12.0 Voorkennis

Voorbeeld 1:
l:$y = ax + b$ gaat door de punten $A(5, 3)$ en $B(8, 12)$. Stel de functie van l op.

Stap 1:
Bepaal de richtingscoëfficiënt van l:$y = ax + b$:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{12-3}{8-5} = \frac{9}{3} = 3$$

Hieruit volgt: l:$y = 3x + b$

Stap 2:
Bepaal b door één van de twee gegeven punten in te vullen:

$y = 3x + b$
$12 = 3 \cdot 8 + b$
$12 = 24 + b$
$b = -12$
Dus: $y = 3x - 12$

12.0 Voorkennis

Voorbeeld 2 (Exponentiële groei):

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
N	100	150	225	337,5	506,25

Als je opeenvolgende hoeveelheden door elkaar gaat delen, kun je zien of de hoeveelheid steeds met hetzelfde percentage toeneemt.

$$\frac{150}{100} = 1{,}5 \quad \frac{225}{150} = 1{,}5 \quad \frac{337{,}5}{225} = 1{,}5 \quad \frac{506{,}25}{337{,}5} = 1{,}5$$

Je ziet dat je de hoeveelheid op een bepaald tijdstip kunt vinden, door de hoeveelheid op het vorige tijdstip te vermenigvuldigen met 1,5.

Als de uitkomsten steeds gelijk zijn (of bijna gelijk zijn), kun je uitgaan van **exponentiële groei**.

12.0 Voorkennis

Voorbeeld 2 (Exponentiële groei)

t	0	1	2	3	4
N	100	150	225	337,5	506,25

- De hoeveelheid N neemt per tijdseenheid met hetzelfde **percentage** toe.
- Bovenstaande tabel geeft de formule $N = 100 \cdot 1{,}5^t$ met 100 als beginwaarde en 1,5 als **groeifactor** per tijdseenheid.

- Bij een gelijke procentuele afname per tijdseenheid is er ook exponentiële groei (ook **exponentiële afname** of **exponentieel verval** genoemd);
- Bij een groeifactor groter dan 1 is de grafiek stijgend;
- Bij een groeifactor tussen 0 en 1 is de grafiek dalend;
- Bij exponentiële groei is de formule altijd $N = b \cdot g^t$ met b als beginwaarde en g als groeifactor per tijdseenheid.

12.1 Exponentiële groei [1]

Voorbeeld 1 (Exponentiële groei):

t	0	1	2	3	4
N	100	150	225	337,5	506,25

- In dit voorbeeld is het **groeipercentage** 50%
- In dit voorbeeld is de **groeifactor** 1,5

- Groeifactor = $1+\frac{50}{100}$ $\left(=1+\frac{\text{groeipercentage}}{100}\right)$

- Groeipercentage = (1,5 – 1) · 100% (=groeifactor -1) · 100%

12.1 Exponentiële groei [1]

Voorbeeld 1 (Exponentiële afname):

t	0	1	2	3	4
N	100	80	64	51,2	40,96

- In dit voorbeeld is het groeipercentage -20%
- In dit voorbeeld is de groeifactor 0,8
- Groeifactor = $1 + \frac{-20}{100} \quad (= 1 + \frac{\text{groeipercentage}}{100})$
- Groeipercentage = (0,8 – 1) · 100% (= groeifactor -1) · 100%

12.1 Exponentiële groei [2]

Voorbeeld 1 (Exponentiële groei)

t (uur)	0	1	2	3	4
N	100	150	225	337,5	506,25

- De groeifactor per uur is 1,5 want:
  $N_1 = 1{,}5 \cdot N_0 = 1{,}5 \cdot 100 = 150$

- De groeifactor per twee uur is $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 1{,}5^2$ want:
  $N_2 = 1{,}5^2 \cdot N_0 = 1{,}5^2 \cdot 100 = 225$

- De groeifactor per drie uur is $1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 1{,}5^3$ want:
  $N_3 = 1{,}5^3 \cdot N_0 = 1{,}5^3 \cdot 100 = 337{,}5$

- De groeifactor per t uur is nu dus $1{,}5^t$ want
  $N_t = 1{,}5^t \cdot N_0$

12.1 Exponentiële groei [2]

<u>Voorbeeld 2:</u>

Een hoeveelheid neemt per dag met 23% toe.

- De groeifactor per dag (g) is 1,23
- De groeifactor toename per week (g_{week}) is $g^7 = 1{,}23^7 = 4{,}26$
- Per week neemt de hoeveelheid met (4,26 – 1) · 100% = 326% toe

- De groeifactor per dag (g) is 1,23
- De groeifactor per 6 uur (g_{6uur}) is $g^{¼} = 1{,}23^{¼} = 1{,}05$
- Per zes uur neemt de hoeveelheid met (1,05 -1) · 100% = 5% toe

12.1 Exponentiële groei [3]

Voorbeeld:
De bevolking van een stad groeit jaarlijks met 5%. Bereken hoeveel jaar het duurt voordat de bevolking verdubbeld is. Dit is de **verdubbelingstijd**.

Stap 1:
Bereken de groeifactor per jaar: $g = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$

Stap 2:
Stel de exponentiële formule op: $N = 1{,}05^t$

Stap 3:
Los de vergelijking $1{,}05^t = 2$ op met je GR:

$y_1 = 1{,}05^x$
$y_2 = 2$
Intersect geeft 14,2 jaar. Dit is 14 jaar en 3 maanden.

Let op: Bij een **halveringstijd** ($0 < g < 1$) los je $g^t = 0{,}5$ op

12.2 Groeiformules [1]

Voorbeeld:
De hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel. Op tijdstip $t = 5$ zijn er 2.000 bacteriën. Op tijdstip $t = 12$ zijn er 7.000 bacteriën.

Stel de formule op van het aantal bacteriën N om t uur.

Stap 1:
Bij een exponentieel verband hoort de formule:
$N = b \cdot g^t$ met b = beginhoeveelheid en t = tijd

Stap 2:
Bereken de groeifactor van $t = 5$ tot $t = 12$ ($g_{7\text{uur}}$)

$$g_{7\text{uur}} = \frac{N_{12}}{N_5} = \frac{7.000}{2.000} = 3{,}5$$

12.2 Groeiformules [1]

Voorbeeld:

Stap 3:
Bereken de groeifactor per uur (g):

$g = \left(g_{7uur}\right)^{\frac{1}{7}} = (3{,}5)^{\frac{1}{7}} = 1{,}195...$ => $N = b \cdot 1{,}195...^t$

Stap 4:
Bereken de beginhoeveelheid:

$N = b \cdot 1{,}195...^t$
$7.000 = b \cdot 1{,}195...^{12}$
$7.000 = b \cdot 8{,}56....$
$b \approx 817$ => $N = 817 \cdot 1{,}20^t$

12.2 Groeiformules [2]

<u>Voorbeeld 1:</u>
Het aantal vissen in een meer is gegeven door de formule

$$N = \frac{2500}{1 + 5{,}5 \cdot 0{,}74^t}$$

Hierin is N het aantal vissen en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2010.

Als t heel groot is, dan geldt: $0{,}74^t \approx 0$.
Hieruit volgt: $5{,}5 \cdot 0{,}74^t \approx 0$.
Hieruit volgt weer: $1 + 5{,}5 \cdot 0{,}74^t \approx 1$.

Dit betekent dat als t heel groot is, N de waarde van 2500 aan gaat nemen. Dit is het **verzadigingsniveau** (ook wel **grenswaarde** genoemd)

12.2 Groeiformules [2]

Voorbeeld 2:
Het aantal vissen in een meer is gegeven door de formule

$$N = \frac{2500}{1 + 5{,}5 \cdot 0{,}74^t}$$

Hierin is N het aantal vissen en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2010.

- Als t toeneemt, neemt $0{,}74^t$ af.

- Als $0{,}74^t$ afneemt, neemt $1 + 5{,}5 \cdot 0{,}74^t$ ook af, maar blijft positief.
  De noemer van de breuk neemt dus af.

- Omdat de teller constant is, neemt de breuk zelf toe.

- Hieruit volgt dat de grafiek van N stijgend is.

12.3 Logaritmen [1]

We hebben de functie $f(x) = 2^x$
De oplossing van de vergelijking $f(x) = 8$ is 3.

Bestaat er nu een functie $g(x)$ zodat geldt: $g(8) = 3$?

Ja, en dit is de functie: $g(x) = {}^2\log(x)$.
De oplossing van de vergelijking $g(8) = {}^2\log(8) = 3$.

Of in woorden: Tot welke macht moet je 2 verheffen om 8 te krijgen.

<u>**Er geldt dus:**</u> Uit $2^x = 8$ volgt ${}^2\log(8) = x$
Hieruit valt af te leiden: ${}^2\log(8) = {}^2\log(2^x) = x$
De macht en de logaritme "vallen als het ware tegen elkaar weg".

<u>**In het algemeen geldt:**</u> Uit ${}^g\log(y) = x$ volgt $y = g^x$
Hieruit valt af te leiden: ${}^g\log(y) = {}^g\log(g^x) = x$

12.3 Logaritmen [1]

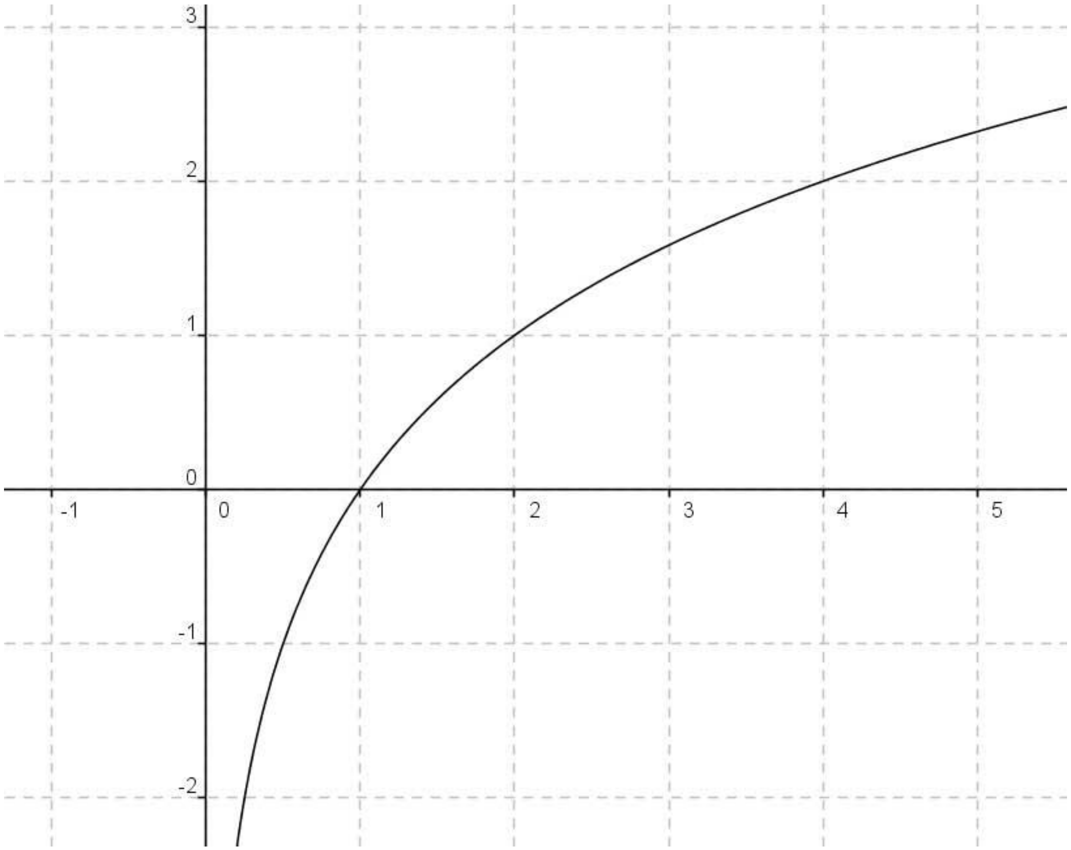
Voorbeeld 1: ${}^{2}\log(\tfrac{1}{2}) = {}^{2}\log(2^{-1}) = -1$

Schrijf het getal tussen de haakjes als een macht.

Voorbeeld 2: ${}^{3}\log(81) = {}^{3}\log(3^{4}) = 4$

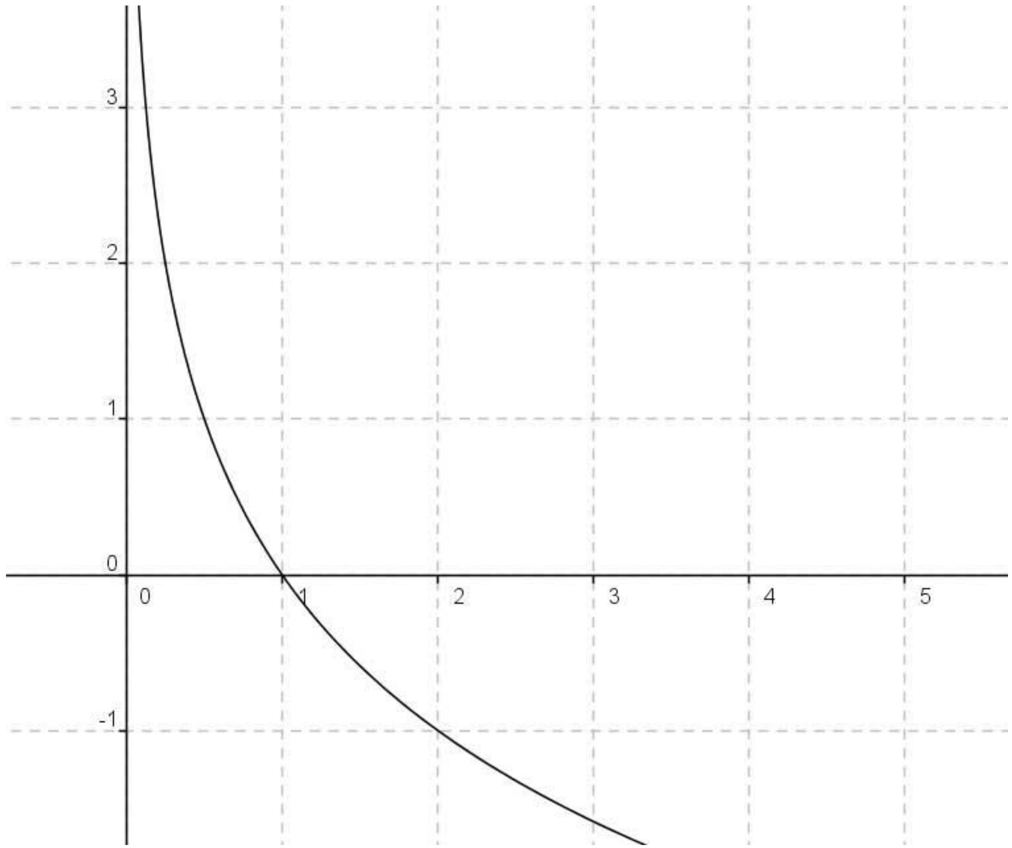
Voorbeeld 3: ${}^{5}\log(25\sqrt{5}) = {}^{5}\log(5^{2} \cdot 5^{\frac{1}{2}}) = {}^{5}\log(5^{2\frac{1}{2}}) = 2\tfrac{1}{2}$

12.3 Logaritmen [2]



- In de grafiek is de functie $f(x) = {}^{2}\log(x)$ getekend;
- D_f = (0,->), B_f = |R met de y-as als asymptoot;
- Elke functie ${}^{g}\log(x)$ met $g > 1$ heeft deze vorm.

12.3 Logaritmen [2]



- In de grafiek is de functie $f(x) = {}^{0.5}\log(x)$ getekend;
- D_f = (0,->) B_f = |R met de y-as als asymptoot;
- Elke functie ${}^{g}\log(x)$ met $0 < g < 1$ heeft deze vorm.

12.3 Logaritmen [2]

Berekenen van logaritme met de GR:

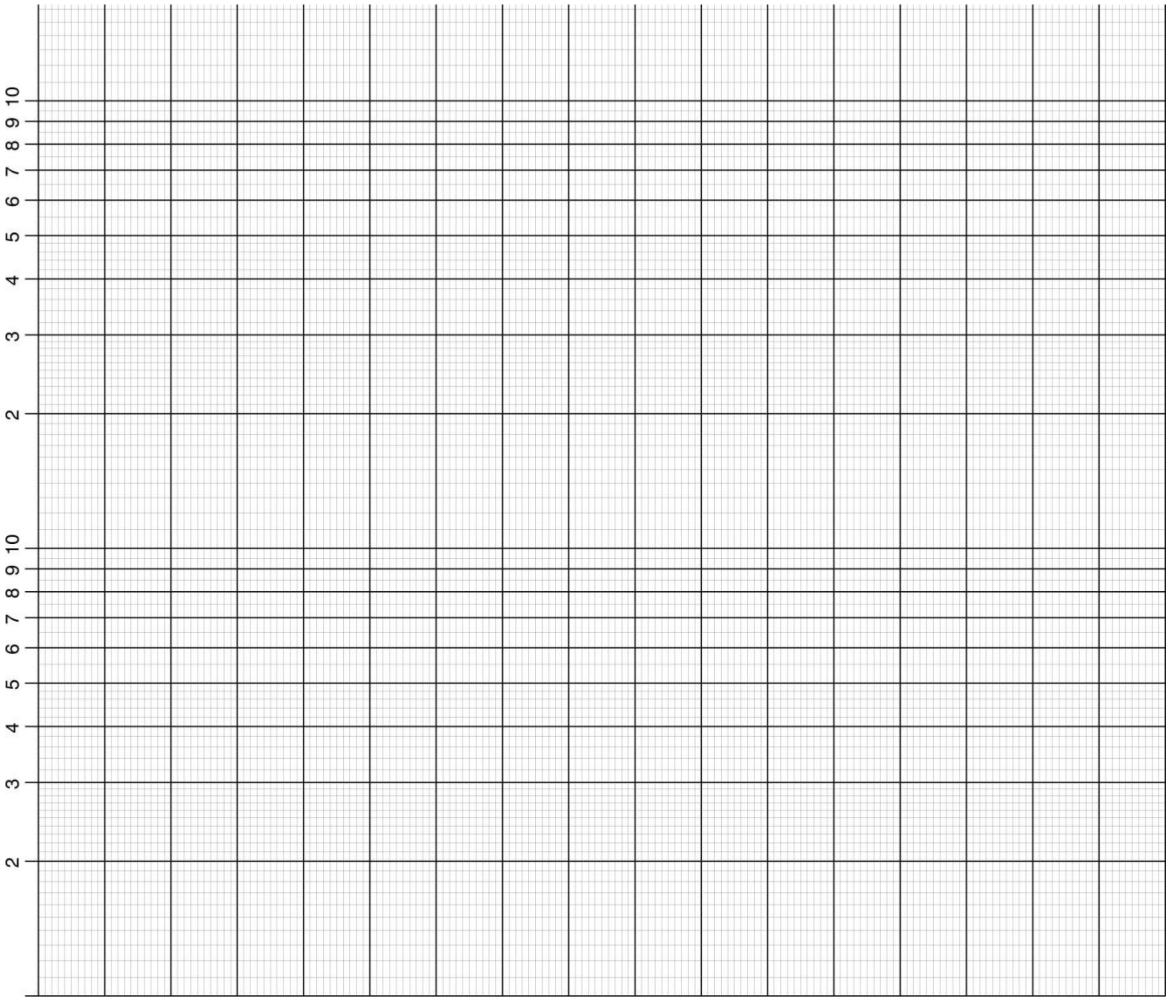
Maak gebruik van de regel: $$ {}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)} \left(= \frac{{}^{10}\log(a)}{{}^{10}\log(g)} \right) $$

De log-toets op de GR heeft als grondtal 10. Voor het (nieuwe) grondtal p wordt in dit geval dus 10 genomen.

Voorbeeld:

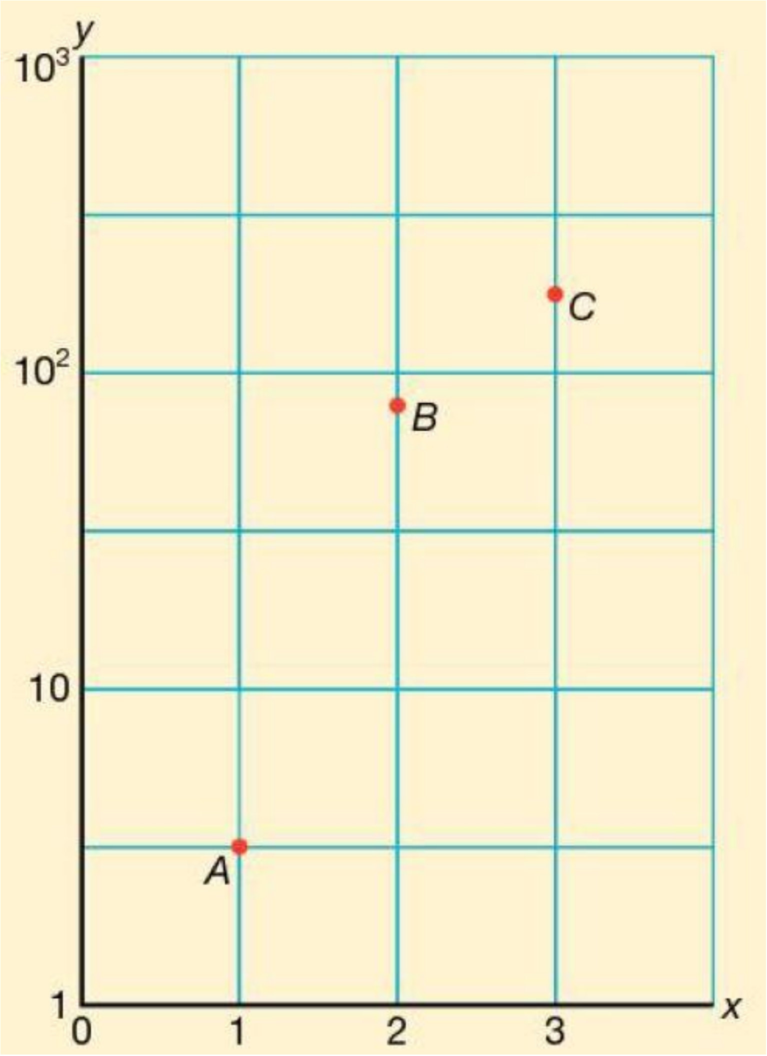
$$ {}^{2}\log(5) = \frac{\log(5)}{\log(2)} \approx 2{,}32 $$

12.4 Werken met logaritmen [1]



- **Logaritmisch papier**;
- De afstand van 1 tot 10 is even groot als de afstand van 10 tot 100;
- Van 10 tot 20 staan er 10 horizontale lijnen;
- Van 20 tot 30 staan er 10 horizontale lijnen;
- Van 30 tot 40 staan er 5 horizontale lijnen;
- Van 40 tot 50 staan er 5 horizontale lijnen;
- Van 50 tot 60 staan er 2 horizontale lijnen;

12.4 Werken met logaritmen [1]



Het punt A ligt verticaal precies tussen de 1 en de 10 in. De y-coördinaat van dit punt kan als volgt berekend worden:

$y_A = 10^{½} \approx 3{,}2.$

Het punt B ligt verticaal gezien 1,8 cm boven de lijn y = 10. De y-coördinaat van dit punt kan als volgt berekend worden:

$y_A = 10^{1+1{,}8/2} = 10^{1{,}9} \approx 79.$

12.4 Werken met logaritmen [2]

Voor logaritmen gelden de volgende rekenregels:

(1) $^{g}\log(ab) = {}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b)$

(2) $^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right) = {}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b)$

(3) $^{g}\log(a^{p}) = p \cdot {}^{g}\log(a)$

(4) $^{g}\log(a) = \frac{^{p}\log(a)}{^{p}\log(g)}$

Voorbeeld:

Gegeven is de formule $N(x) = 31{,}3 + 24{,}9 \cdot \log(x)$

Toon aan dat als x verdubbelt, N met ongeveer 7,5 toeneemt

$$\begin{aligned} N(2x) &= 31{,}3 + 24{,}9 \cdot \log(2x) \\ &= 31{,}3 + 24{,}9(\log(2) + \log(x)) \\ &= 31{,}3 + 24{,}9\log(2) + 24{,}9\log(x) \\ &= 31{,}3 + 24{,}9\log(x) + 7{,}495\ldots \end{aligned}$$

(1) $^{g}\log(ab) = {}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b)$

Je hebt het gevraagde nu aangetoond.

12.5 Groeisnelheid [1]

Afgeleide functie:
Als het grondtal e (2,718…) is, dan geldt: $f(x) = e^x$ en $f'(x) = e^x$

Voorbeeld 1:
Geef de afgeleide van de functie $f(x) = 13\,e^x$

$f'(x) = 13e^x$

Voorbeeld 2:
Geef de **groeisnelheid** op t = 7 van de groeiformule $N(t) = 50\,e^{2t}$

$N'(t) = 2 \cdot 50e^{2t} = 100\mathrm{e}^{2t}$

De vermenigvuldiging met 2 is nodig omdat je bij het differentiëren van e^{2t} de kettingregel nodig hebt. 2 is de afgeleide van $2t$.

Invullen van $t = 7$ in de afgeleide functie geeft de groeisnelheid
$N'(7) \approx 120.260.428{,}4$

12.5 Groeisnelheid [2]

Definitie:
De natuurlijke logaritme is een logaritme met het grondtal e: ${}^{e}\log(a) = \ln(a)$

Voor natuurlijke logaritmen gelden de volgende rekenregels:

(1) $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

(2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

(3) $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$

(4) ${}^{g}\log(\mathrm{a}) = \frac{\ln(\mathrm{a})}{\ln(\mathrm{g})}$

Alle berekeningen gaan verder op exact dezelfde manier zoals dat ook bij “normale” logaritmen het geval is.

Afgeleide functie:
De afgeleide van $f(x) = a^x$ is $f'(x) = a^x \cdot {}^{\mathrm{e}}\log(a) = a^x \cdot \ln(a)$

12.5 Groeisnelheid [2]

Voorbeeld 1:
Bereken de afgeleide van $N(t) = 4^{2t-1}$

$N(t) = 4^{2t-1}$

$N'(t) = 2 \cdot 4^{2t-1} \cdot \ln(4)$

De vermenigvuldiging met 2 is nodig omdat je bij het differentiëren van 4^{2t-1} de kettingregel nodig hebt. 2 is de afgeleide van $2t - 1$.

Voorbeeld 2:
Gegeven is de formule $N(x) = 6{,}15 + 14{,}43 \cdot \ln(x)$
Toon aan dat als x verdubbelt, N met ongeveer 10 toeneemt

$N(2x) = 6{,}15 + 14{,}43 \cdot \ln(2x)$
$= 6{,}15 + 14{,}43(\ln(2) + \ln(x))$ (1) $\ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)$
$= 6{,}15 + 14{,}43\ln(2) + 14{,}43\ln(x)$
$= 6{,}15 + 14{,}43\ln(x) + 10{,}00\ldots$

Je hebt het gevraagde nu aangetoond.

12.5 Groeisnelheid [3]

Afgeleiden van logaritmische functies:

De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is gelijk aan: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Voorbeeld 1:

Bereken de afgeleide van $y = \ln(2x + 1)$

$$y' = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 = \frac{2}{2x+1}$$

De vermenigvuldiging met 2 is nodig omdat je bij het differentiëren van $\ln(2x + 1)$ de kettingregel nodig hebt. 2 is de afgeleide van $2x – 1$.

12.5 Groeisnelheid [3]

Afgeleiden van logaritmische functies:

De afgeleide van $f(x) = {}^{g}\log(x)$ is gelijk aan: $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln(g)}$

Voorbeeld 2:

Bereken de afgeleide van $N = 4{,}15 \cdot \log(4t + 5)$

$$N' = 4{,}15 \cdot \frac{1}{(4t+5)\cdot\ln(10)} \cdot 4 = \frac{16{,}6}{(4t+5)\cdot\ln(10)}$$

De vermenigvuldiging met 4 is nodig omdat je bij het differentiëren van $\log(4t + 5)$ de kettingregel nodig hebt. 4 is de afgeleide van $4t + 5$.