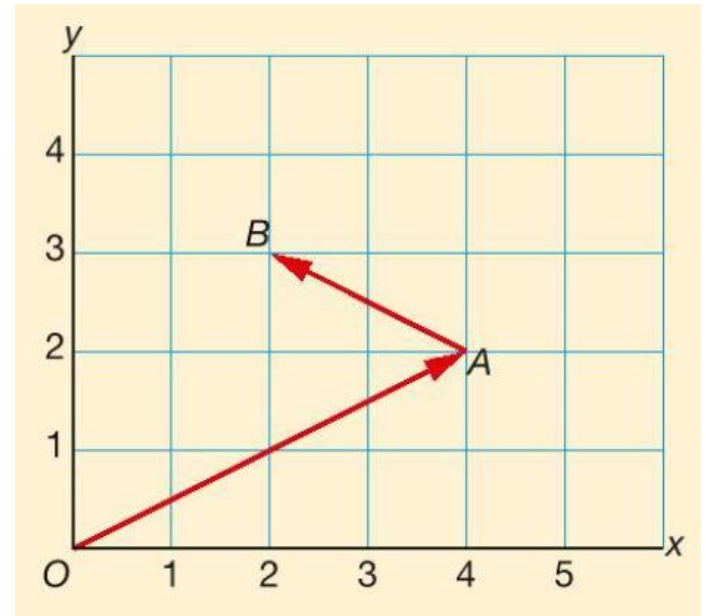
Het onderste **kengetal** geeft aan hoeveel de vector naar boven of beneden gaat.

Elke vector heeft een **richting** en een **lengte**.

De lengte van de vector die in de oorsprong start is te berekenen met de stelling van Pythagoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Gelijke vectoren hebben dezelfde lengte en dezelfde richting.



8.0 Voorkennis

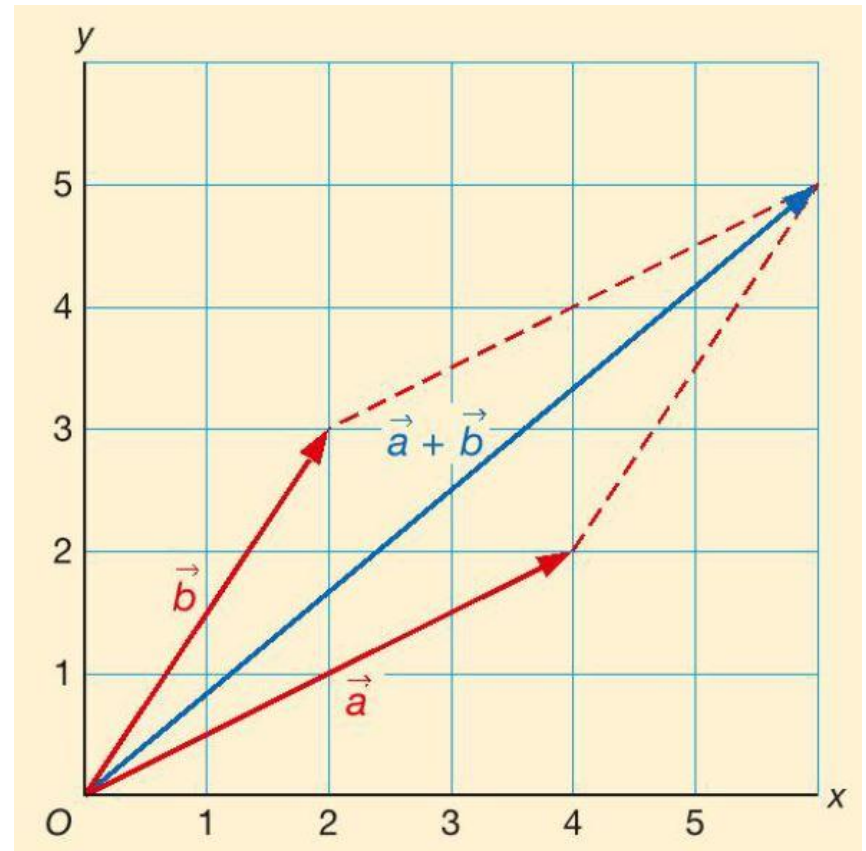
Optellen van vectoren met de parallellogramconstructie:

Gegeven zijn de vectoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De **somvector** is de diagonaal van het parallellogram waarvan de twee gegeven vectoren zijden zijn.



8.0 Voorkennis

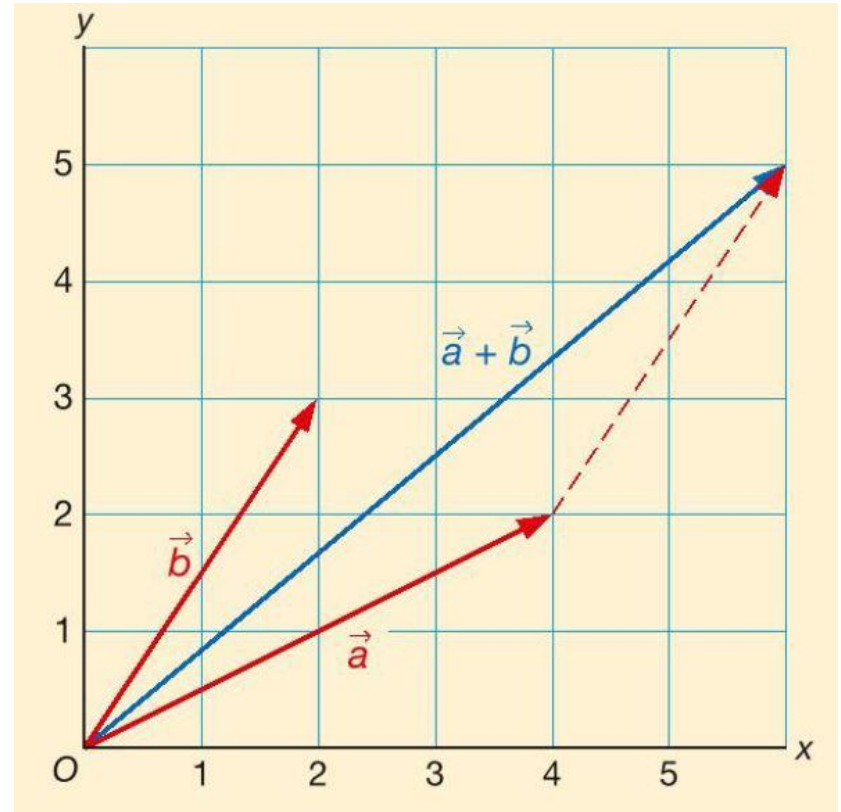
Optellen van vectoren met de kop-staartconstructie:

Gegeven zijn de vectoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De vector $\vec{b}$ wordt verschoven zo, dat zijn “staart” aansluit bij de “kop” van $\vec{a}$.



8.0 Voorkennis

Optellen van vectoren met de kop-staartconstructie:

Gegeven zijn de vectoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

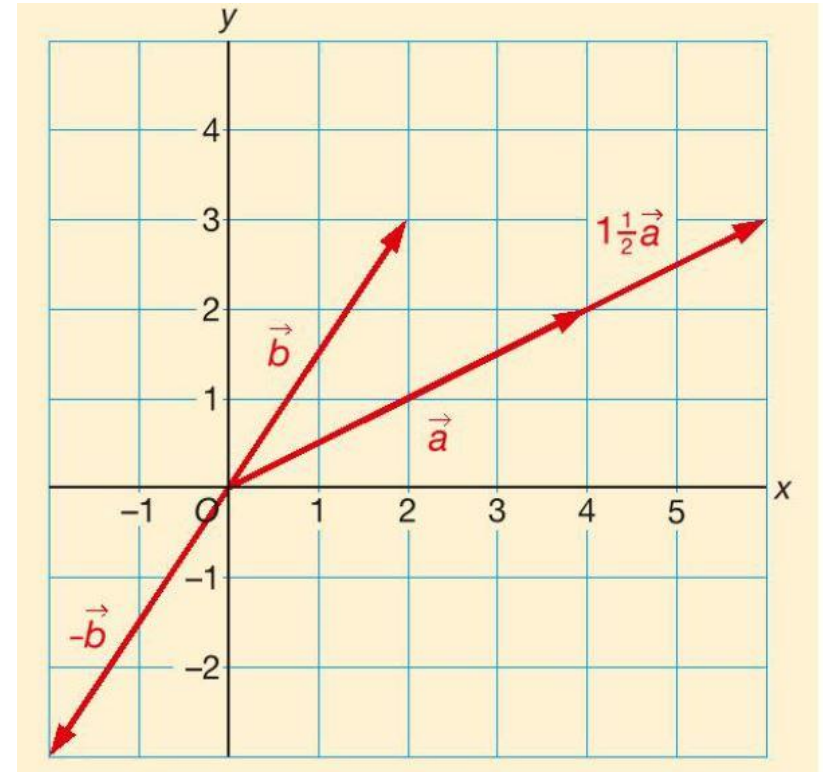
In het plaatje staan ook de vectoren:

$$1\frac{1}{2}\vec{a} = 1\frac{1}{2} \cdot \vec{a} = 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} = -1 \cdot \vec{b} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } -\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ zijn}$$

tegengestelde vectoren. Deze hebben dezelfde lengte en een tegengestelde richting.



8.0 Voorkennis

Voorbeeld 1:

Bereken de hoek tussen de twee vectoren in het plaatje rechts.

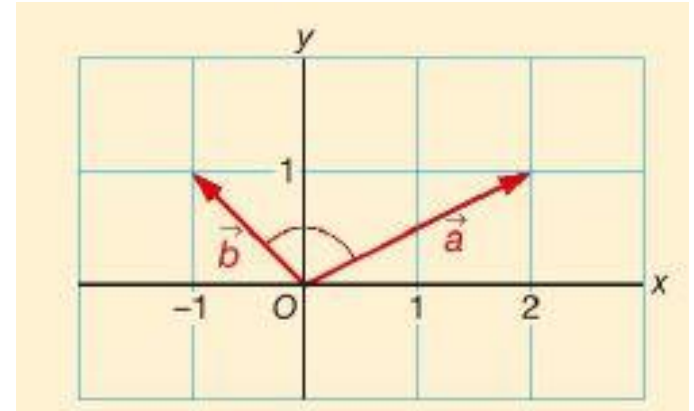
$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \text{en} \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$



Uitrekenen met behulp van de GR ($\cos^{-1}$) geeft als antwoord **108,4°**.

8.0 Voorkennis

De lijn k in de figuur hiernaast kan genoteerd worden als:

$$x = 2 + 3\lambda \text{ en } y = 3 + \lambda$$

$$k: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$$

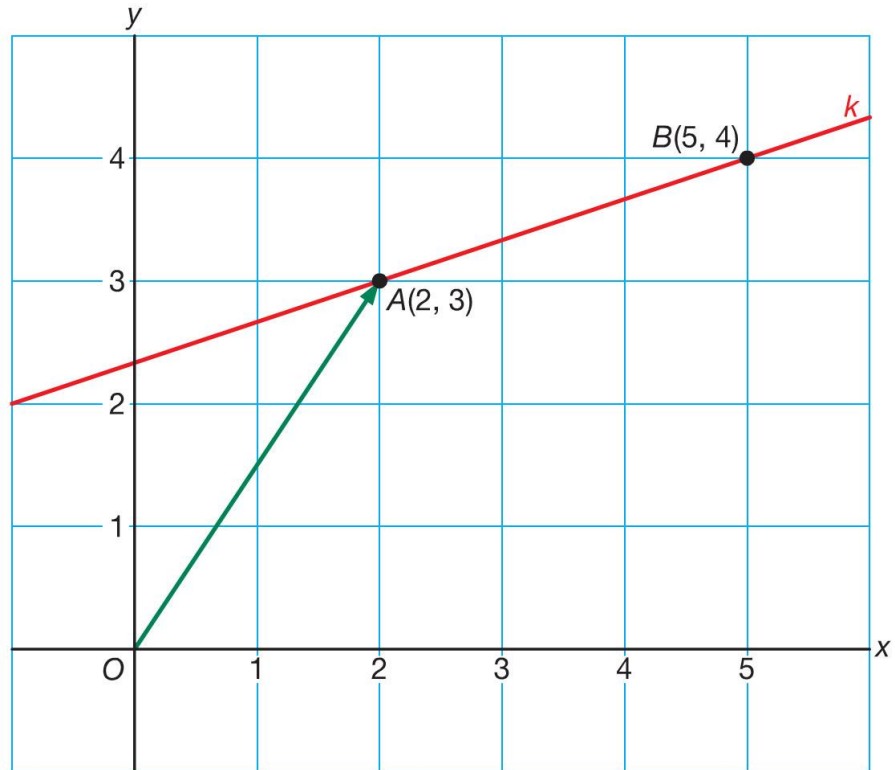
Je komt van punt A naar punt B door 3 naar rechts te gaan en 1 omhoog te gaan.

Voor $\lambda = 0$ krijg je punt $A(2, 3)$

Voor $\lambda = 1$ krijg je punt $B(5, 4)$

Voor elke waarde van λ kom je uit op een punt op de lijn k .

Dit is de **parametervoorstelling** van lijn k .



8.0 Voorkennis

De lijn k in de figuur hiernaast kan ook genoteerd worden als:

$$k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dit is de **vectorvoorstelling** van de lijn.

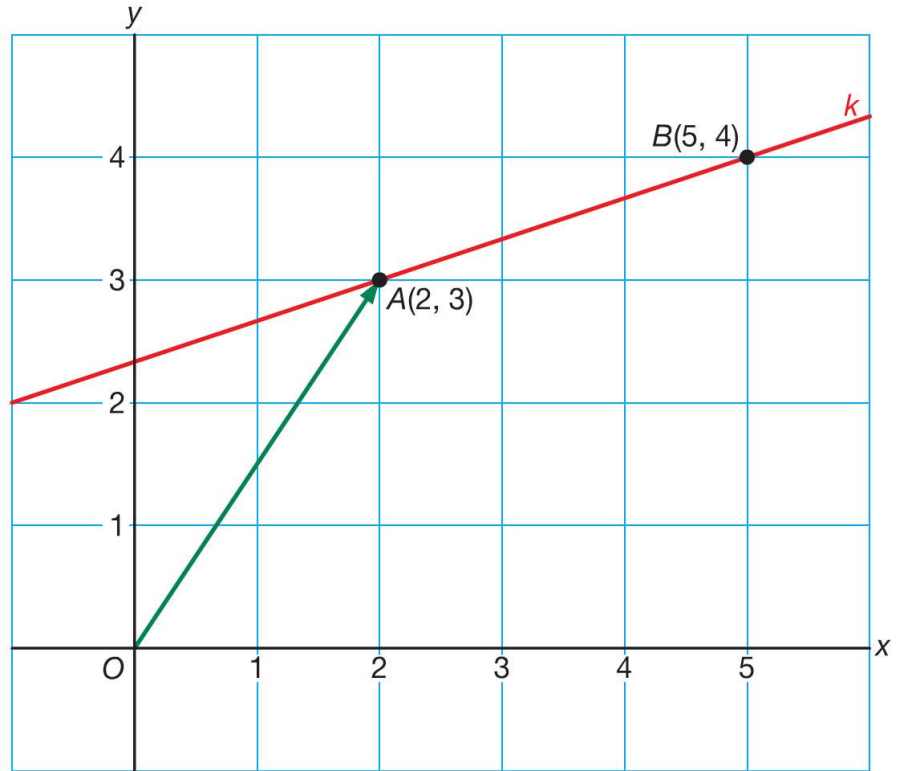
De **steunvector** is $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

De **richtingsvector** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Let op:

$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ is ook een steunvector van de lijn, want het punt $(5, 4)$ ligt ook op de lijn k .

$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ is ook een richtingsvector van de lijn.

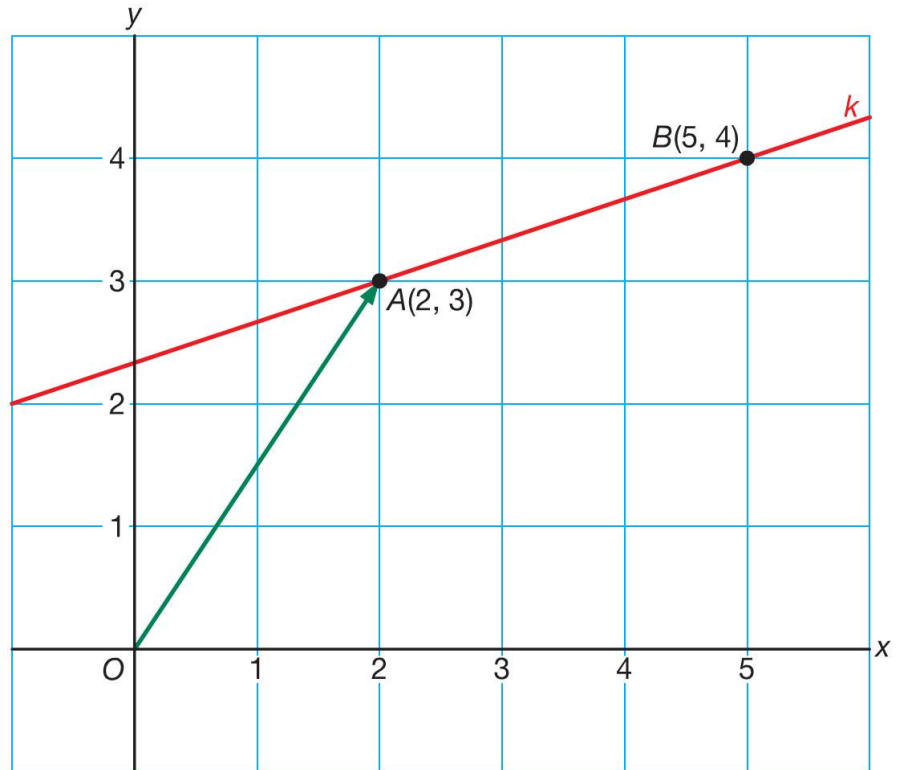


8.0 Voorkennis

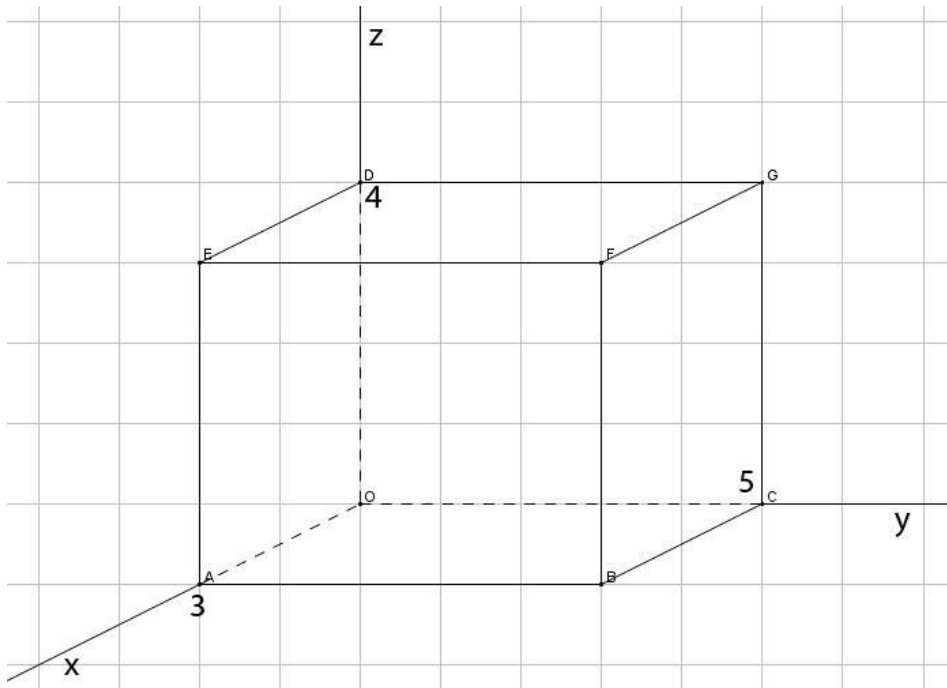
Algemeen:

Een vectorvoorstelling van de lijn door de punten A en B is gelijk aan:

$$k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$



8.1 Coördinaten in de ruimte [1]



De balk hiernaast is in een **Oxyz-assenstelsel** getekend.
Dit is een assenstelsel met drie assen.

De positieve x -as steekt naar voren uit.
De positieve y -as loopt naar rechts.
De positieve z -as loopt naar boven.

De naam van de balk is $OABC\ DEFG$.

Het punt A heeft als coördinaten $(3, 0, 0)$.

Het punt E heeft als coördinaten $(3, 0, 4)$.

Het punt F heeft als coördinaten $(3, 5, 4)$.

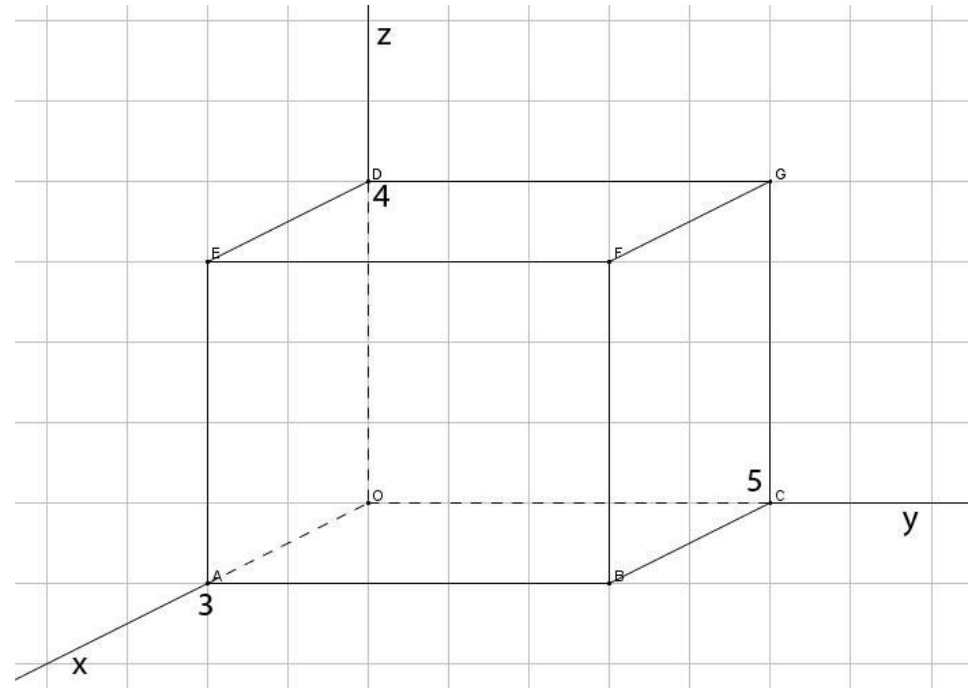
Voor de ribbe BC geldt in de tekening: 2 vakjes naar rechts en 1 vakje omhoog.

8.1 Coördinaten in de ruimte [1]

In hoofdstuk 10 bij Wiskunde B is gerekend met vectoren in het platte vlak. Vectoren kunnen ook gebruikt worden in de ruimte.

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$d(O, F) = |\vec{f}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{77}$$



Voorbeeld 1:

Bereken de lengte van het lijnstuk AG.

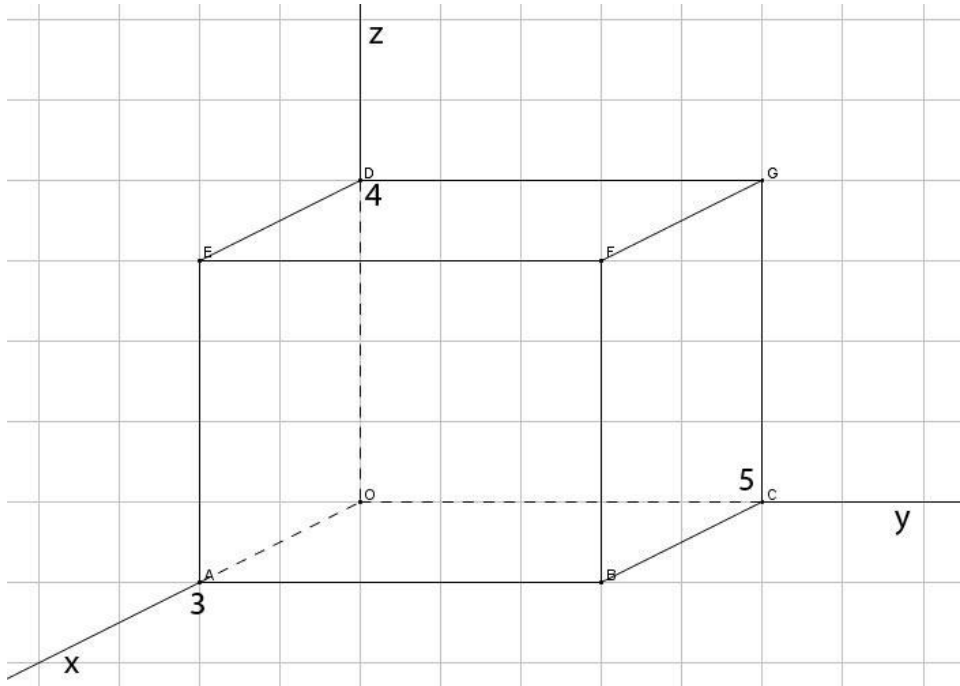
$$d(A, G) = |\overrightarrow{AG}| = |\vec{g} - \vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

8.1 Coördinaten in de ruimte [1]

In hoofdstuk 10 bij Wiskunde B is gerekend met vectoren in het platte vlak. Vectoren kunnen ook gebruikt worden in de ruimte.

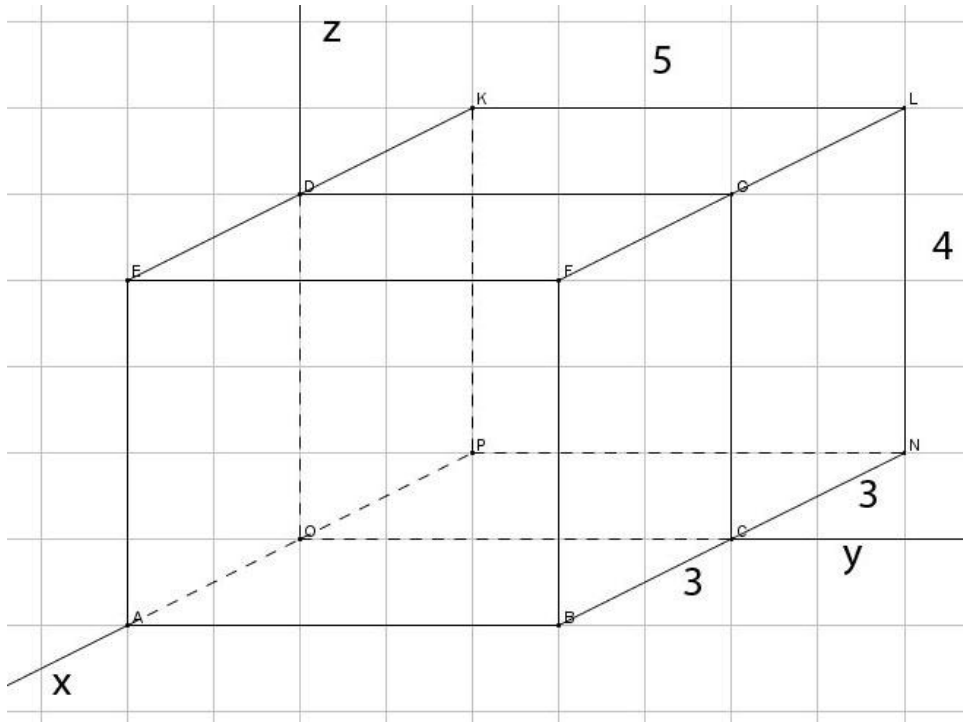
Voorbeeld 2:

Bereken de coördinaten van punt M wat op het midden van CE ligt.



$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{e}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.1 Coördinaten in de ruimte [1]



In het $Oxyz$ -assenstelsel hiernaast is ook een deel van de negatieve x -as getekend.

Het punt L heeft de coördinaten $(-3, 5, 4)$

Het horizontale vlak waarin de x -as en de y -as liggen, heet het Oxy -vlak.
Het horizontale vlak waarin de x -as en de z -as liggen, heet het Oxz -vlak.
Het horizontale vlak waarin de y -as en de z -as liggen, heet het Oyz -vlak.
Deze drie vlakken heten **coördinaatsvlakken**.

8.1 Coördinaten in de ruimte [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$
met $A(3, 0, 0)$, $C(0, 5, 0)$ en $D(0, 0, 4)$
Het midden van ribbe BC heet N .
Bereken $\angle ANG$.

Stap 1:

Schrijf de hoek als een hoek van twee
lijnstukken.

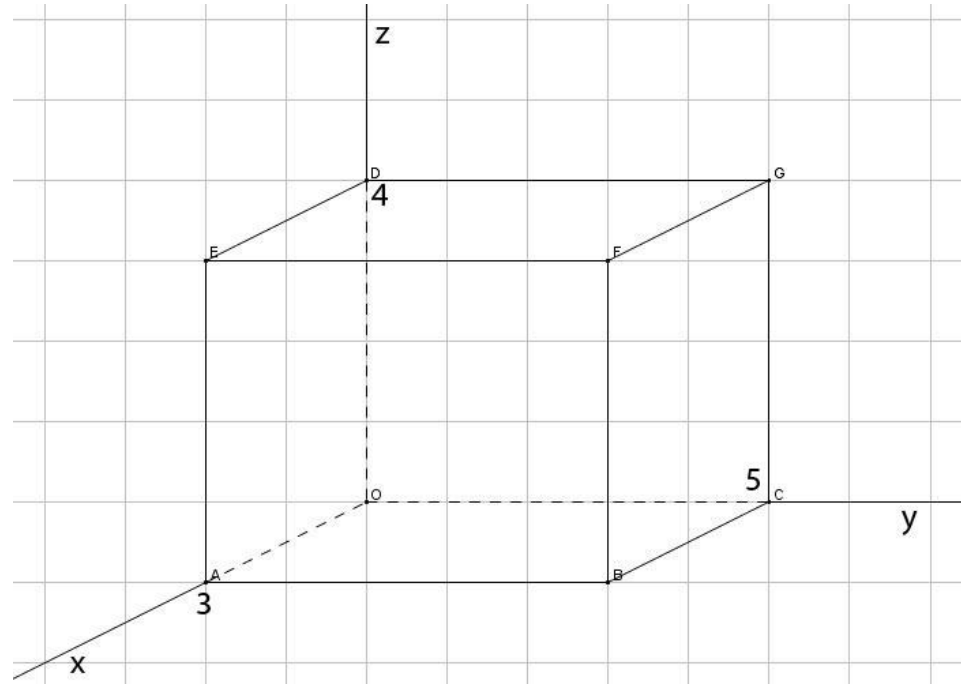
$$\angle ANG = \angle(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NG})$$

Stap 2:

Bereken de vectoren van beide lijnstukken:

$$\overrightarrow{NA} = \vec{a} - \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{NG} = \vec{g} - \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$



8.1 Coördinaten in de ruimte [2]

Voorbeeld:

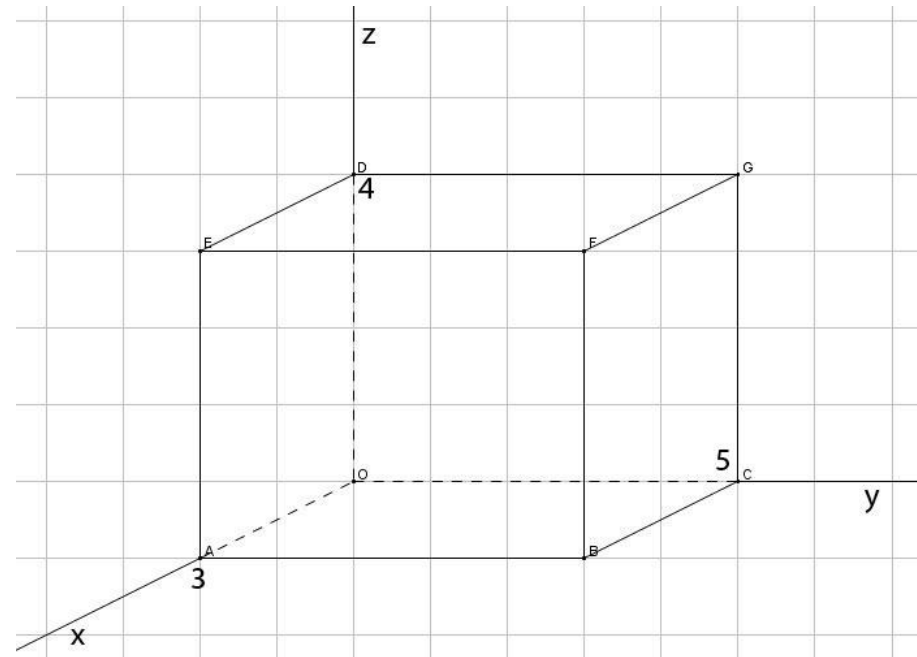
Gegeven is de balk $OABC\ DEFG$
met $A(3, 0, 0)$, $C(0, 5, 0)$ en $D(0, 0, 4)$
Het midden van ribbe BC heet N .
Bereken $\angle ANG$.

Stap 3:

De lengte van de beide vectoren zijn
te bereken met:

$$|\overrightarrow{NA}| = \left| \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(1\frac{1}{2})^2 + (-5)^2} = \sqrt{27\frac{1}{4}}$$

$$|\overrightarrow{NG}| = \left| \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1\frac{1}{2})^2 + (4)^2} = \sqrt{18\frac{1}{4}}$$



8.1 Coördinaten in de ruimte [2]

Voorbeeld:

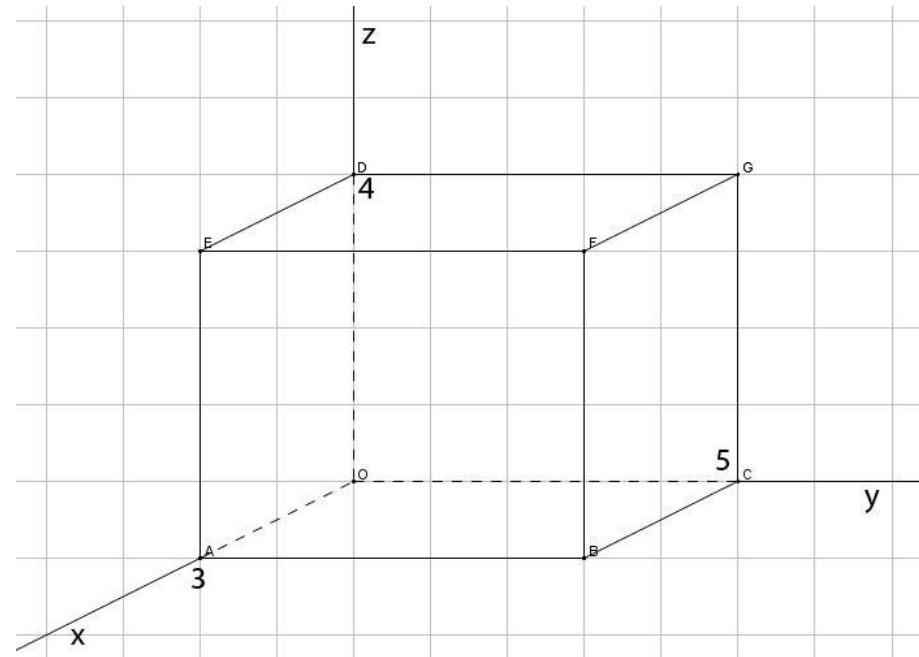
Gegeven is de balk $OABC DEFG$
met $A(3, 0, 0)$, $C(0, 5, 0)$ en $D(0, 0, 4)$
Het midden van ribbe BC heet N .
Bereken $\angle ANG$.

Stap 4:

Het inproduct van de beide vectoren
is te berekenen met:

$$\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NG} = NA_x NG_x + NA_y NG_y + NA_z NG_z$$

$$\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NG} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -2\frac{1}{4} + 0 + 0 = -2\frac{1}{4}$$



8.1 Coördinaten in de ruimte [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$
met $A(3, 0, 0)$, $C(0, 5, 0)$ en $D(0, 0, 4)$
Het midden van ribbe BC heet N .
Bereken $\angle ANG$.

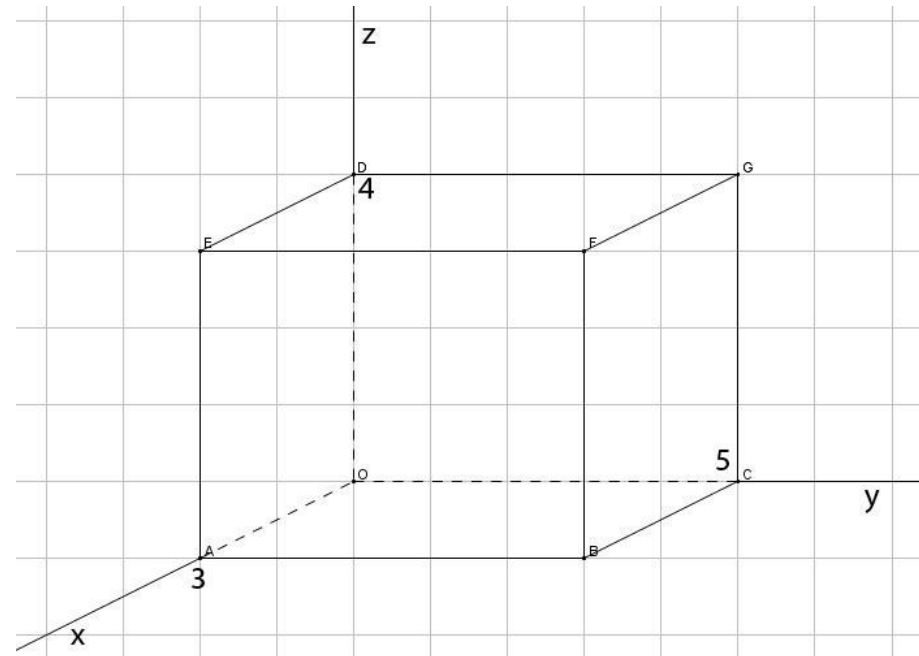
Stap 5:

De hoek $\angle ANG$ is te berekenen met:

$$\cos(\angle(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NG})) = \frac{\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NG}}{|\overrightarrow{NA}| \cdot |\overrightarrow{NG}|}$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NG})) = \frac{-2\frac{1}{4}}{\sqrt{27\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{18\frac{1}{4}}} = -0.100...$$

$$\cos^{-1} \text{ geeft } \angle ANG \approx 95,8^\circ$$



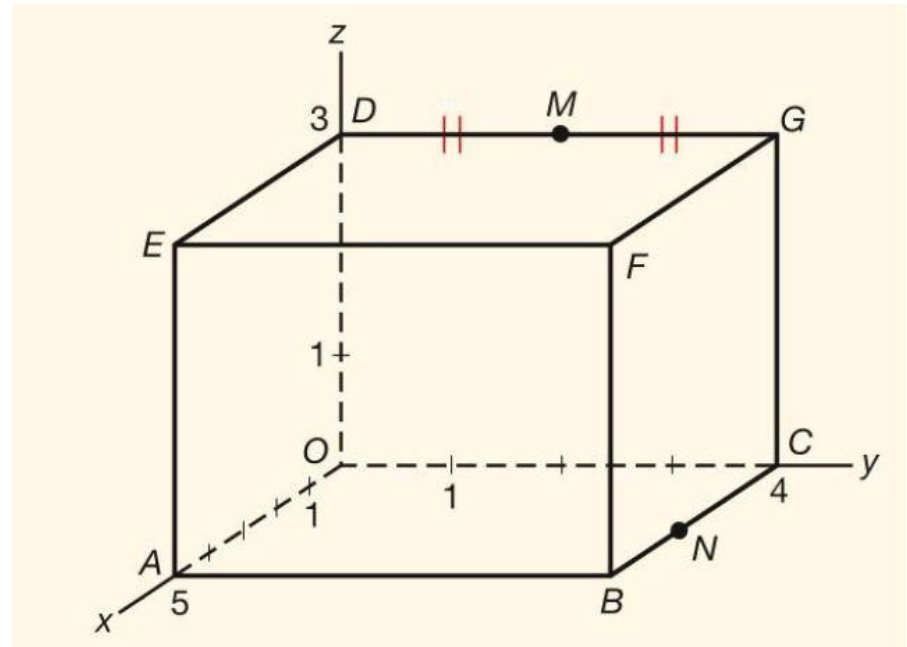
8.1 Coördinaten in de ruimte [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(5, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 3)$. Het midden van ribbe DG heet M . Punt $N(3, 4, 0)$ ligt op de ribbe BC . De lijn MN snijdt het Oxz vlak in het Punt Q . Bereken de coördinaten van Q .

Stap 1:

Stel de parametervergelijking op van het lijnstuk MN :



$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{n} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hieruit volgt: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

8.1 Coördinaten in de ruimte [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(5, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 3)$. Het midden van ribbe DG heet M . Punt $N(3, 4, 0)$ ligt op de ribbe BC . De lijn MN snijdt het Oxz vlak in het Punt Q . Bereken de coördinaten van Q .

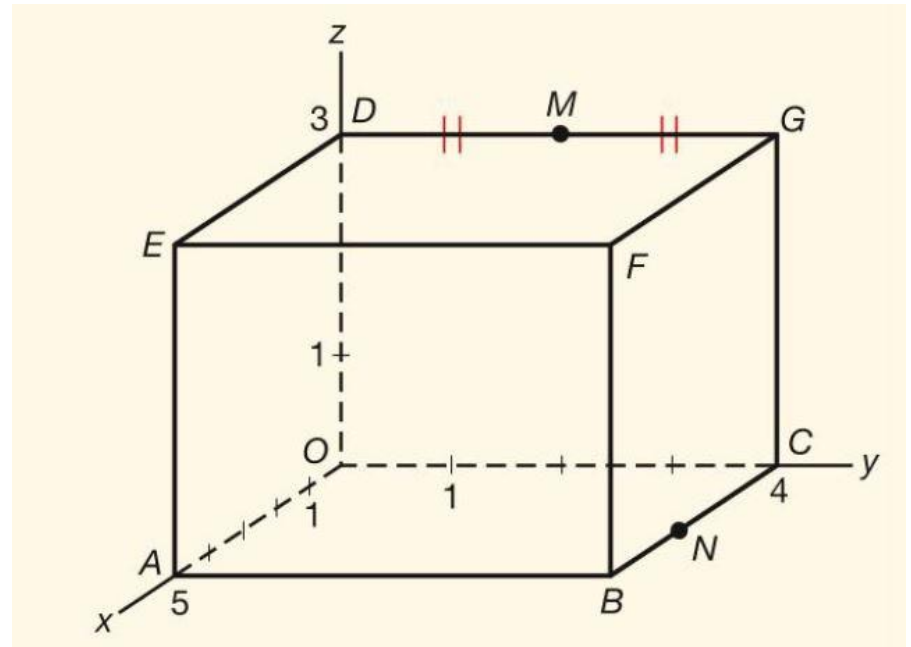
Stap 2:

Vindt de coördinaten van punt Q :

$y_Q = 0$ geeft $2 + 2\lambda = 0$ en dus $\lambda = -1$

$$\lambda = -1 \text{ geeft } \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt: $Q(-3, 0, 6)$



8.2 Vergelijkingen van vlakken [1]

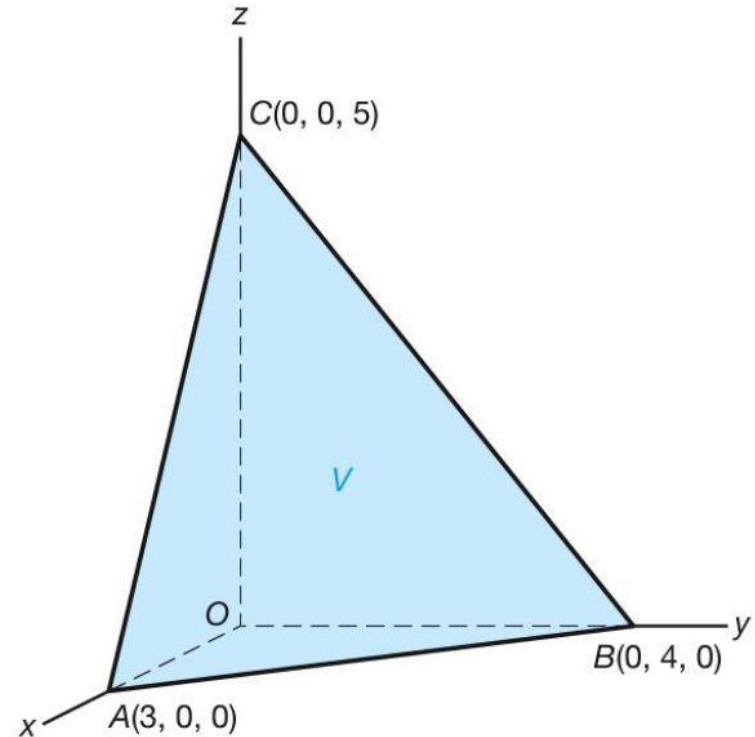
Voorbeeld:

Hiernaast is het vlak V door de punten $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ en $C(0, 0, 5)$ getekend.

De **assenvergelijking** van dit vlak is:

$$V: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1 \Leftrightarrow 20x + 15y + 12z = 60$$

Merk hierbij op: $\text{ggd}(3, 4, 5) = 60$



8.2 Vergelijkingen van vlakken [1]

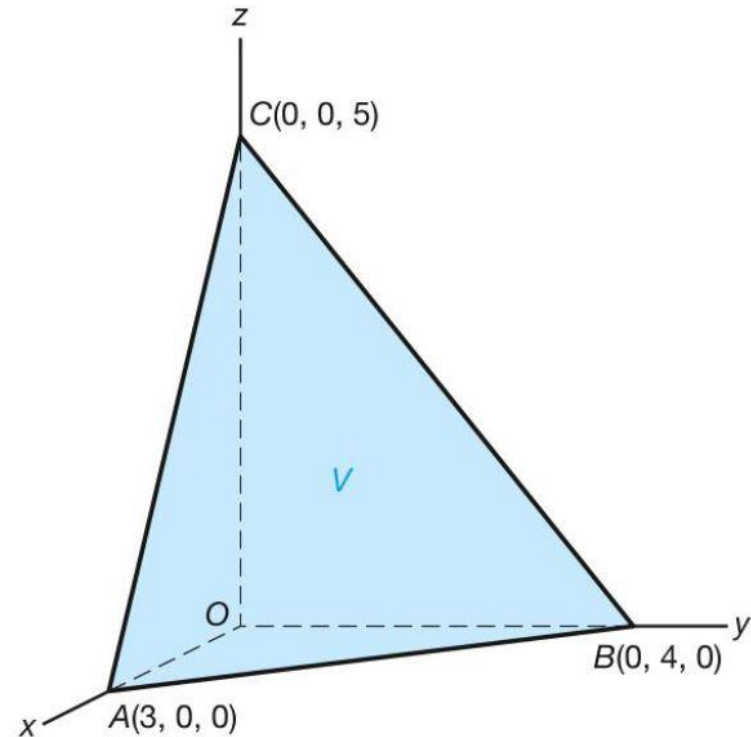
Algemeen:

De assenvergelijking van het vlak V door de punten $P(p, 0, 0)$, $Q(0, q, 0)$ en $R(0, 0, r)$ is:

$$V: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \Leftrightarrow ax + by + cz = d$$

De vector $\vec{n}_V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ staat loodrecht

op het vlak V . Deze vector heet de **normaalvector van dit vlak**.

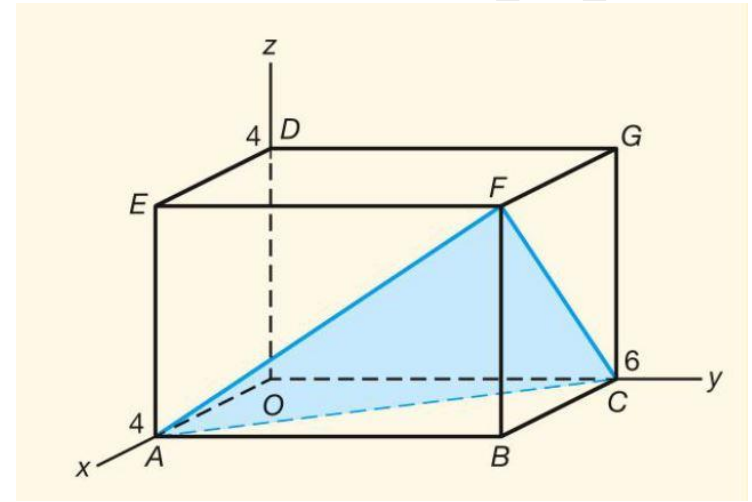


8.2 Vergelijkingen van vlakken [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. De lijn l gaat door D en staat loodrecht op het vlak ACF .

Bereken de coördinaten van het snijpunt P van de lijn l en het vlak ACF .



Stap 1:

Stel de assenvergelijking van ACF op.

Het snijpunt van twee van de drie assen met vlak ACF is bekend. Dit geeft:

$$ACF: \frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{r} = 1$$

Invullen van het punt $F(4, 6, 4)$ geeft. $ACF: \frac{4}{4} + \frac{6}{6} + \frac{4}{r} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{r} = -1 \Leftrightarrow r = -4$

$$ACF: \frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-4} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y - 3z = 12$$

8.2 Vergelijkingen van vlakken [1]

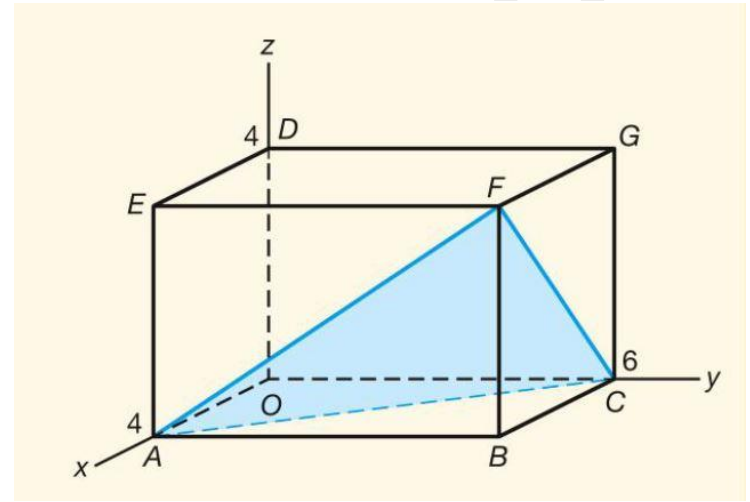
Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC\ DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. De lijn l gaat door D en staat loodrecht op het vlak ACF .

Bereken de coördinaten van het snijpunt P van de lijn l en het vlak ACF .

Stap 2:

Stel de normaalvector van vlak ACF op. Merk op dat dit de richtingsvector is van lijn l (loodrecht!!!).



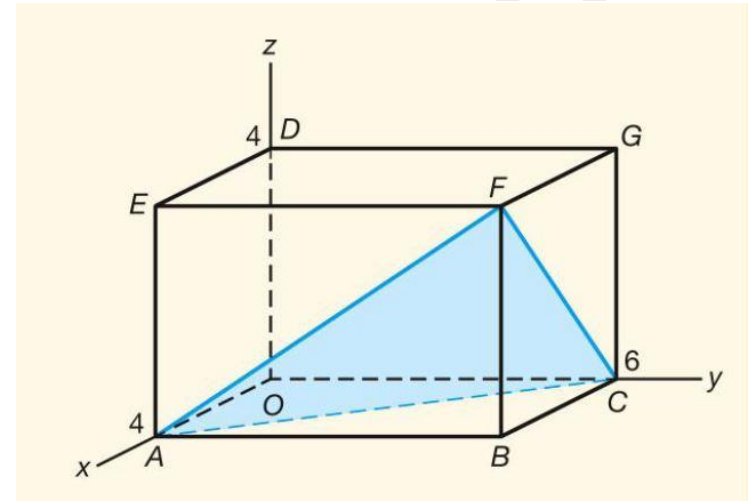
$$\vec{n}_{ACF} = \vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

8.2 Vergelijkingen van vlakken [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. De lijn l gaat door D en staat loodrecht op het vlak ACF .

Bereken de coördinaten van het snijpunt P van de lijn l en het vlak ACF .



Stap 3:

Stel de parametervoorstelling op van lijn l .

De richtingsvector is: $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ De steunvector van lijn l is: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

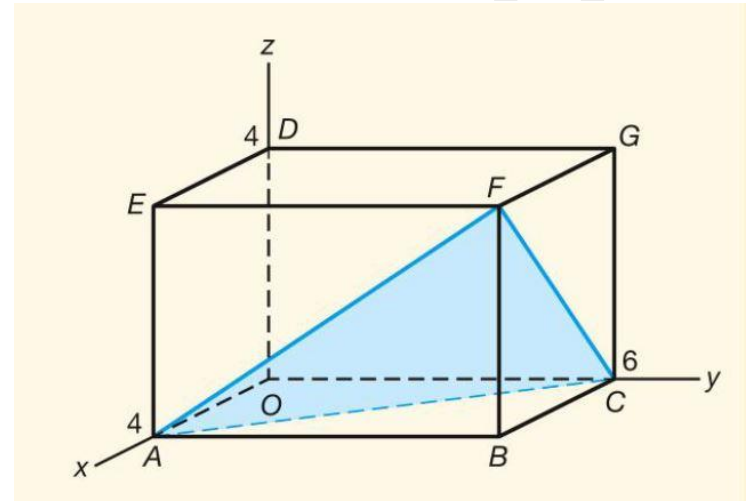
Dit geeft de parametervoorstelling $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

8.2 Vergelijkingen van vlakken [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. De lijn l gaat door D en staat loodrecht op het vlak ACF .

Bereken de coördinaten van het snijpunt P van de lijn l en het vlak ACF .



Stap 4:

Bereken het snijpunt P van de lijn l en het vlak ACF .

Invullen van $x = 3\lambda$, $y = 2\lambda$ en $z = 4 - 3\lambda$ in $3x + 2y - 3z = 12$ geeft:

$$3 \cdot 3\lambda + 2 \cdot 2\lambda - 3(4 - 3\lambda) = 12$$

$$9\lambda + 4\lambda - 12 + 9\lambda = 12$$

$$22\lambda = 24$$

$$\lambda = 1 \frac{1}{11}$$

Hieruit volgt: $P(3 \frac{3}{11}, 2 \frac{2}{11}, \frac{8}{11})$

8.2 Vergelijkingen van vlakken [2]

Algemeen:

Het uitproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\text{is } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

De vector $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ en loodrecht op $\vec{b}$

Het uitproduct kun je dus gebruiken om een normaalvector van een vlak te vinden.
Dit is immers de vector die loodrecht op een vlak staat.

8.2 Vergelijkingen van vlakken [2]

Voorbeeld:

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bereken het uitproduct van beide vectoren.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot -2 - 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot -1 - 2 \cdot -2 \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Je kunt controleren of de uitvector juist is door het berekenen van het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{a} \times \vec{b}$ en het inproduct van $\vec{b}$ en $\vec{a} \times \vec{b}$

8.2 Vergelijkingen van vlakken [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de kubus $OABC\ DEFG$ met $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ en $D(0, 0, 2)$.

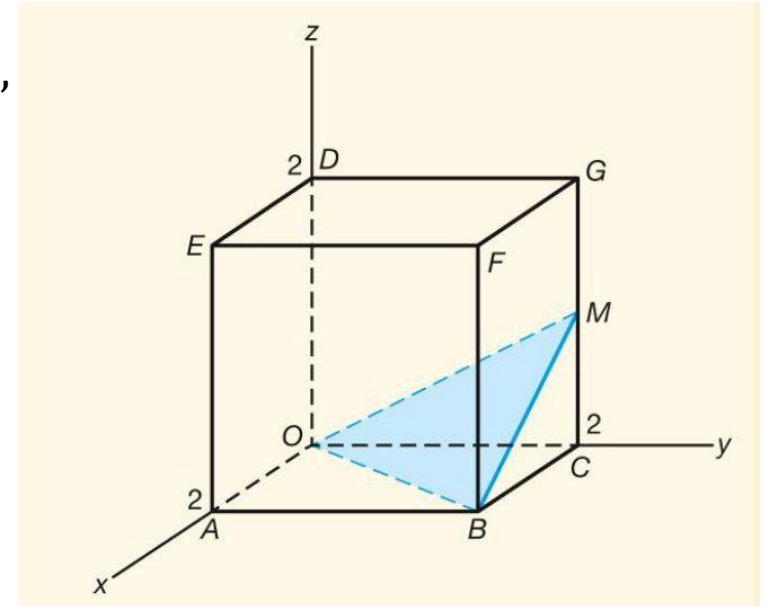
Het punt M is het midden van de ribbe CG .
Stel een vergelijking op van het vlak OBM .

Stap 1:

Vindt twee richtingsvectoren in het vlak OBM , die niet evenwijdig aan elkaar zijn.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Een richtingsvector die evenwijdig is met het vlak V , is een richtingsvector van dit vlak.



8.2 Vergelijkingen van vlakken [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de kubus $OABC\ DEFG$ met $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ en $D(0, 0, 2)$.

Het punt M is het midden van de ribbe CG .
Stel een vergelijking op van het vlak OBM .

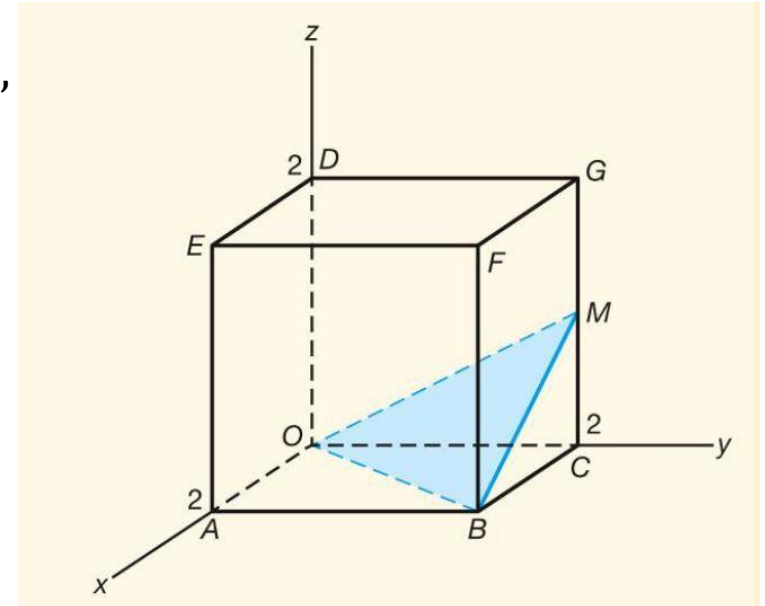
Stap 2:

Bereken het uitproduct van de twee richtingsvectoren

$$\vec{n}_{OBM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Let op:

Als je het uitproduct berekent van de twee richtingsvectoren van vlak V , krijg je een vector, die loodrecht staat op het vlak waar deze twee richtingsvectoren in liggen. Je berekent dan de normaalvector.



8.2 Vergelijkingen van vlakken [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de kubus $OABC\ DEFG$ met $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ en $D(0, 0, 2)$.

Het punt M is het midden van de ribbe CG .
Stel een vergelijking op van het vlak OBM .

Stap 3:

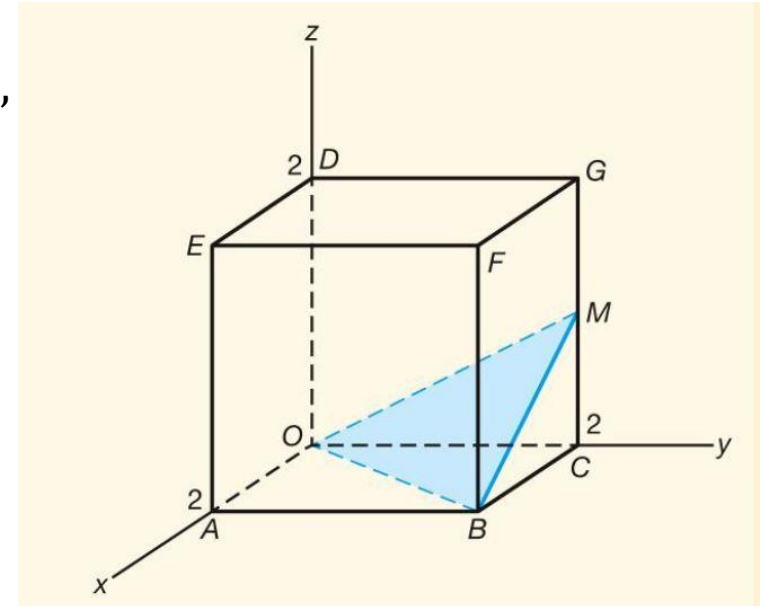
Stel de vergelijking van het vlak OBM op.

Uit de gevonden normaalvector volgt:

$$OBM: x - y + 2z = d$$

Invullen van het punt $O(0, 0, 0)$ geeft:

$$OBM: x - y + 2z = 0.$$

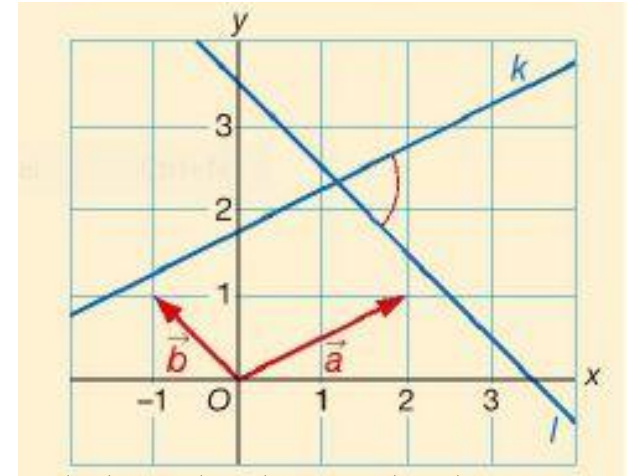


8.3 Hoeken in de ruimte [1]

Algemeen:

De hoek φ tussen de twee snijdende lijnen kan als volgt berekend worden:

$$\cos(\angle(k,l)) = \cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l)) = \frac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}$$



Voorbeeld 1:

Gegeven zijn de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bereken $\angle(k,l)$

$$\cos(\angle(k,l)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|2 \cdot -3 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{130}}$$

Hieruit volgt $\angle(k,l) \approx 74,7^\circ$

8.3 Hoeken in de ruimte [1]

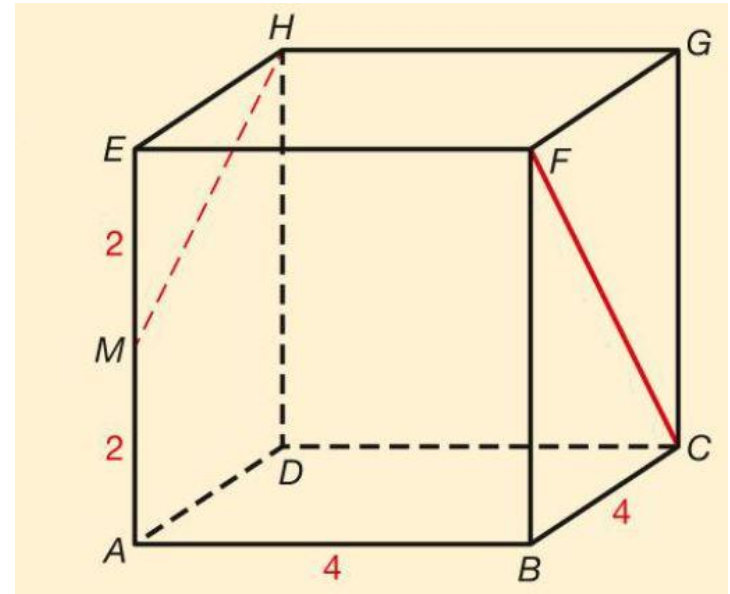
Algemeen:

De hoek φ tussen twee snijdende lijnen in de ruimte is de niet-stompe hoek tussen de lijnen. Er geldt dus: $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Voor het plaatje rechts geldt:

$$\angle(CF, HM) = \angle(DE, HM)$$

De lijnen CF en HM zijn kruisend. Je verplaatst nu één van deze lijnen evenwijdig totdat hij de andere lijn snijdt.



Algemeen:

De hoek φ tussen de twee snijdende lijnen in de ruimte kan als volgt berekend worden:

$$\cos(\angle(k, l)) = \cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l)) = \frac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}$$

8.3 Hoeken in de ruimte [1]

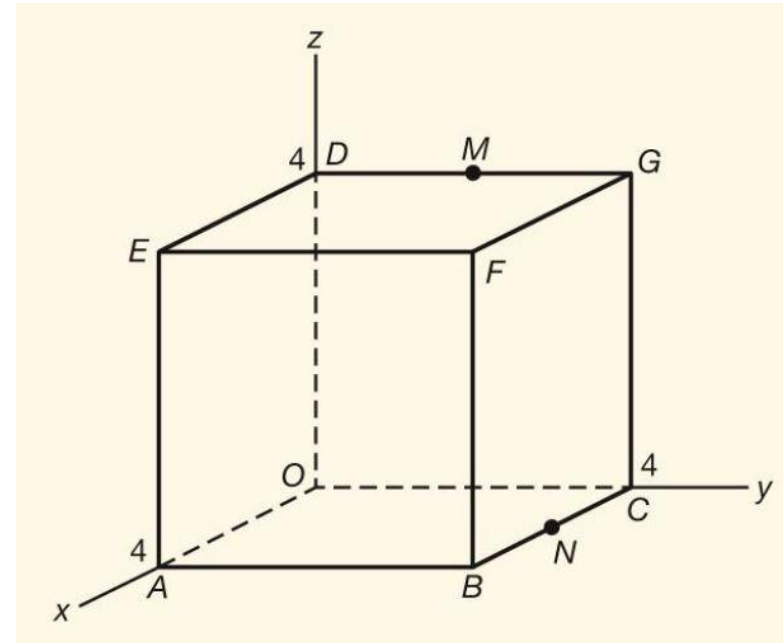
Voorbeeld 2:

Gegeven is de kubus $OABC\ DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. Het punt M is het midden van de ribbe DG en het punt N is het midden van de ribbe BC .

Bereken $\angle(AM, DN)$

$$\vec{r}_{AM} = \vec{m} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{DN} = \vec{n} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

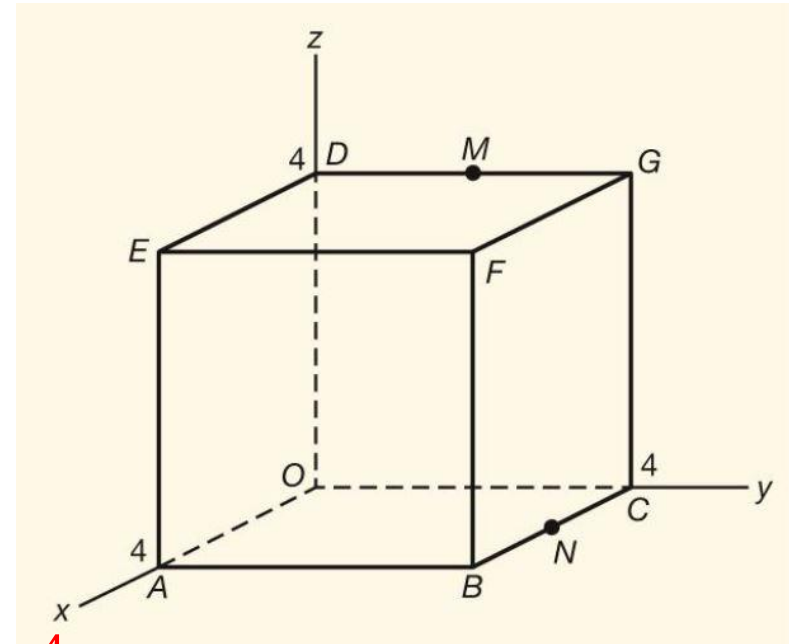


8.3 Hoeken in de ruimte [1]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. Het punt M is het midden van de ribbe DG en het punt N is het midden van de ribbe BC .

Bereken $\angle(AM, DN)$



$$\cos(\angle(AM, DN)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-2 + 2 - 4|}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

Hieruit volgt: $\angle(AM, DN) \approx 63,6^\circ$

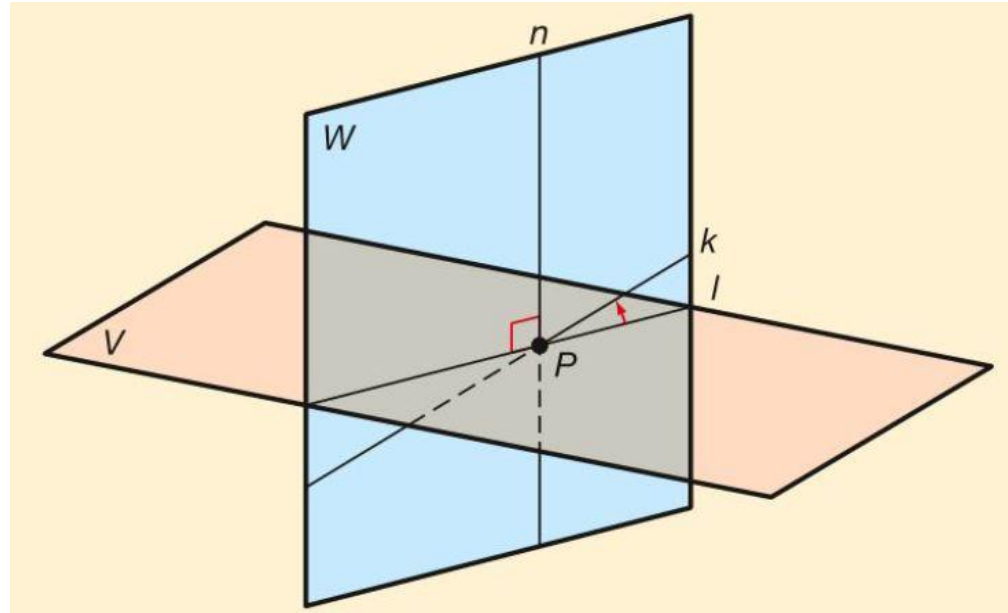
8.3 Hoeken in de ruimte [2]

Algemeen:

Hiernaast is de lijn k getekend, die het vlak V in het punt P snijdt. De lijn n door P , staat loodrecht op het vlak V en wordt de **normaal van V** genoemd.

Door de lijnen k en n is het vlak W getekend. De snijlijn van V en W is de lijn l .

Snijdt de lijn k het vlak in het punt P en is n een normaal van V door P , dan geldt:
 $\angle(k, V) = 90^\circ - \angle(k, n) = \angle(k, l)$



8.3 Hoeken in de ruimte [2]

Voorbeeld:

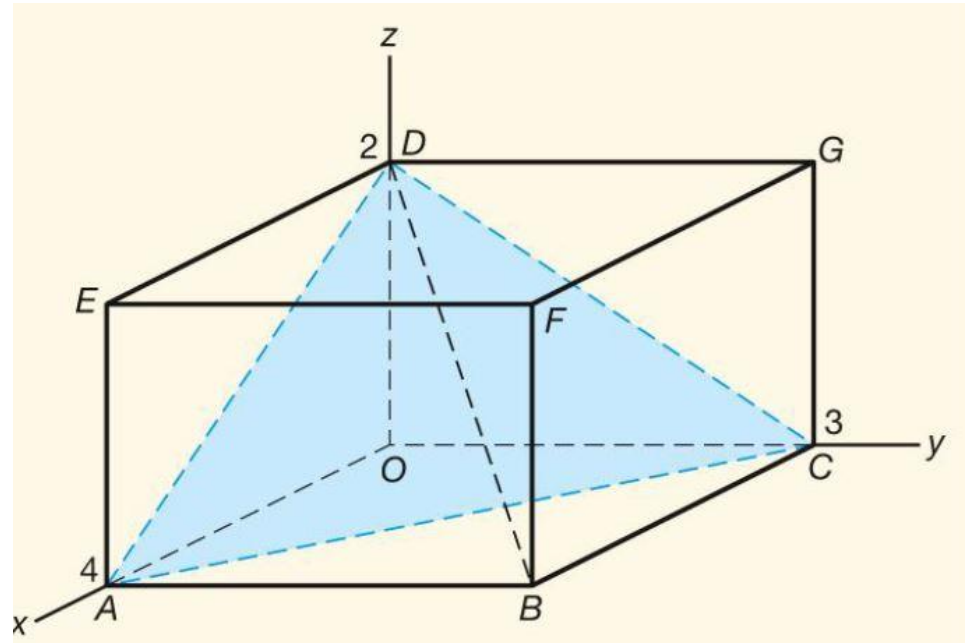
Gegeven is de balk $OAB CDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$ en $D(0, 0, 2)$.

Bereken $\angle(BD, ACD)$.

Stap 1:

Bereken de richtingsvector van BD en een normaalvector van ACD .

$$\vec{r}_{BD} = \vec{d} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Voor het vlak ACD geldt: $ACD: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow 3x + 4y + 6z = 12$

Hieruit volgt: $\vec{r}_n = \vec{n}_{ACD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

8.3 Hoeken in de ruimte [2]

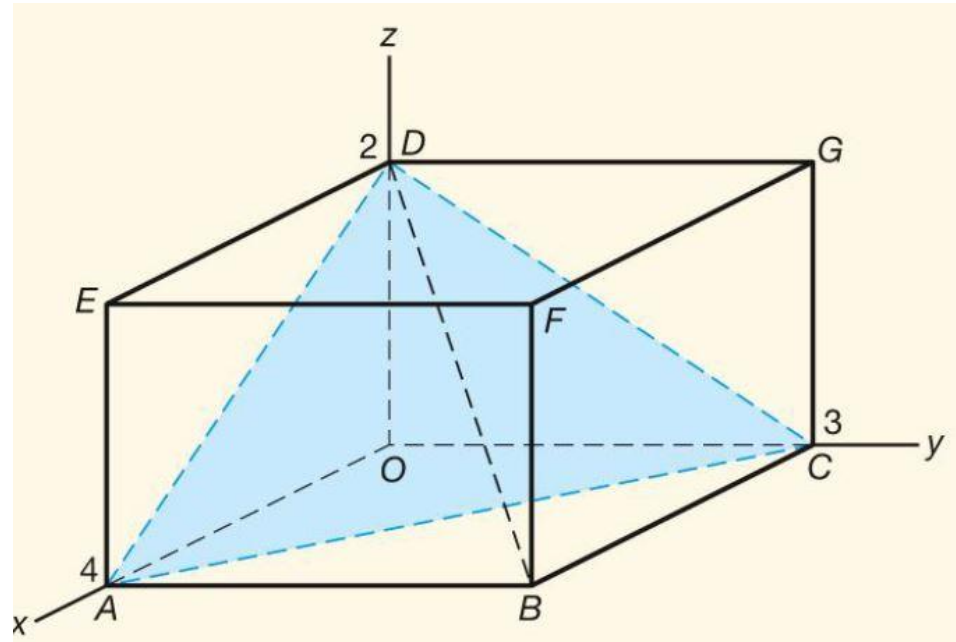
Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC\ DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$ en $D(0, 0, 2)$.

Bereken $\angle(BD, ACD)$.

Stap 2:

Bereken $\angle(BD, n)$ waarbij n een normaal van ACD is.



$$\cos(\angle(BD, n)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-12 - 12 + 12|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{61}} = \frac{12}{\sqrt{1769}}$$

8.3 Hoeken in de ruimte [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC\ DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$ en $D(0, 0, 2)$.

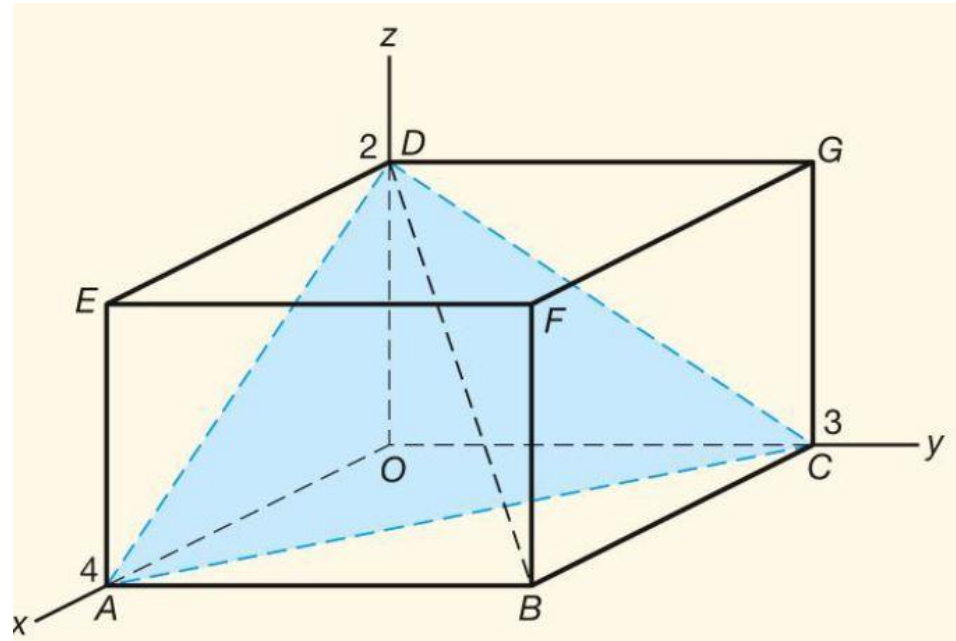
Bereken $\angle(BD, ACD)$.

Stap 3:

Bereken $\angle(BD, n) = 90^\circ - \angle(BD, ACD)$

$$\angle(BD, n) \approx 73,4^\circ$$

$$\angle(BD, ACD) \approx 90^\circ - 73,4^\circ = 16,6^\circ$$



8.3 Hoeken in de ruimte [3]

Algemeen:

Hiernaast zijn de vlakken V en W getekend met de snijlijn k .

De hoek tussen V en W is de kleinste hoek tussen de twee vlakken.

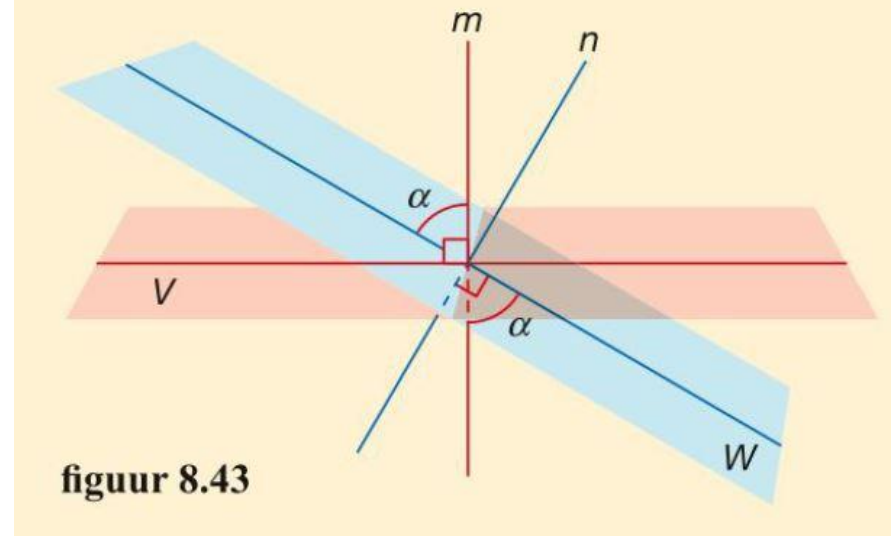
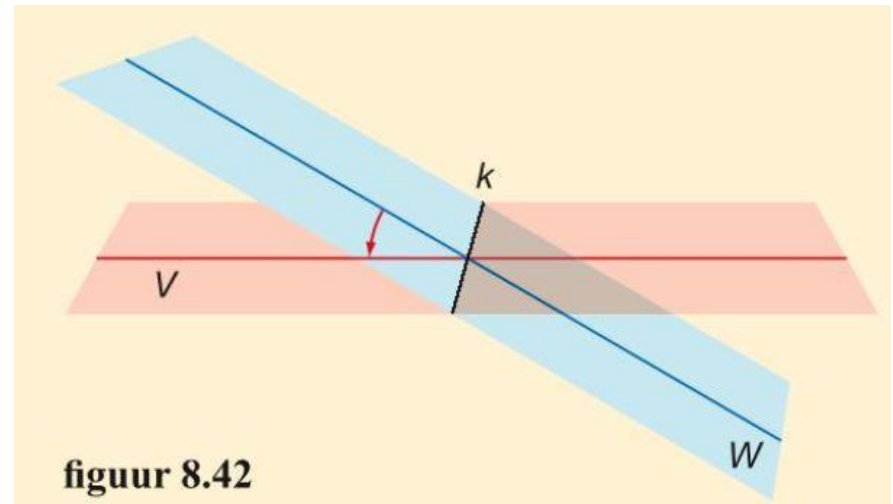
De lijn m is de normaal van V .
De lijn n is de normaal van W .

Er geldt:

$$\angle(V, W) = 90^\circ - \angle(m, W) = 90 - \alpha.$$

$$\angle(m, n) = 90^\circ - \alpha.$$

Dit betekent: $\angle(V, W) = \angle(m, n)$



8.3 Hoeken in de ruimte [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de kubus $OABC\ DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Het punt M is het midden van de ribbe AB en het punt N is het midden van de ribbe BC .

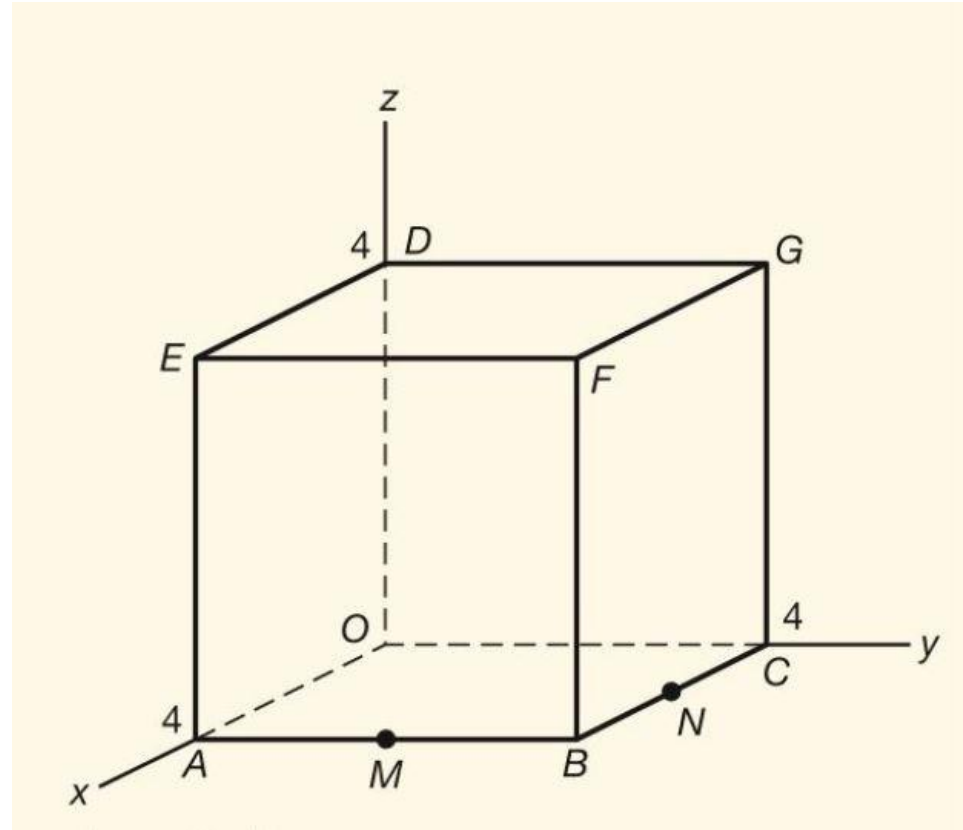
Bereken $\angle(MND, OND)$.

Stap 1:

Lijn m is een normaal van MND .

Lijn n is een normaal van OND .

Deze lijnen heb je nodig om de hoek tussen beide vlakken te Berekenen.

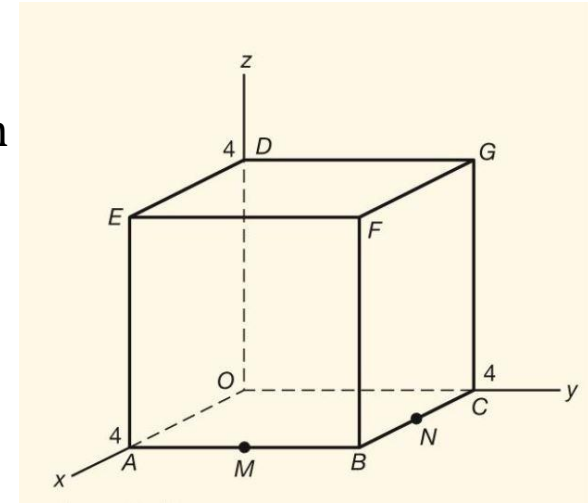


Merk op dat je het uitproduct kunt gebruiken om een normaalvector van een vlak te vinden. Dit is immers de vector die loodrecht op een vlak staat.

8.3 Hoeken in de ruimte [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. Het punt M is het midden van de ribbe AB en het punt N is het midden van de ribbe BC . Bereken $\angle(MND, OND)$.



Stap 1:

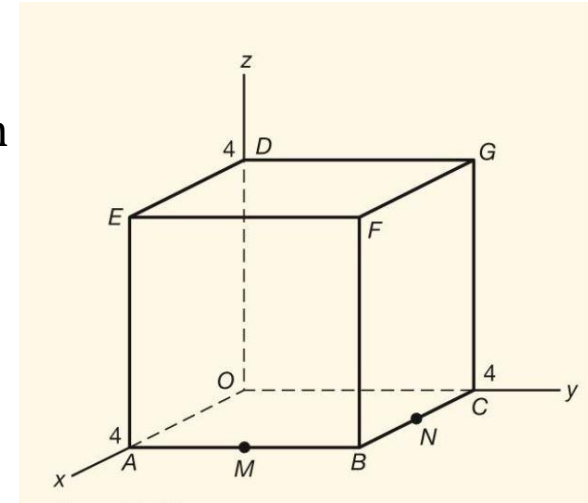
$$\vec{r}_m = \vec{n}_{MND} = \overrightarrow{DM} \times \overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -4 - -4 \cdot 4 \\ -4 \cdot 2 - 4 \cdot -4 \\ 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_n = \vec{n}_{OND} = \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8.3 Hoeken in de ruimte [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. Het punt M is het midden van de ribbe AB en het punt N is het midden van de ribbe BC . Bereken $\angle(MND, OND)$.



Stap 2:

Bereken de hoek tussen de lijnen m en n .
Dit is $\angle(MND, OND)$

$$\cos(\angle(m,n)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|4 - 2 + 0|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{85}}$$

$$\angle(MND, OND) = \angle(m, n) \approx 77,5^\circ$$

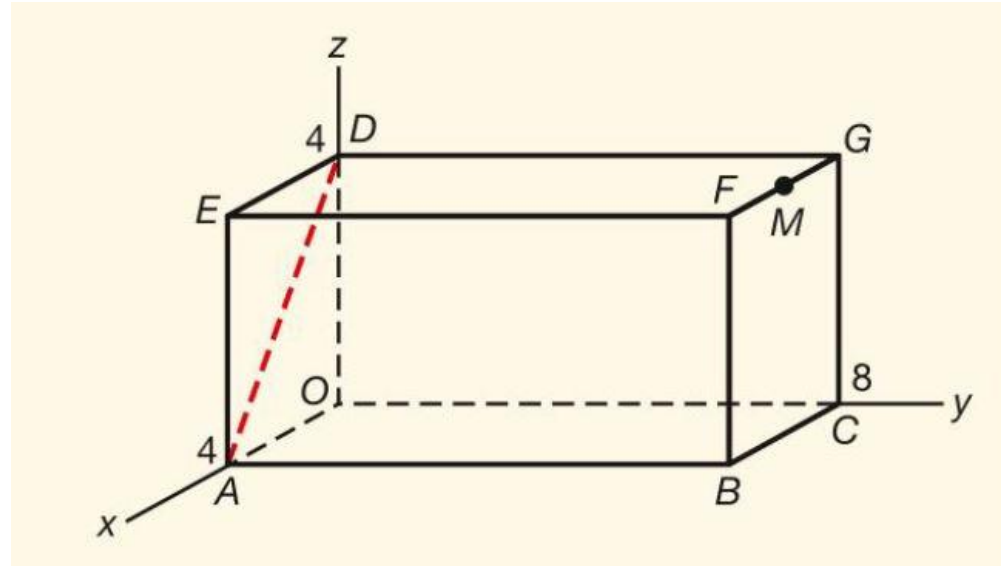
8.4 Afstanden in de ruimte [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 8, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Het punt M is het midden van de ribbe FG .

Bereken $d(M, AD)$.



Stap 1:

Stel de richtingsvector van de lijn AD op.

$$\vec{r}_{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

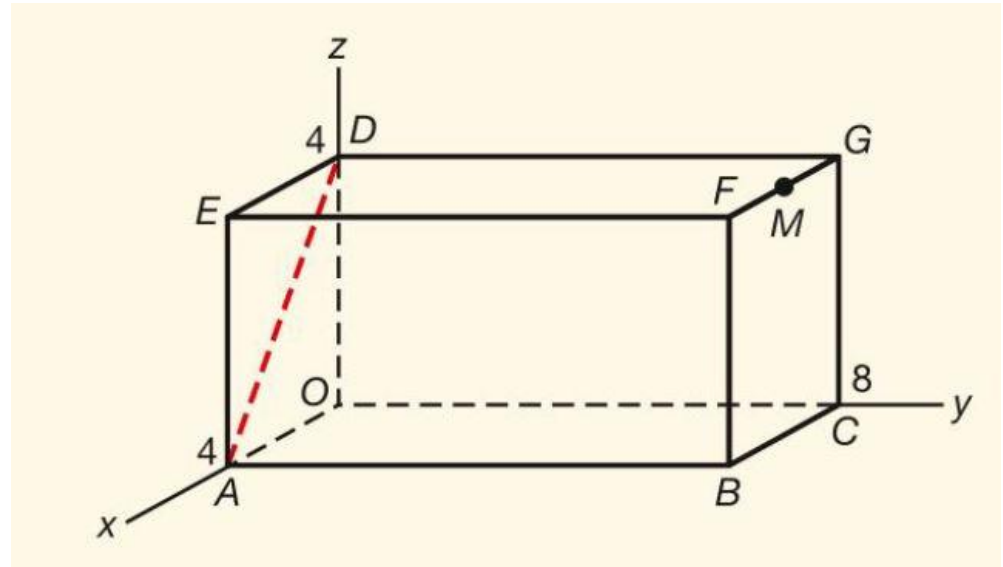
8.4 Afstanden in de ruimte [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 8, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Het punt M is het midden van de ribbe FG .

Bereken $d(M, AD)$.



Stap 2:

Stel de vergelijking van het vlak V door M op, dat loodrecht op AD staat.

Merk op dat $\vec{r}_{AD} = \vec{n}_V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hieruit volgt: $V: -x + z = d$

Invullen van $M(2, 8, 4)$ geeft als vergelijking voor $V: -x + z = 2$

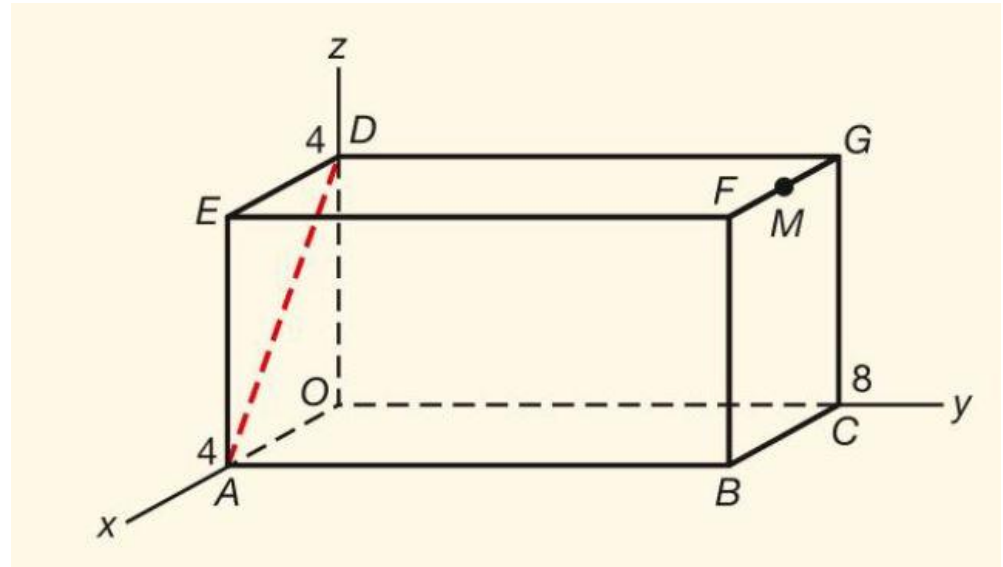
8.4 Afstanden in de ruimte [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 8, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Het punt M is het midden van de ribbe FG .

Bereken $d(M, AD)$.



Stap 3:

Bereken het snijpunt S van vlak V en de lijn AD .

$$AD: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Invullen in V : $-x + z = d$ geeft: $-(4 - \lambda) + \lambda = 2$ met $\lambda = 3$.

Het snijpunt is nu $S(1, 0, 3)$

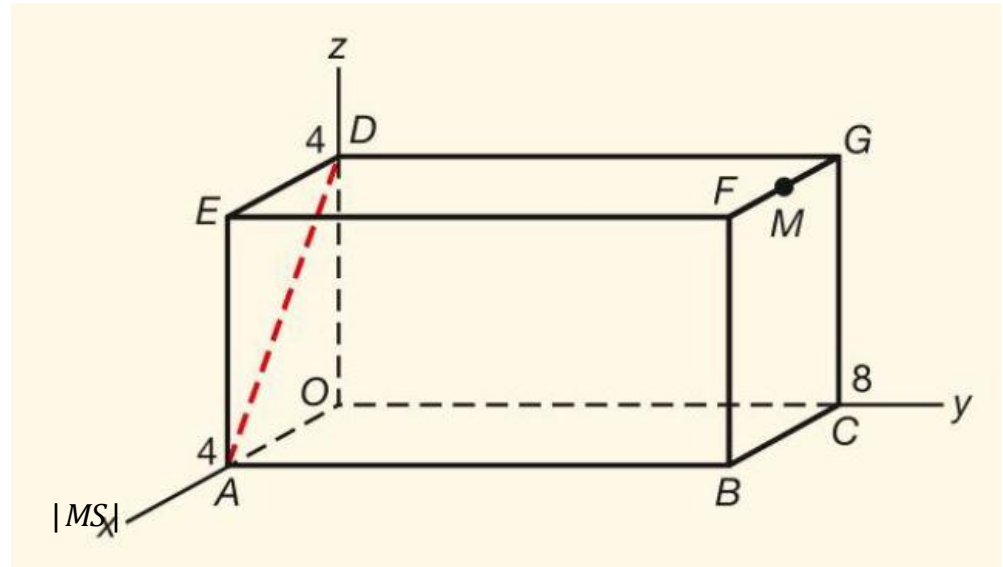
8.4 Afstanden in de ruimte [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 8, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Het punt M is het midden van de ribbe FG .

Bereken $d(M, AD)$.



Stap 4:

Bereken $d(M, AD)$.

$$d(M, AD) = d(M, S) = \left| \overrightarrow{MS} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{66}$$

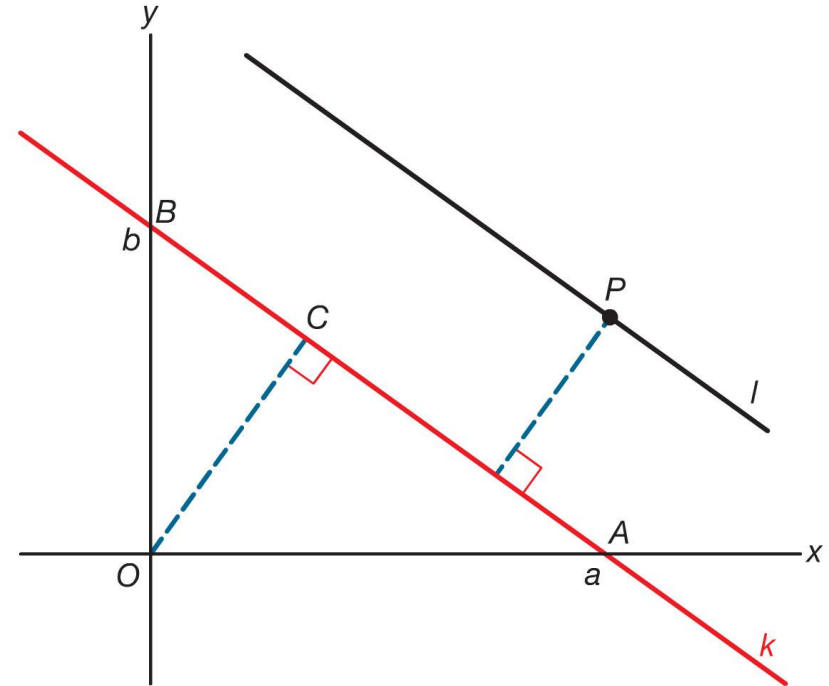
8.4 Afstanden in de ruimte [2]

Herhaling:

In het platte vlak kun je op de volgende manier de afstand uitrekenen van een punt tot een lijn.

De afstand van punt $P(x_p, y_p)$ tot de lijn

$$k: ax + by = c \text{ is } d(P, k) = \frac{|ax_p + by_p - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Algemeen:

In de ruimte geldt:

De afstand van punt $P(x_p, y_p, z_p)$ tot het vlak $V: ax + by + cz = d$ is

$$d(P, V) = \frac{|ax_p + by_p + cz_p - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8.4 Afstanden in de ruimte [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 3)$.

Het punt M is het midden van de ribbe DG .

Bereken $d(M, ACF)$ in twee decimalen nauwkeurig.

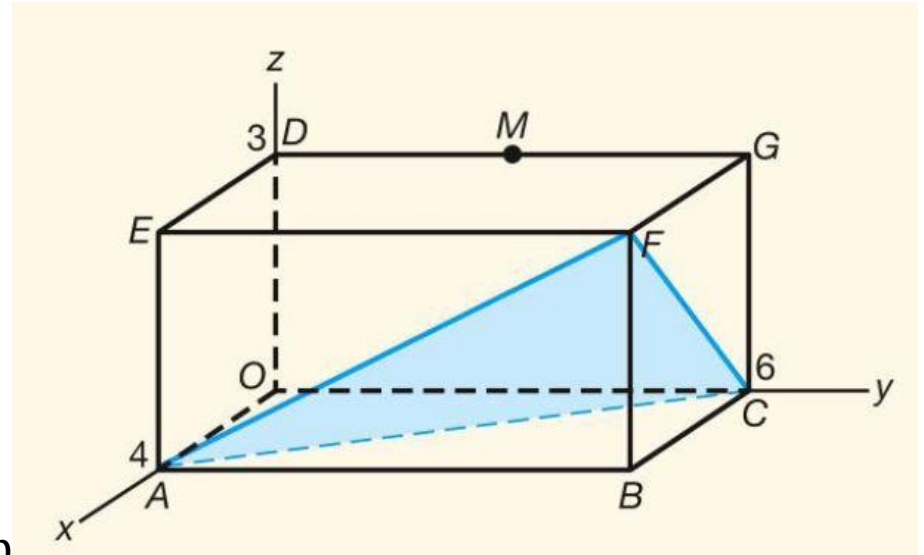
Stap 1:

Stel de vergelijking van het vlak ACF op.

$$ACF: \frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{r} = 1$$

Invullen van $F(4, 6, 3)$ in bovenstaande vergelijking geeft $r = -3$

$$ACF: \frac{x}{4} + \frac{y}{6} - \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 4y - 8z = 24$$



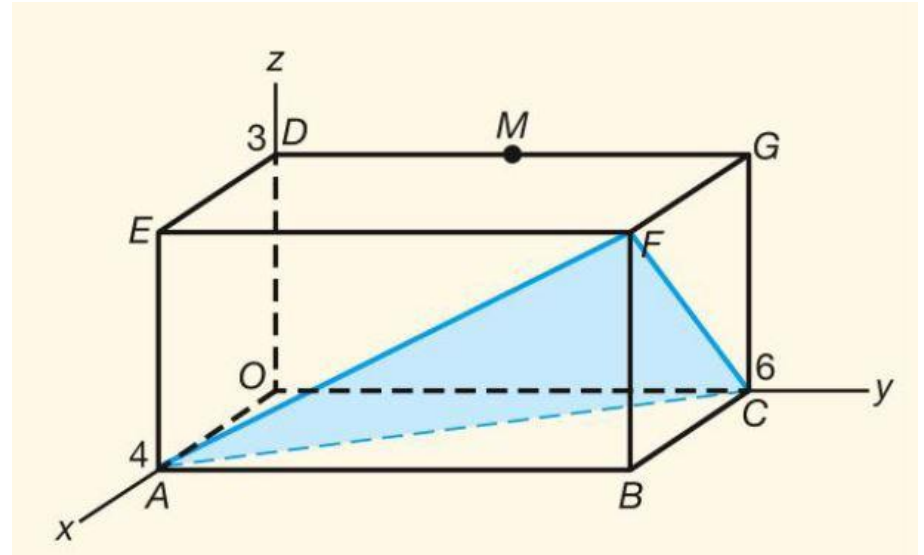
8.4 Afstanden in de ruimte [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de balk $OABCDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 3)$.

Het punt M is het midden van de ribbe DG .

Bereken $d(M, ACF)$ in twee decimalen nauwkeurig.



Stap 2:

Bereken de afstand van punt M tot vlak ACF :

Er geldt: $M(0, 3, 3)$

$$d(M, ACF) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|0 + 12 - 24 - 24|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-8)^2}} = \frac{36}{\sqrt{116}} \approx 3,34$$

8.4 Afstanden in de ruimte [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

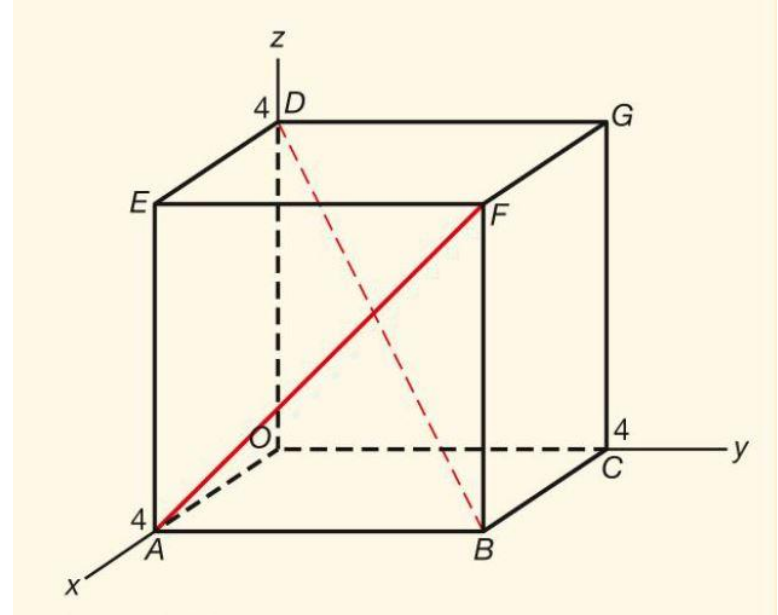
Bereken exact $d(AF, BD)$.

Stap 1:

Bereken de richtingsvectoren van de lijnen AF en BD .

$$\vec{r}_{AF} = \overrightarrow{AF} = \vec{f} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{BD} = \overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



8.4 Afstanden in de ruimte [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Bereken exact $d(AF, BD)$.

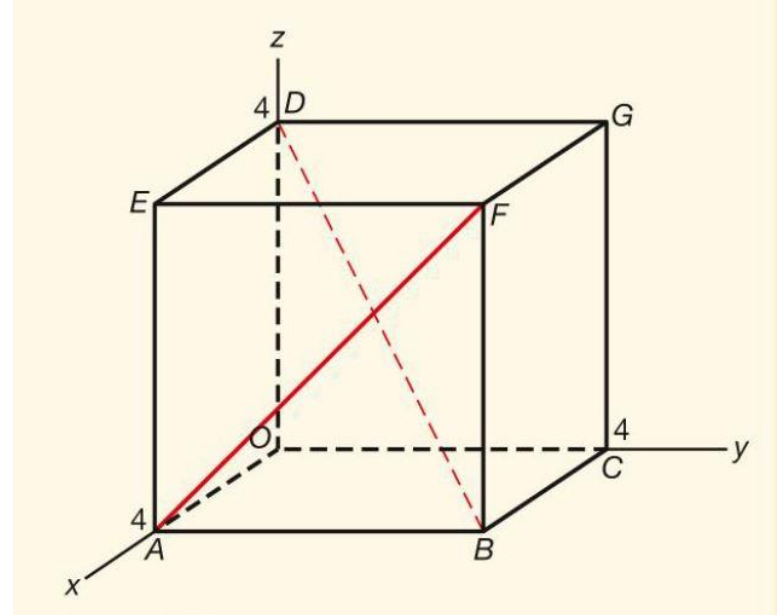
Stap 2:

Stel de normaalvector op van het vlak V door BD en evenwijdig met AF .

$$\vec{n}_V = \vec{r}_{AF} \times \vec{r}_{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Let op:

Als je het uitproduct berekent van deze twee richtingsvectoren, krijg je een normaalvector, die loodrecht staat op elk van de beide richtingsvectoren.



8.4 Afstanden in de ruimte [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Bereken exact $d(AF, BD)$.

Stap 3:

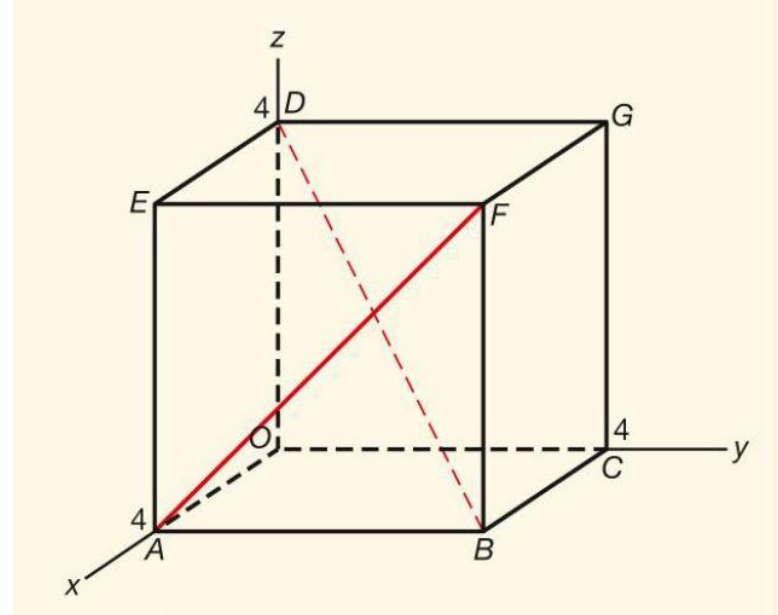
Stel de vergelijking op van het vlak V door BD en evenwijdig met AF .

Uit de normaalvector van vlak V volgt:

$$V: -2x + y - z = d$$

Invullen van het punt $B(4, 4, 0)$ geeft:

$$V: -2x + y - z = -4$$



8.4 Afstanden in de ruimte [3]

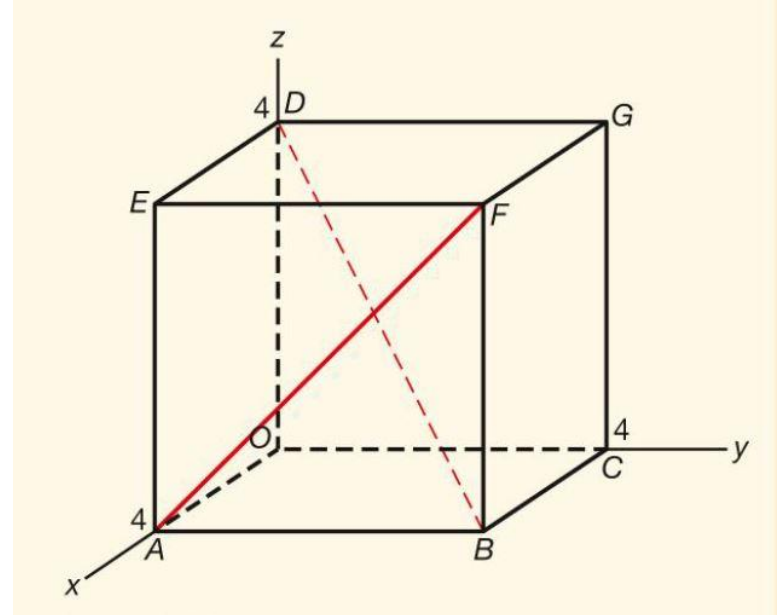
Voorbeeld:

Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Bereken exact $d(AF, BD)$.

Stap 4:

Bereken exact $d(AF, BD)$.



$$d(AF, BD) = d(A, V) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-8 + 0 - 0 + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$