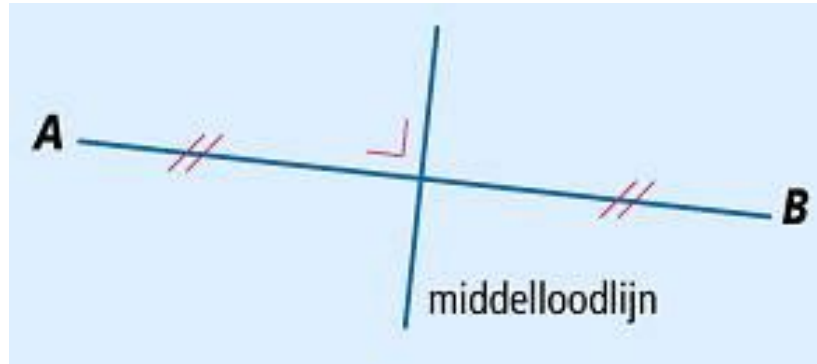


9.0 Voorkennis [1]

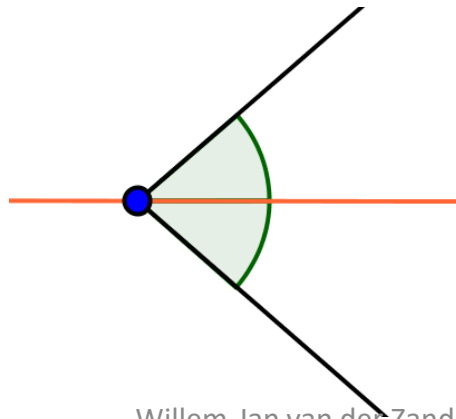
Definitie middelloodlijn:

De middelloodlijn van een lijnstuk is de lijn door het midden van dat lijnstuk die loodrecht op dat lijnstuk staat.



Definitie bissectrice:

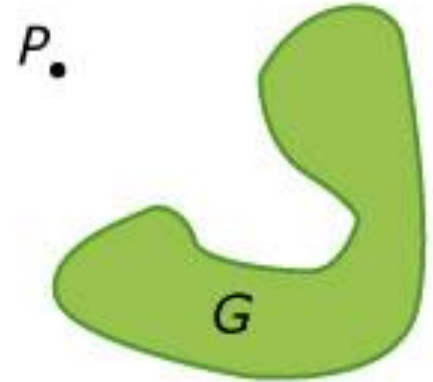
De bissectrice van een hoek is de lijn die de hoek middendoor deelt.



9.2 Meetkundige plaatsen [1]

Definitie afstand van punt tot gebied:

De afstand van een punt P tot een gebied G is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen P en een punt van G .



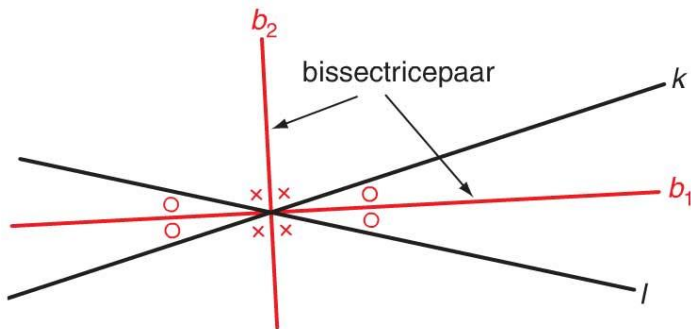
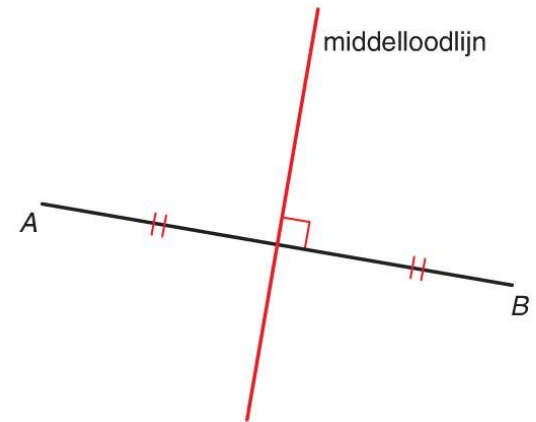
Stelling van afstand punt tot lijn:

De afstand van een punt tot een lijn is de lengte van het loodlijnstuk vanuit dat punt op die lijn.

Je kunt de afstand van een punt P tot een lijn l vinden door vanuit het punt P een lijn k te tekenen, die loodrecht op lijn l staat.

9.2 Meetkundige plaatsen [1]

Op de **middelloodlijn** van het lijnstuk AB liggen alle punten met een gelijke afstand tot A en B .
Voor een punt P op de middelloodlijn geldt:
 $d(P,A) = d(P,B)$

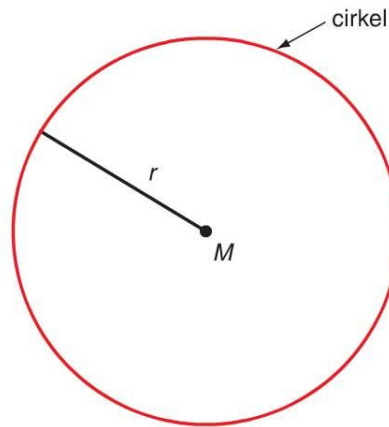
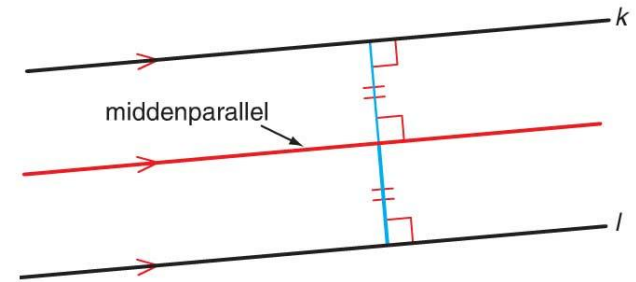


Op de **bissectrices** b_1 en b_2 van de lijnen k en l liggen alle punten met een gelijke afstand tot de lijnen k en l .
Voor een punt P op het **bissectricepaar** geldt: $d(P, k) = d(P, l)$

9.2 Meetkundige plaatsen [1]

Op de **middelparallel** van de evenwijdige lijnen k en l liggen alle punten met gelijke afstand tot k en l .

Voor een punt P op de middelparallel geldt $d(P, k) = d(P, l)$



Op de cirkel liggen alle punten met een Gelijke afstand tot het middelpunt van de cirkel.

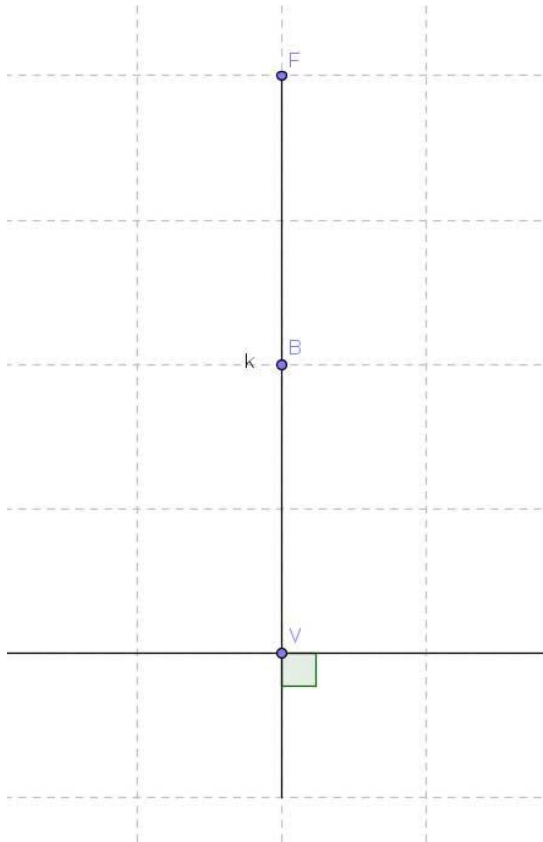
Voor een punt p op de cirkel geldt $d(P, M) = r$

9.2 Meetkundige plaatsen [2]

Voorbeeld:

Gegeven zijn een lijn l en een punt F dat niet op deze lijn ligt.

Geef alle punten die op een gelijke afstand van punt F en lijn l liggen weer.



Stap 1:

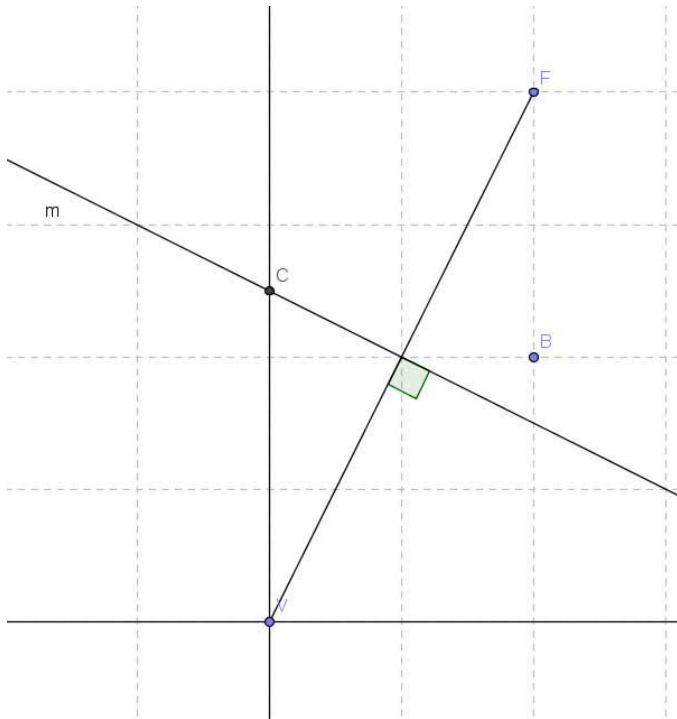
Door een lijn vanuit F loodrecht op l te tekenen
Kan het punt B eenvoudig gevonden worden.

9.2 Meetkundige plaatsen [2]

Voorbeeld:

Gegeven zijn een lijn l en een punt F dat niet op deze lijn ligt.

Geef alle punten die op een gelijke afstand van punt F en lijn l liggen weer.



Stap 2:

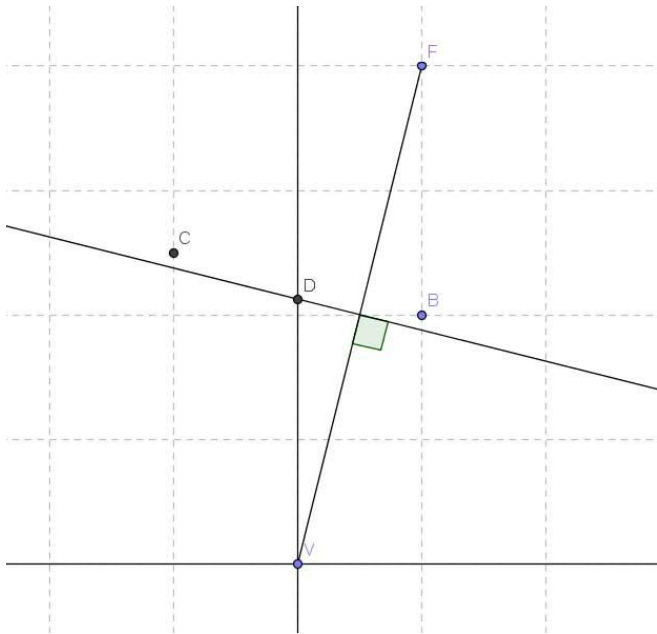
- Teken een punt V op de lijn l ;
- Teken door V de loodlijn k op l ;
- Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV ;
- Het snijpunt van k en m is het punt C ;

9.2 Meetkundige plaatsen [2]

Voorbeeld:

Gegeven zijn een lijn l en een punt F dat niet op deze lijn ligt.

Geef alle punten die op een gelijke afstand van punt F en lijn l liggen weer.



Stap 3:

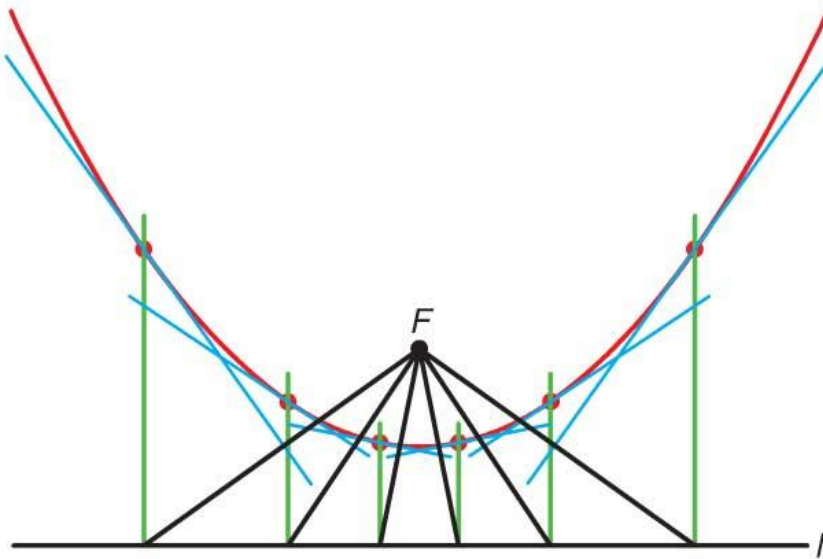
- Teken een ander punt V op de lijn l ;
- Teken door V de loodlijn k op l ;
- Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV ;
- Het snijpunt van k en m is het punt D ;

9.2 Meetkundige plaatsen [2]

Voorbeeld:

Gegeven zijn een lijn l en een punt F dat niet op deze lijn ligt.

Geef alle punten die op een gelijke afstand van punt F en lijn l liggen weer.



Wanneer je dit een aantal keer herhaalt, zul je zien dat de punten op een parabool liggen.

De punten die op een gelijke afstand van punt F en lijn l liggen, liggen op een parabool.

9.2 Meetkundige plaatsen [2]

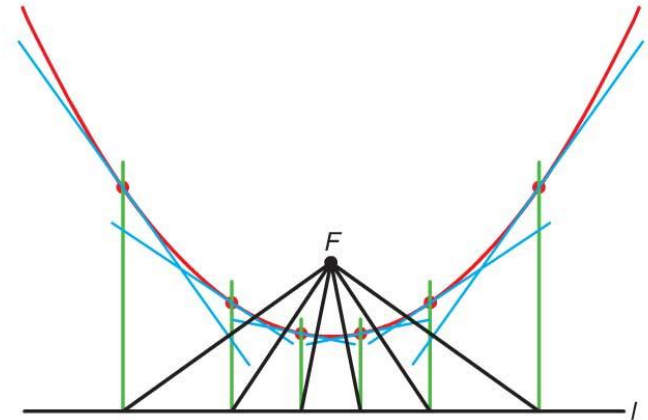
Algemeen:

Het punt F heet het **brandpunt van de parabool**

De lijn l heet de **richtlijn van de parabool**.

Definitie van een parabool:

Een parabool met brandpunt F en richtlijn l (F niet op l) is een verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een lijn en een punt dat niet op een lijn ligt.



Let op:

Een parabool kun je dus op een meetkundige manier beschrijven, maar ook met behulp van een formule. Oorspronkelijk werd een parabool in de wiskunde meetkundig beschreven. Pas veel later is er hier een formule voor gekomen.

9.2 Meetkundige plaatsen [2]

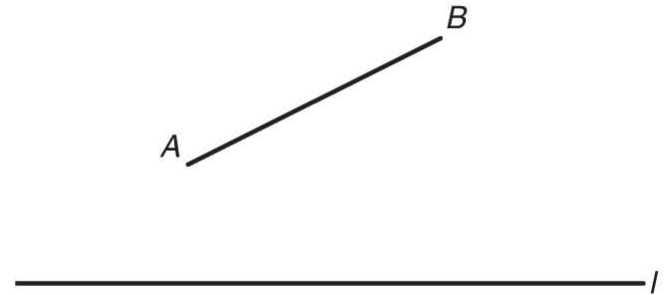
Voorbeeld:

Gegeven is de lijn l en het lijnstuk AB .

Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, \text{lijnstuk } AB) = d(P, l)$

Aanpak:

We willen nu alle punten te weten komen die op gelijke afstand liggen van lijnstuk AB en de lijn l .



- 1) De punten die op gelijke afstand van punt A en lijn l liggen [$d(P,A) = d(P, l)$] zijn te vinden door een parabool te tekenen met **brandpunt A** en **richtlijn van de parabool l** ;
- 2) De punten die op gelijke afstand van punt B en lijn l liggen [$d(P,B) = d(P, l)$] zijn te vinden door een parabool te tekenen met **brandpunt B** en **richtlijn van de parabool l** ;
- 3) De punten die op gelijke afstand van de lijn AB en de lijn l liggen [$d(P,AB) = d(P, l)$] zijn te vinden door de **bissectrice** te tekenen van de (doorgetrokken) lijn AB en de lijn l .

9.2 Meetkundige plaatsen [3]

Algemeen:

Een ellips is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een cirkel en een punt **BINNEN** de cirkel.

In het plaatje hiernaast geldt:

Het punt M is het **middelpunt** van de ellips.

De punten M en F_2 zijn de **brandpunten** van de ellips.

De cirkel is de **richtcirkel** van de ellips.

Er geldt:

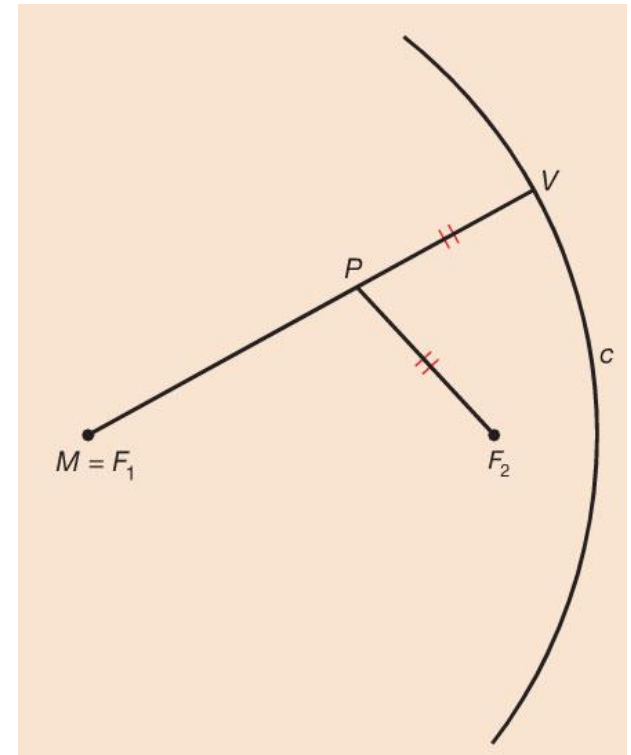
$$d(P, c) = PV = MV - MP = r - d(P, F_1)$$

$$d(P, F_2) = r - d(P, F_1) \text{ en dus } d(P, F_2) + d(P, F_1) = r.$$

Samengevat:

Een ellips is de verzameling van alle punten P waarvoor geldt $d(P, F_2) + d(P, F_1) = \text{constant}$.

De punten F_1 en F_2 zijn de brandpunten van de ellips.



9.2 Meetkundige plaatsen [3]

De figuur hiernaast is een ellips.

- Het lijnstuk AB heet de **lange as van de ellips** en heeft een lengte van $2a$ en is een **symmetrieas**;
- Het lijnstuk CD heet de **korte as van de ellips** en heeft een lengte van $2b$ en is een **symmetrieas**;
- De punten A, B, C en D zijn de **toppen van de ellips**;
- Het snijpunt M van de symmetrieassen het **middelpunt van de ellips**;
- De **brandpuntsafstand** F_1F_2 heeft lengte $2c$;

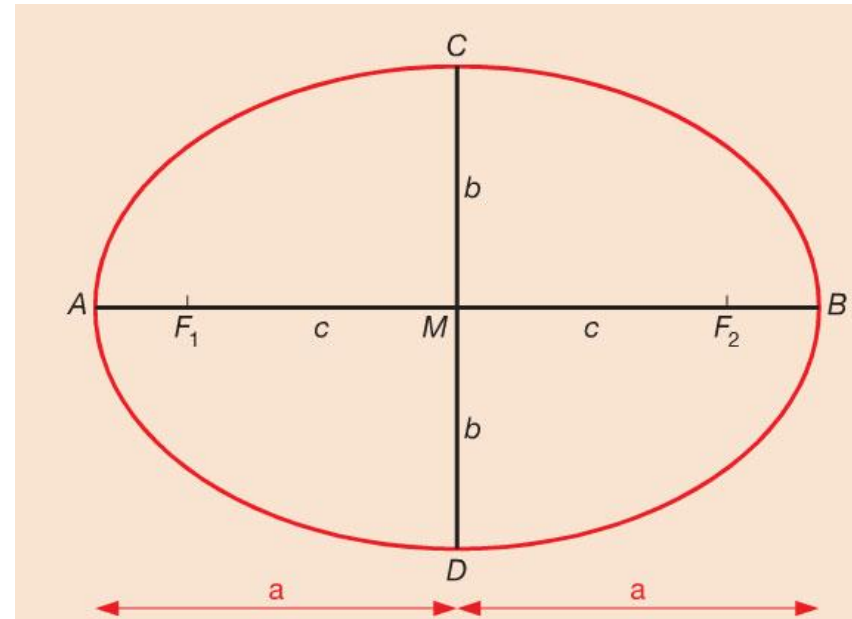
Er geldt $d(C, F_1) = d(C, F_2)$.

Hieruit volgt vanwege eigenschap brandpunten:

$$d(C, F_1) + d(C, F_2) = d(A, F_1) + d(A, F_2)$$

$$2CF_1 = a - c + a + c = 2a$$

$$CF_1 = a$$



Met behulp van de stelling van Pythagoras volgt nu: $a^2 = b^2 + c^2$.

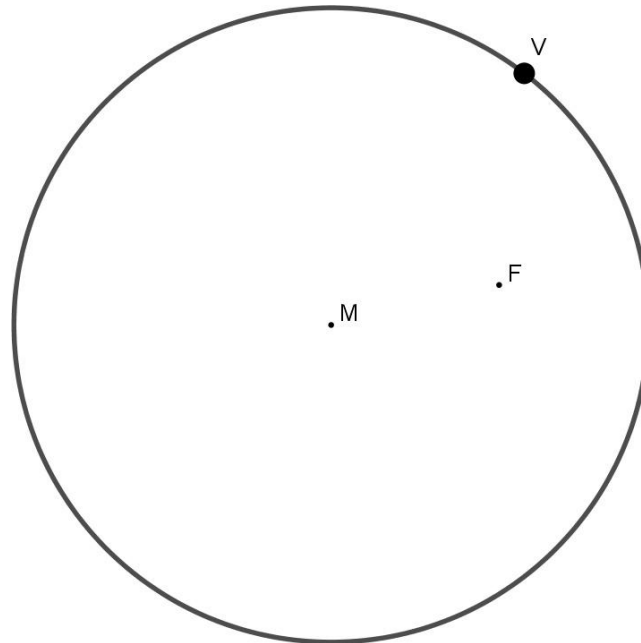
9.2 Meetkundige plaatsen [3]

Voorbeeld:

Gegeven is een richtcirkel c met brandpunt F en middelpunt M .
Teken nu een punt P van de ellips.

Stap 1:

Teken een punt V op de richtcirkel.



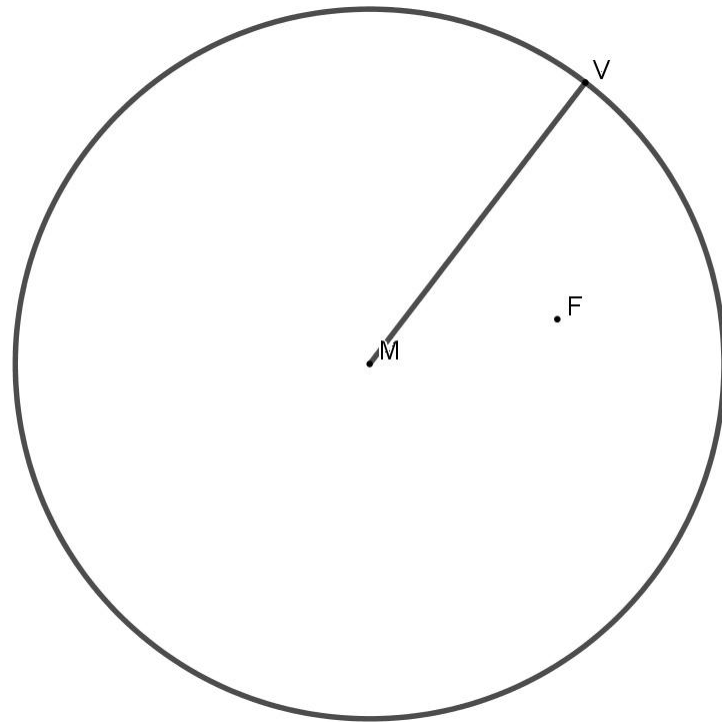
9.2 Meetkundige plaatsen [3]

Voorbeeld:

Gegeven is een richtcirkel c met brandpunt F en middelpunt M .
Teken nu een punt P van de ellips.

Stap 2:

Teken de lijn k door M en V .



9.2 Meetkundige plaatsen [3]

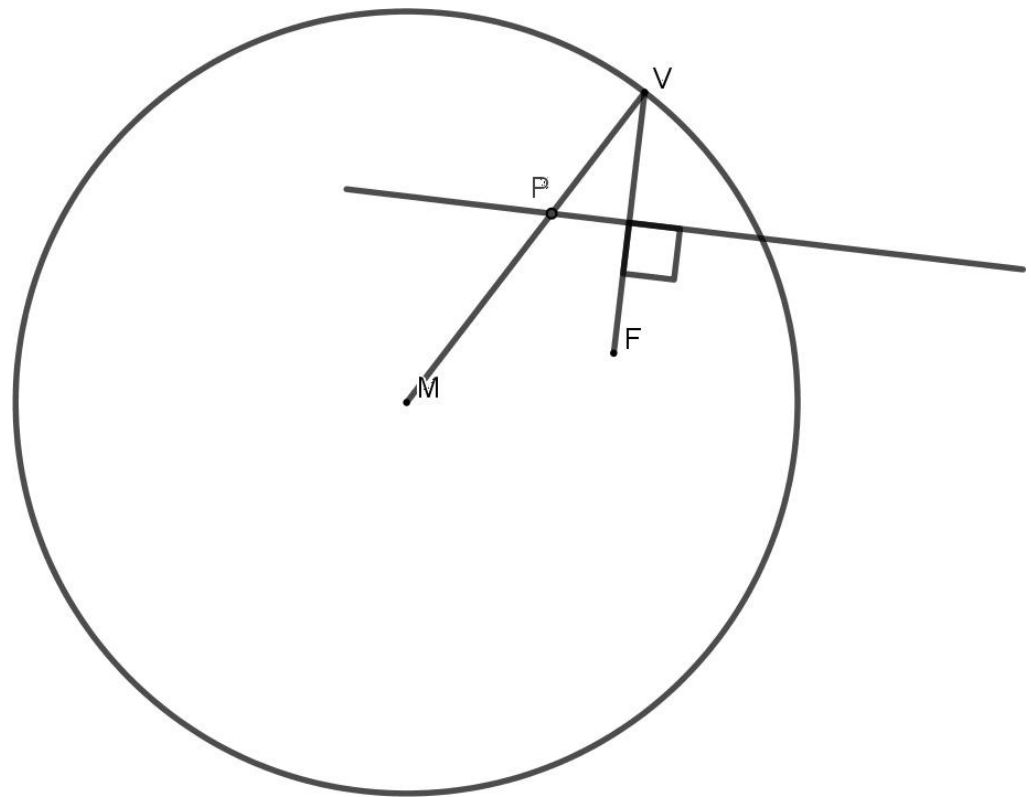
Voorbeeld:

Gegeven is een richtcirkel c met brandpunt F en middelpunt M .
Teken nu een punt P van de ellips.

Stap 3:

Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV .

Het snijpunt van k en m is het punt P .



9.2 Meetkundige plaatsen [4]

Algemeen:

Een hyperbooltak is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een cirkel en een punt **BUITEN** de cirkel.

Let op:

Als het punt BINNEN de cirkel ligt, is er sprake van een ellips.

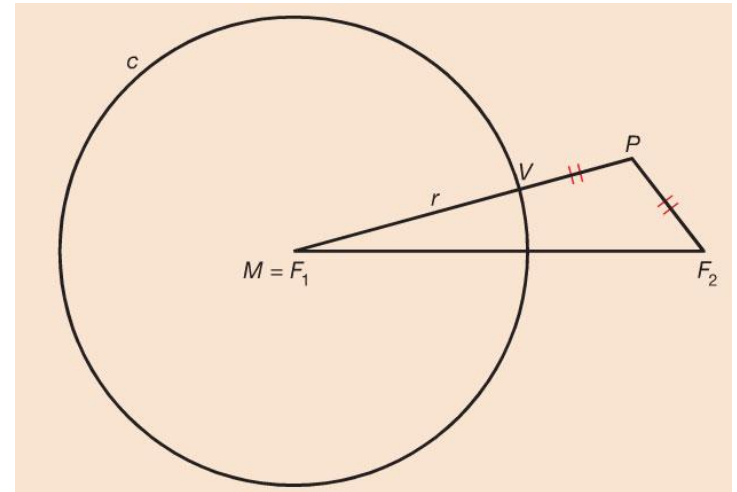
In de figuur hiernaast geldt:

$$d(P, c) = PV = MP - MV = d(P, F_1) - r.$$

$$d(P, F_2) = d(P, F_1) - r.$$

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = r.$$

Als je dit een aantal keer herhaalt ontstaat één van de hyperbooltakken van de hyperbool.



9.2 Meetkundige plaatsen [4]

Algemeen:

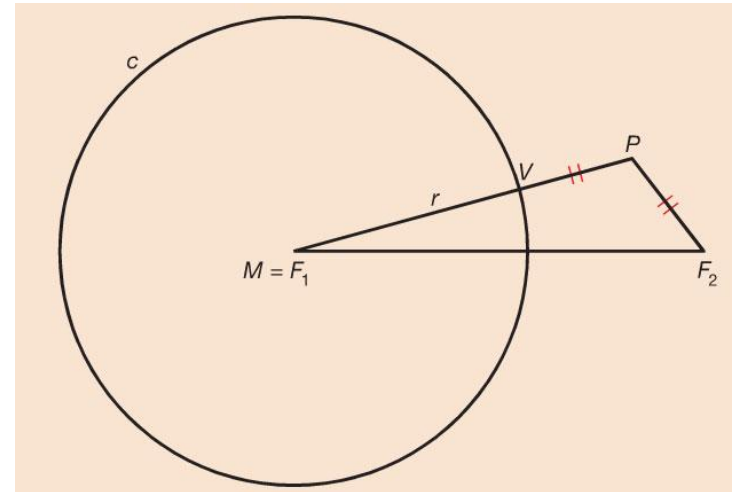
Een hyperbooltak is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een cirkel en een punt **BUITEN** de cirkel.

Let op:

Als het punt BINNEN de cirkel ligt, is er sprake van een ellips.

De andere hyperbooltak ontstaat door de **richtcirkel** te nemen met middelpunt **(brandpunt van de hyperbool)** F_2 en straal r en dan hetzelfde te doen als bij de **richtcirkel** met middelpunt **(brandpunt van de hyperbool)** F_1 en straal r .

Hiervoor geldt: $d(P, F_2) - d(P, F_1) = r$.



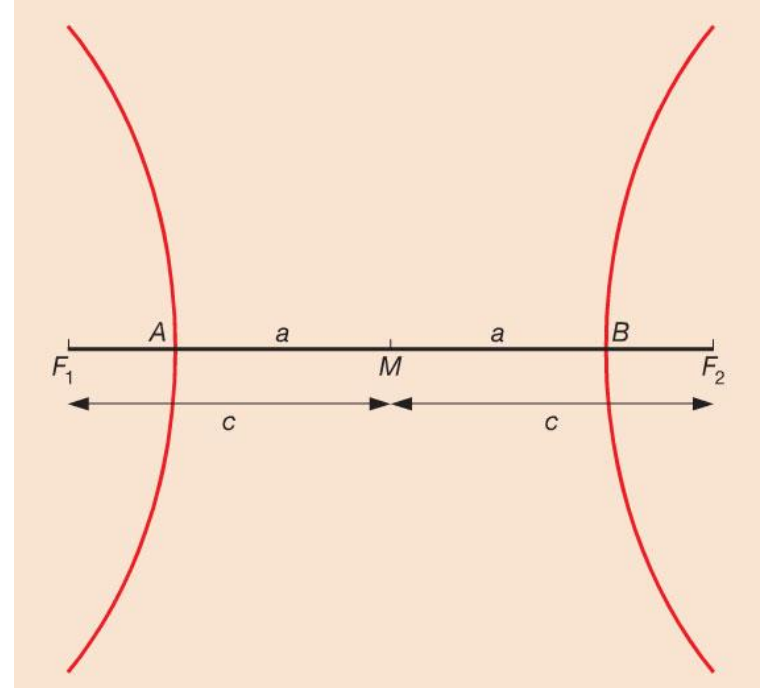
Algemeen:

Voor alle punten P op een hyperbool geldt: $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = r$

9.2 Meetkundige plaatsen [4]

Hiernaast is een hyperbool getekend:

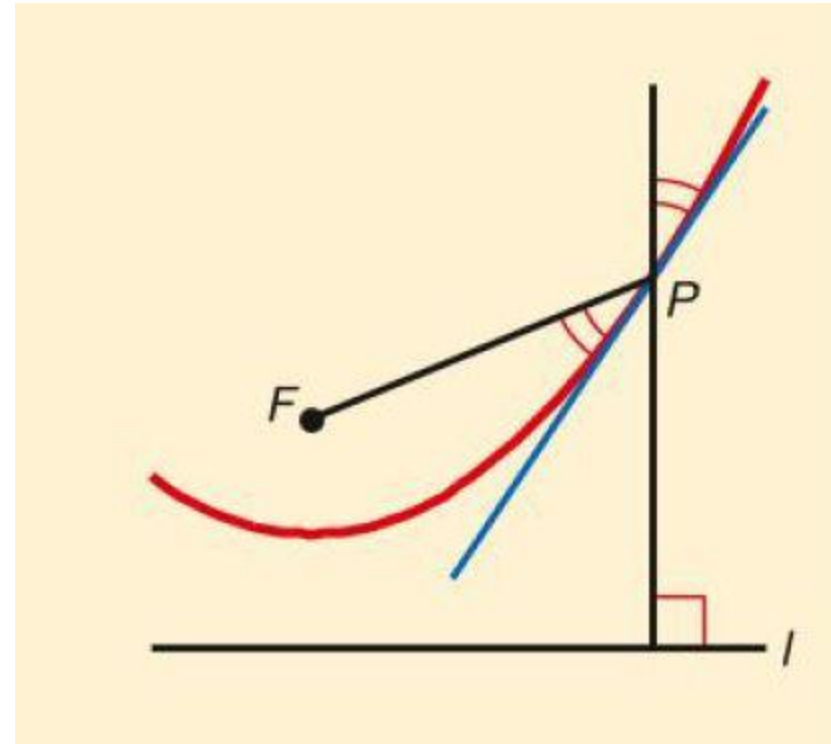
- F_1 en F_2 zijn de **brandpunten van de hyperbool**;
- de lijn F_1F_2 is de symmetrieas van de hyperbool;
- de punten A en B zijn de **toppen van de hyperbool**;
- De middelloodlijn van het lijnstuk F_1F_2 is de andere symmetrieas van de hyperbool;
- Het snijpunt van de symmetrieassen is het **middelpunt van de hyperbool** M ;
- $AB = 2a$ en F_1F_2 (brandpuntsafstand) $= 2c$.
- Voor het punt B op de hyperbool geldt:
 $d(B, F_1) - d(B, F_2) = 2a + AF_1 - BF_2$
omdat $AF_1 = BF_2$ geldt er: $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$;



9.3 Raaklijneigenschappen [1]

Raaklijneigenschap parabool:

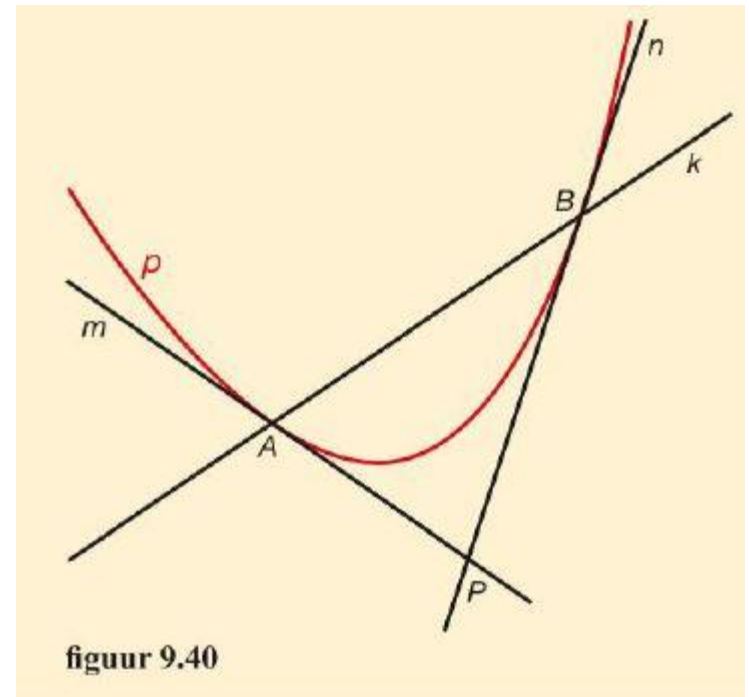
De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn.



9.3 Raaklijneigenschappen [1]

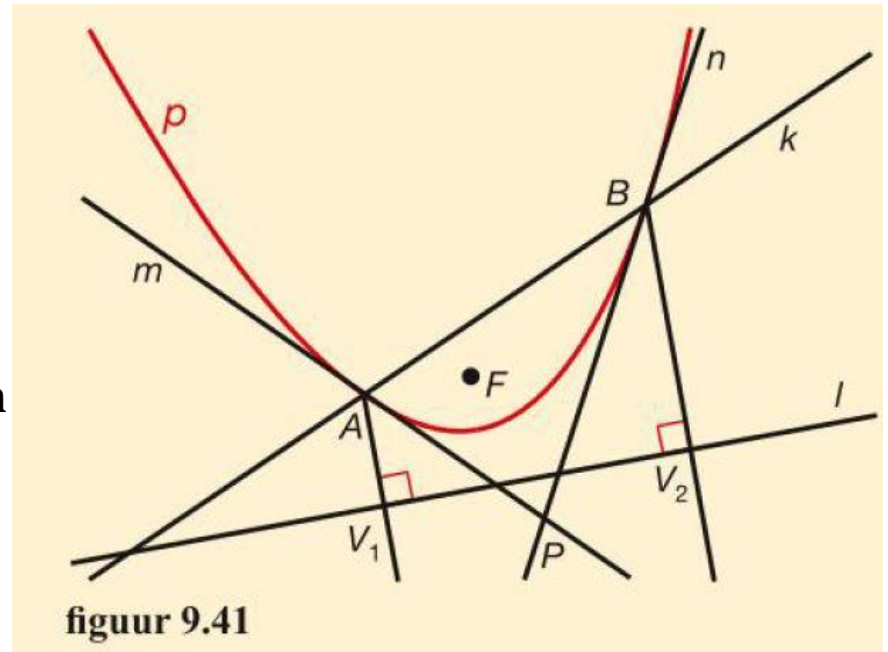
De lijn k snijdt de parabool p in de punten A en B . De lijn m raakt p in A en de lijn n raakt p in B . De lijnen m en n snijden elkaar in het punt P .

Het punt P heet de pool van lijn k , en de lijn k heet de poollijn van de pool P .



9.3 Raaklijneigenschappen [1]

Hiernaast zijn de parabool p met brandpunt F en richtlijn l getekend. Op de richtlijn liggen de punten V_1 en V_2 zo, dat AV_1 en BV_2 loodrecht staan op l . Te bewijzen is dat de punten F , V_1 en V_2 op de cirkel liggen met middelpunt P en straal PF .

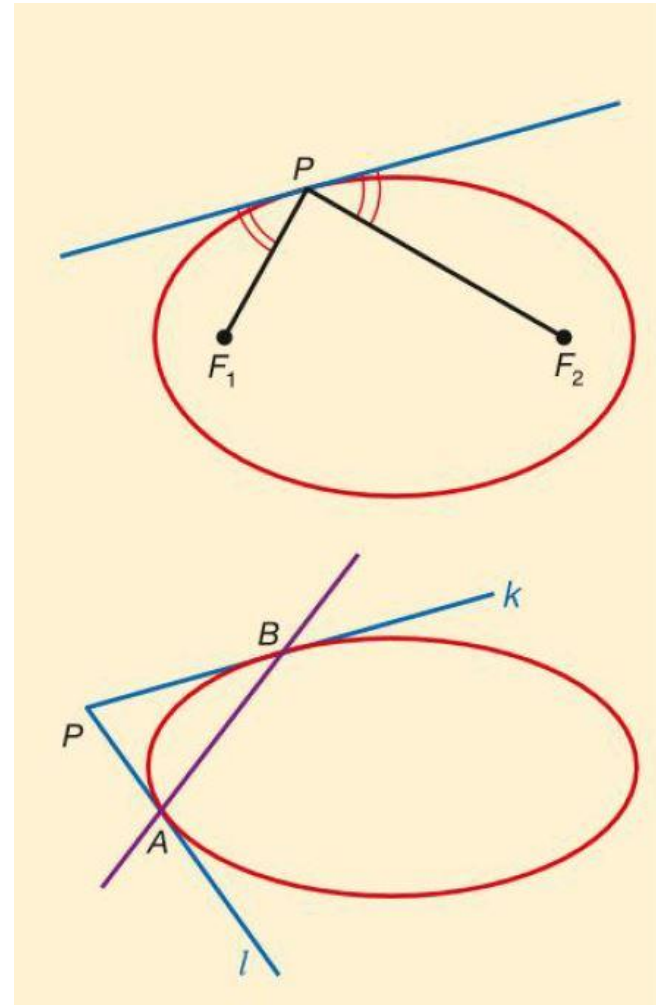


9.3 Raaklijneigenschappen [2]

Raaklijneigenschap ellips:

De raaklijn in een punt P van een ellips maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten.

De lijn AB is de poollijn van de ellips.



9.3 Raaklijneigenschappen [3]

Raaklijneigenschap hyperbool:

De raaklijn in een punt P van een hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten.

De lijn AB is de poollijn van de hyperbool.

