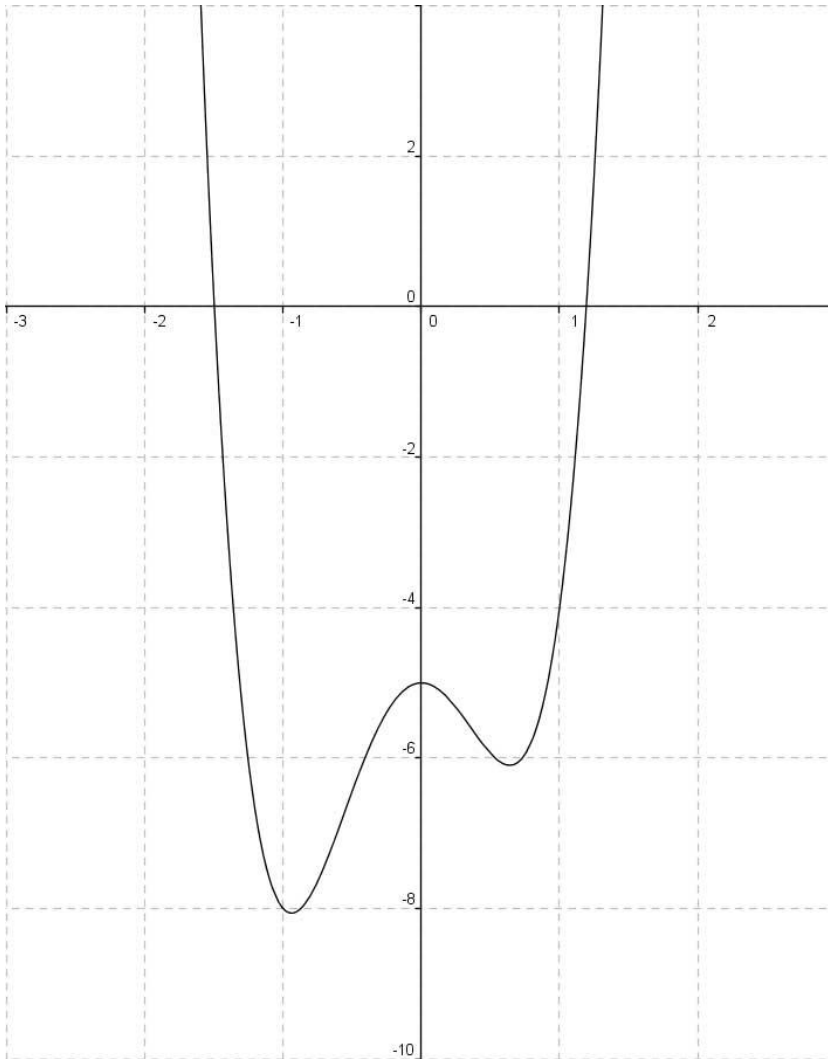
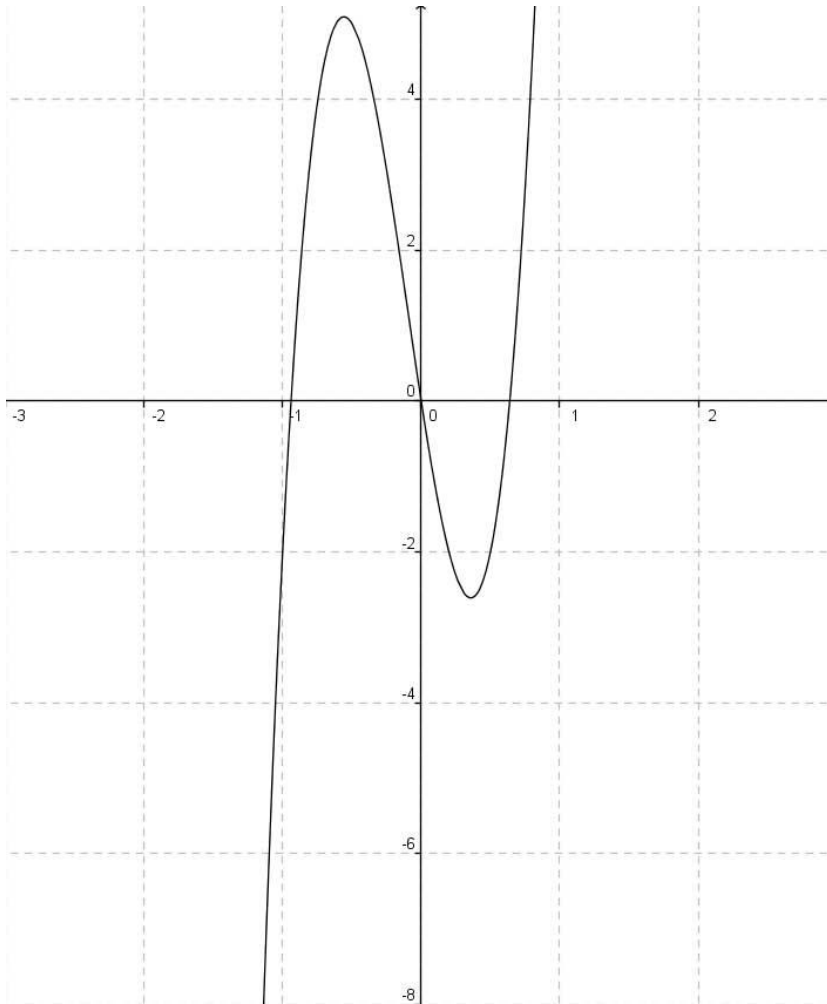


13.0 Voorkennis



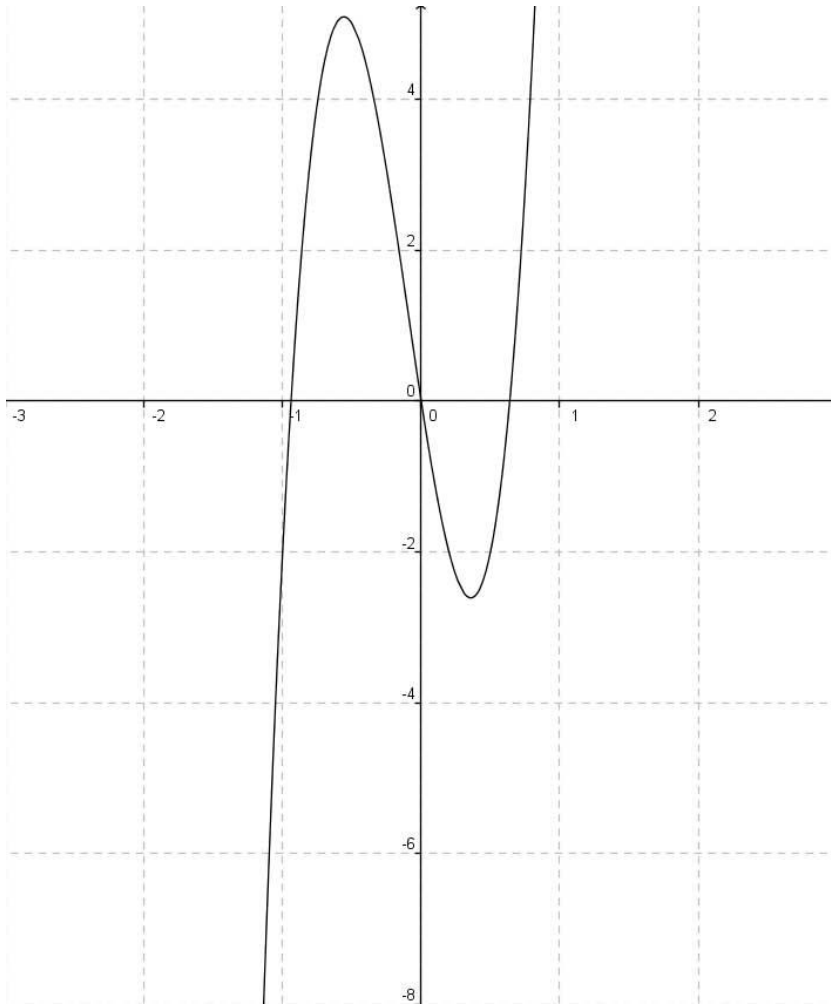
- Links is de grafiek van de functie $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5$ getekend op het interval $[-2, 2]$;
- Deze grafiek heeft drie toppen.
- Op het interval $[-2; -0,94)$ is de grafiek dalend;
- Bij $x = 0,94$ is er een minimum;
- Op het interval $(-0,94; 0)$ is de grafiek stijgend;
- Bij $x = 0$ is er een maximum;
- Op het interval $(0; 0,64)$ is de grafiek dalend;
- Bij $x = 0,64$ is er een minimum;
- Op het interval $(0,64, 2]$ is de grafiek stijgend.

13.0 Voorkennis



- Links is de hellinggrafiek van de functie $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5$ getekend op het interval $[-2, 2]$;
- Deze hellinggrafiek heeft drie snijpunten met de x-as.
- Op het interval $[-2; -0,94)$ is de grafiek dalend. De hellinggrafiek ligt dan onder de x-as;
- Bij $x = 0,94$ is er een minimum. De hellinggrafiek snijdt hier de x-as;
- Op het interval $(-0,94; 0)$ is de grafiek stijgend. De hellinggrafiek ligt dan boven de x-as;
- Bij $x = 0$ is er een maximum. De hellinggrafiek snijdt hier de x-as;

13.0 Voorkennis



- Links is de hellinggrafiek van de functie $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5$ getekend op het interval $[-2, 2]$;
- Deze hellinggrafiek heeft drie snijpunten met de x-as.
- Op het interval $(0; 0,64)$ is de grafiek dalend. De hellinggrafiek ligt hier onder de x-as;
- Bij $x = 0,64$ is er een minimum. De hellinggrafiek snijdt hier de x-as;
- Op het interval $(0,64, 2]$ is de grafiek stijgend. De hellinggrafiek ligt hier boven de x-as.

13.0 Voorkennis

Voorbeeld 1:

Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

Bereken de snelheid waarmee y verandert bij een waarde van x van 5.

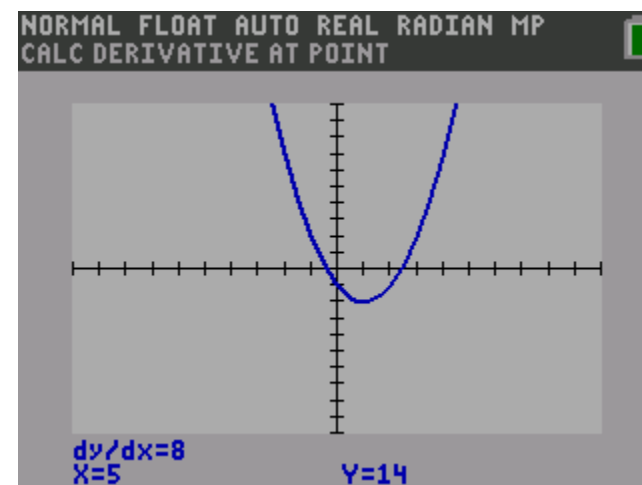
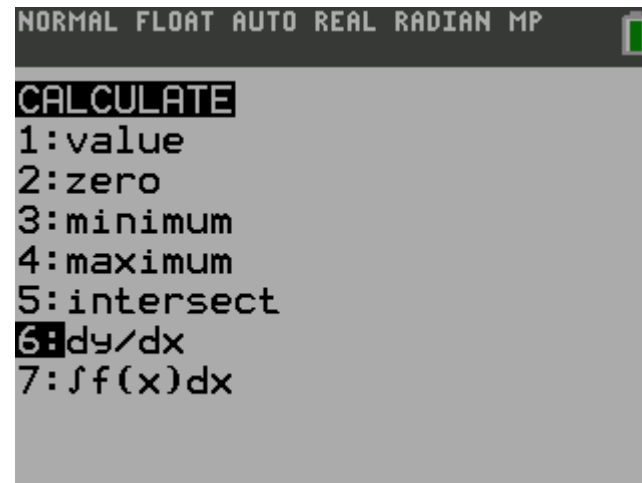
Bereken de richtingscoëfficiënt met de GR:

$$Y = | Y1 = X^2 - 2X - 1$$

2ND | TRACE | 6: dy/dx | ENTER

Toets 5 in | ENTER

$$dy/dx = 8 \text{ dus } rc = 8$$



13.0 Voorkennis

Voorbeeld 2:

Gegeven is de functie $N(t) = 480t^2 - 40t^3$

Toon met **de afgeleide aan** dat de grafiek stijgend is bij $t = 5,75$

Stap 1:

Bereken de afgeleide van N :

$$N'(t) = 960t - 120t^2$$

Stap 2:

Vul $t = 5,75$ in, in $N'(t)$:

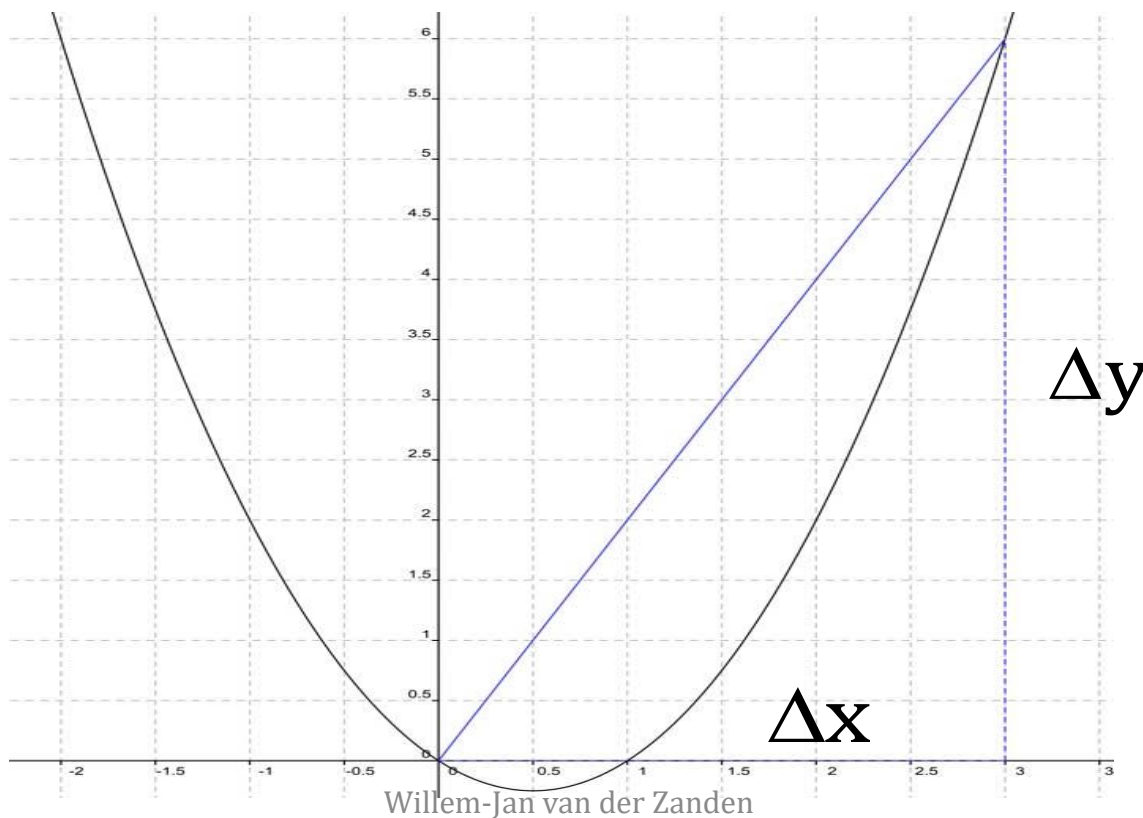
$$N'(5,75) = 960 \cdot 5,75 - 120 \cdot 5,75^2 = 1552,5 > 0$$

13.0 Voorkennis

Met het differentiequotiënt bereken je de gemiddelde verandering/
gemiddelde snelheid per tijdseenheid.

Voorbeeld: $f(x) = x^2 - x$

$$\text{Differentiequotiënt van } f(x) \text{ op } [0, 3] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{6 - 0}{3 - 0} = 2$$



13.1 Berekeningen met de afgeleide [1]

Herhaling rekenregels voor differentiëren:

$$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x) \quad (\text{somregel})$$

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (\text{productregel})$$

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \Rightarrow q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2} \quad (\text{quotiëntregel})$$

$$f(x) = u(v(x)) \text{ geeft } f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad (\text{kettingregel})$$

$$f(x) = e^x \text{ geeft } f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \text{ geeft } f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = {}^g\log(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$$

13.1 Berekeningen met de afgeleide [1]

Voorbeeld 1:

$$g(x) = (3x^2 + 3)e^x - 3e^x$$

$$g'(x) = [3x^2 + 3]' \cdot e^x + (3x^2 + 3) \cdot [e^x]' - [3e^x]'$$

$$g'(x) = 6x \cdot e^x + (3x^2 + 3)e^x - 3e^x$$

$$g'(x) = (6x + 3x^2 + 3 - 3)e^x$$

$$g'(x) = (3x^2 + 6x)e^x$$

Voorbeeld 2:

$$h(x) = \frac{6x + 5}{e^x}$$

$$h'(x) = \frac{e^x \cdot [6x + 5]' - [e^x]' \cdot (6x + 5)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x \cdot 6 - e^x \cdot (6x + 5)}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (6 - 6x - 5)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{1 - 6x}{e^x}$$

13.1 Berekeningen met de afgeleide [1]

Voorbeeld 3:

$$g(x) = x^2 \cdot 2^x$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= [x^2]' \cdot 2^x + x^2 \cdot [2^x]' \\ &= 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2) \\ &= 2^x (2x + \ln(2) \cdot x^2) \end{aligned}$$

Voorbeeld 4:

$$f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot [\ln(x) + 1]' - [x]' \cdot (\ln(x) + 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln(x) - 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x) - 1}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$$

13.1 Berekeningen met de afgeleide [2]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de functie $N(t) = 480t^2 - 40t^3$

Toon met **de afgeleide aan** dat de grafiek stijgend is bij $t = 5,75$

Stap 1:

Bereken de afgeleide van N :

$$N'(t) = 960t - 120t^2$$

Stap 2:

Vul $t = 5,75$ in, in $N'(t)$:

$$N'(5,75) = 960 \cdot 5,75 - 120 \cdot 5,75^2 = 1552,5 > 0$$

13.1 Berekeningen met de afgeleide [3]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de functie $N(t) = 350(e^{-0,2t} - e^{-0,8t})$

Bereken **met behulp van de afgeleide** in minuten nauwkeurig wanneer N maximaal is. Geeft je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Stap 1:

Bereken de afgeleide van N :

$$N'(t) = 350(e^{-0,2t} \cdot -0,2 - e^{-0,8t} \cdot -0,8) = 350(-0,2e^{-0,2t} + 0,8e^{-0,8t})$$

Stap 2:

Bereken $N'(t) = 0$ met je GR:

Invoeren van de afgeleide functie bij y1 en invullen van 0 bij y2 geeft met behulp van **intersect** een uitkomst van $x = 2,31 \dots$

13.1 Berekeningen met de afgeleide [3]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de functie $N(t) = 350(e^{-0,2t} - e^{-0,8t})$

Bereken met behulp van de afgeleide in minuten nauwkeurig wanneer N maximaal is. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Stap 3:

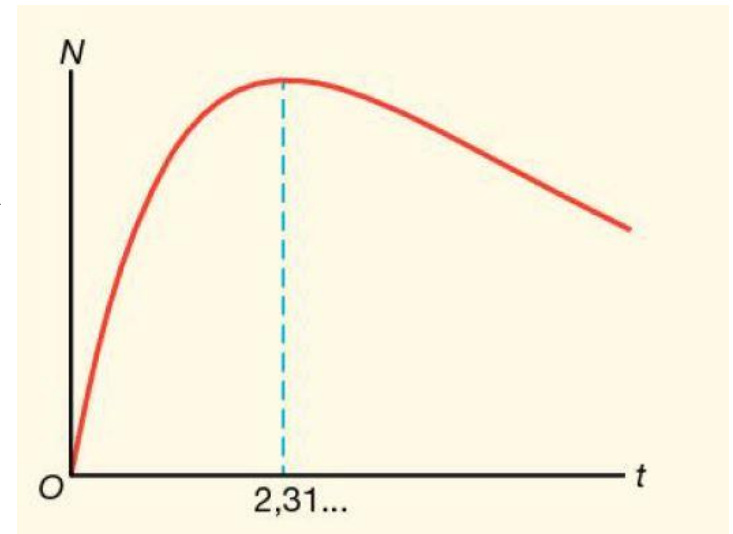
Maak een schets van de functie om te controleren of er sprake is van een maximum.

Er is in dit geval sprake van een maximum.

Stap 4:

Na 2 uur en 19 minuten is N maximaal.

Invullen van $t = 2,31...$ in de functie $N(t)$ geeft **een maximum van 165,4**



13.2 Redeneren met de afgeleide [1]

Voorbeeld:

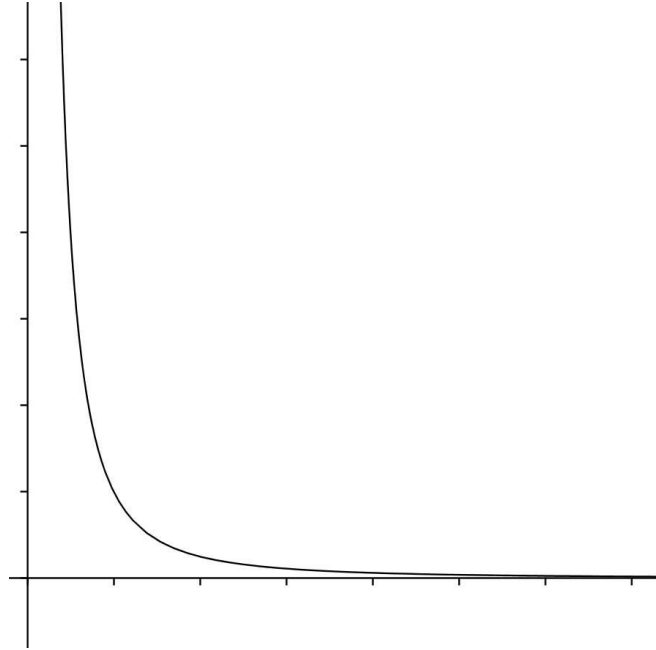
Gegeven is de formule $RSI = 100 - \frac{100}{1+r}$.

Bereken de afgeleide van RSI en toon aan dat als r toeneemt, RSI ook toeneemt.

$$RSI' = \frac{100}{(1+r)^2}$$

- De teller van RSI' is positief voor elke waarde van r ;
- De noemer is ook positief voor elke waarde van r ;
- RSI' is in zijn geheel dus positief voor elke waarde van r ;
- RSI een stijgende functie voor elke waarde van r .

13.2 Redeneren met de afgeleide [2]



In dit plaatje is de afgeleide functie dy/dx getekend:

- De grafiek van dy/dx ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

13.2 Redeneren met de afgeleide [2]

Voorbeeld:

Toon met behulp van een schets van de grafiek van de afgeleide aan dat de grafiek van $y = 50/\sqrt{x}$ dalend is voor $x > 0$

Stap 1:

Bereken de afgeleide:

$$y = 50/\sqrt{x} = 50x^{-1/2}$$

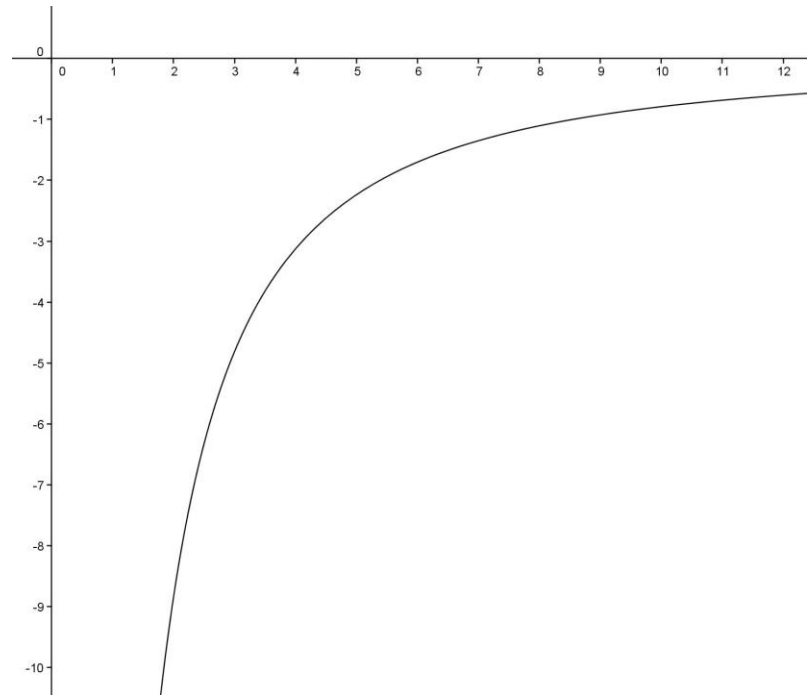
$$y' = -25x^{-1/2}$$

Stap 2:

Maak een schets van de afgeleide:

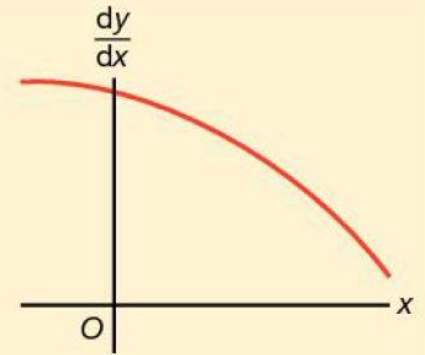
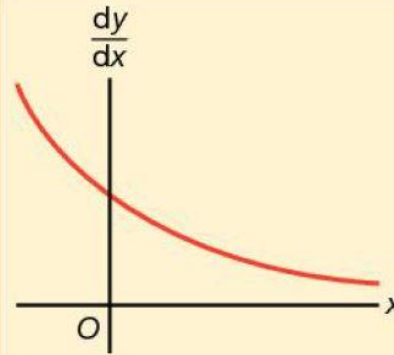
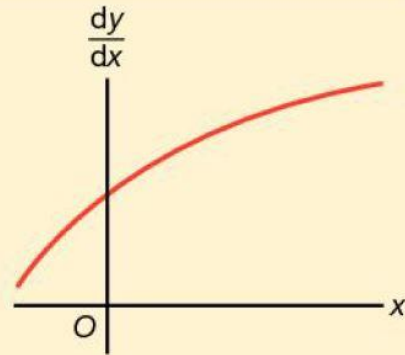
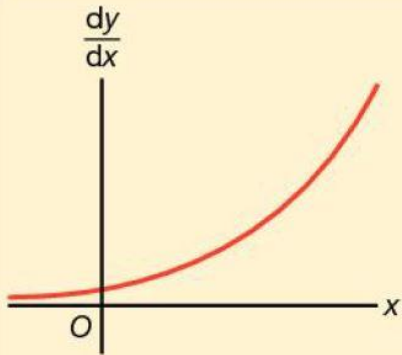
Stap 3:

Trek de conclusie:



- De grafiek van de afgeleide ligt onder de x-as, dus de grafiek van y is dalend.

13.3 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen [1]



- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is afnemend stijgend.

13.3 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de formule $N = 50(1 + t^{0,54})$ met N als hoeveelheid en t de tijd in jaren.

Stap 1:

Bereken de afgeleide:

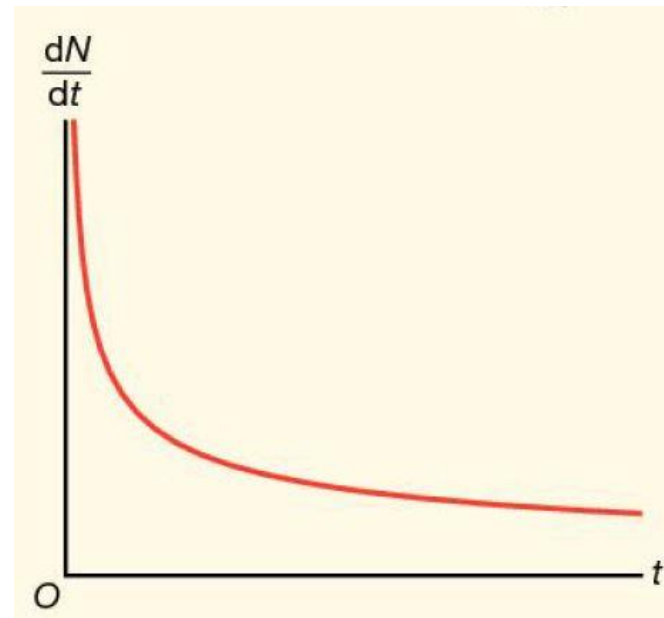
$$N' = 50 \cdot 0,54 t^{-0,46} = 27 t^{-0,46}$$

Stap 2:

Maak een schets van de afgeleide:

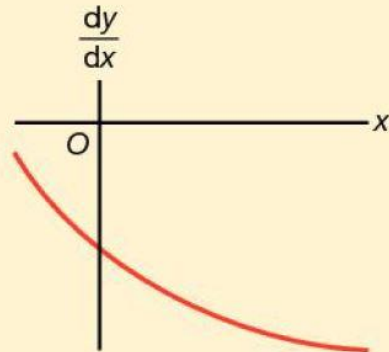
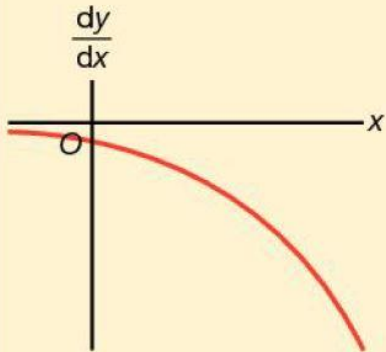
Stap 3:

Trek de conclusie:

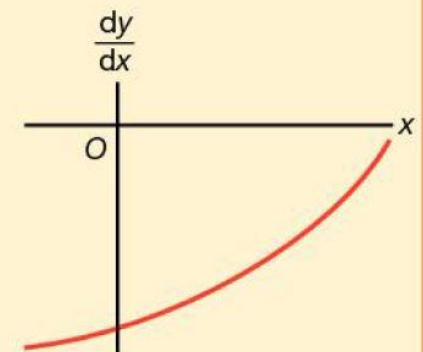
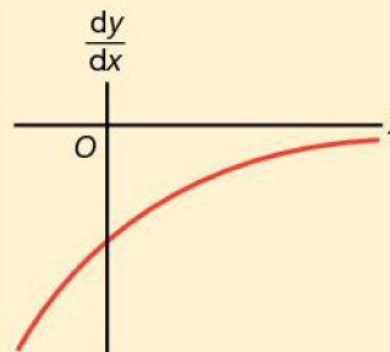


- De grafiek van de afgeleide ligt boven de t-as, dus de grafiek van N is stijgend;
- De grafiek van de afgeleide is dalend, dus de grafiek van N is afnemend stijgend.

13.3 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen [2]



- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is toenemend dalend.



- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

13.3 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen [2]

Voorbeeld:

Toon met behulp van een schets van de grafiek van de afgeleide aan dat de grafiek van $y = 50/\sqrt{x}$ dalend is voor $x > 0$

Stap 1:

Bereken de afgeleide:

$$y = 50/\sqrt{x} = 50x^{-1/2}$$

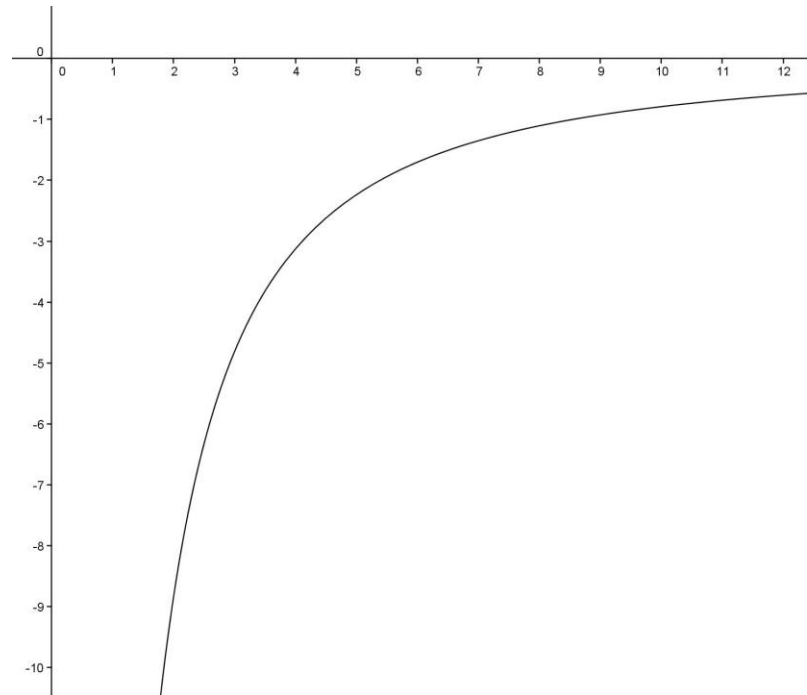
$$y' = -25x^{-1/2}$$

Stap 2:

Maak een schets van de afgeleide:

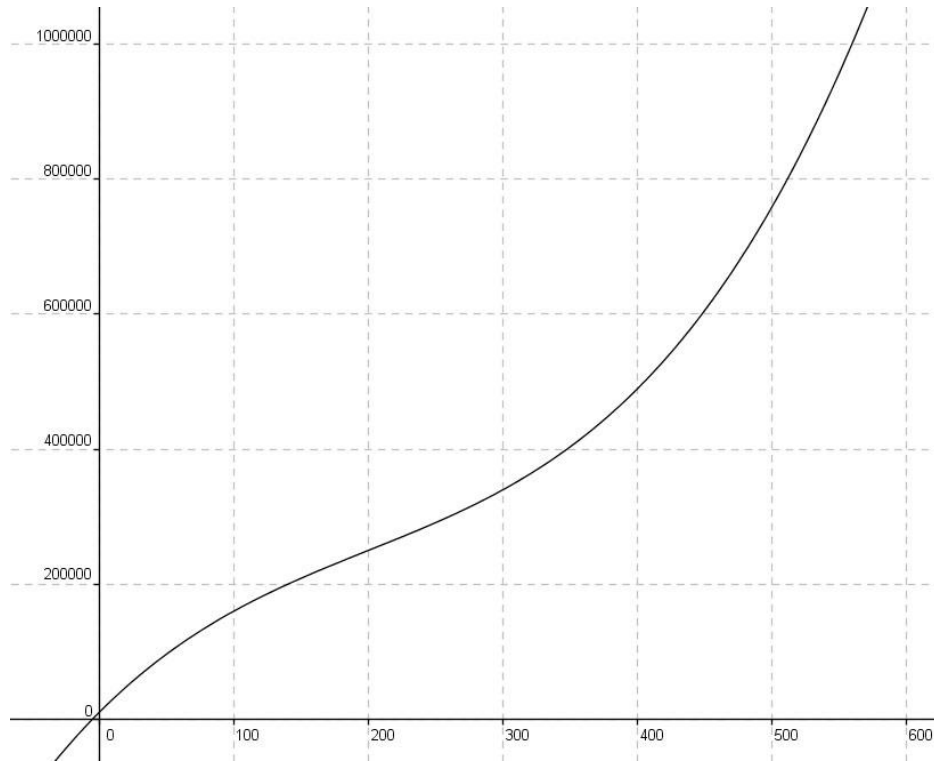
Stap 3:

Trek de conclusie:



- De grafiek van de afgeleide ligt onder de x-as, dus de grafiek van y is dalend.
- De grafiek van de afgeleide is stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

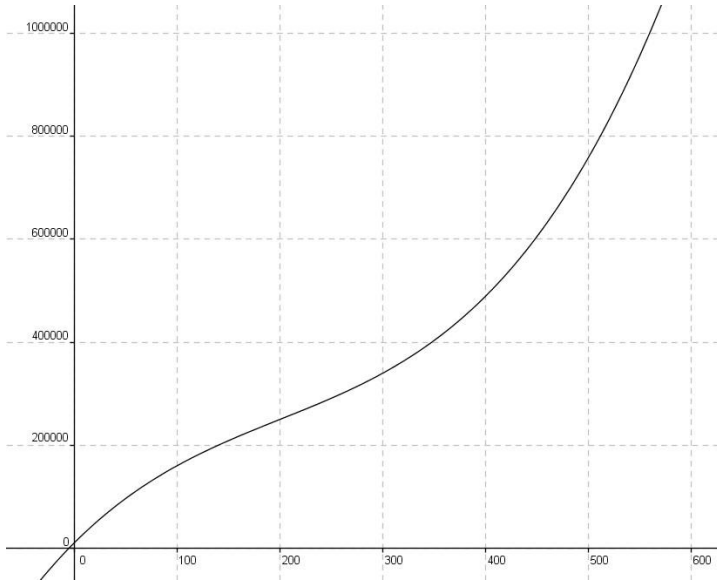
13.3 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen [3]



$$K = 0,01q^3 - 6q^2 + 2000q + 10000$$

De grafiek is eerst afnemend stijgend en wordt later toenemend stijgend. Het punt tussen deze twee stukken van de grafiek is het buigpunt.

13.3 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen [3]



- In het buigpunt is de helling van de grafiek minimaal;
- In het buigpunt is de afgeleide dK/dq van de grafiek minimaal;
- In het buigpunt heeft de afgeleide functie dK/dq van de grafiek dus een minimum;

13.3 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen [3]

Voorbeeld:

Bereken algebraïsch de minimale snelheid waarmee de functie

$K = 0,01q^3 - 6q^2 + 2000q + 10000$ toeneemt.

Stap 1:

Bereken de afgeleide van K :

$$K' = 0,03q^2 - 12q + 2000$$

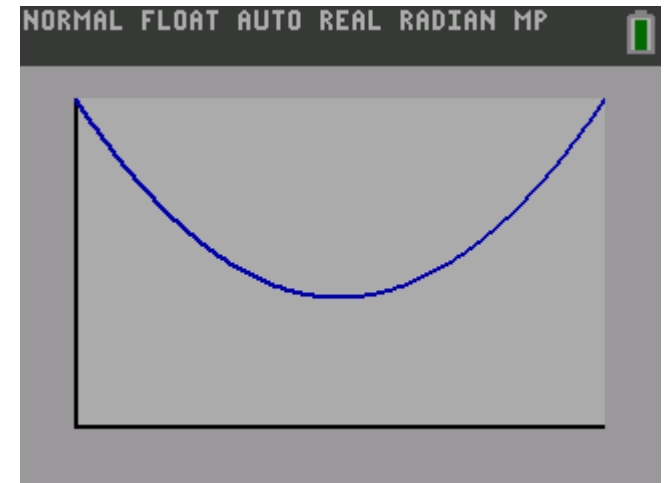
Stap 2:

Voer de afgeleide in, in je GR en **maak een schets**

Stap 3:

Bereken met je GR het **minimum**

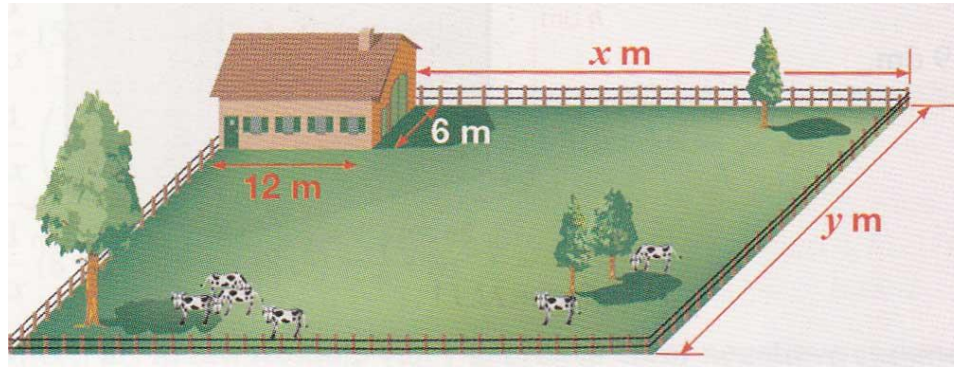
Bij $q = 200$ is de snelheid minimaal. Invullen van $q = 200$ in de afgeleide geeft als uitkomst **een minimale snelheid van 800**.



13.4 Optimaliseren [1]

Voorbeeld:

Op een rechthoekig stuk land staat een huis van 12 bij 6 meter.
De totale lengte van de omheining is 120 meter.
Druk de oppervlakte O van het stuk land uit in x .



Stap 1: Druk de oppervlakte O van het perceel uit in x en y :

$$O = (x + 12)y$$

Stap 2: Gebruik de lengte van de omheining om y uit te drukken in x :

$$\text{Lengte} = x + y + x + 12 + y - 6 = 120$$

$$2x + 2y + 6 = 120$$

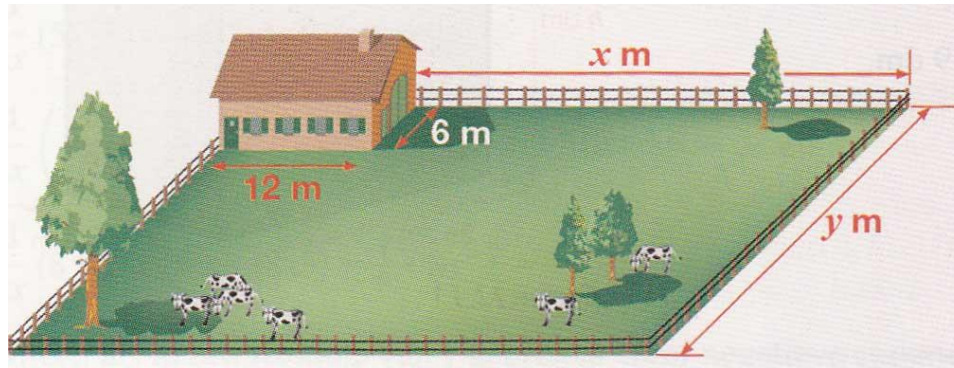
$$2y = -2x + 114$$

$$y = -x + 57$$

13.4 Optimaliseren [1]

Voorbeeld:

Op een rechthoekig stuk land staat een huis van 12 bij 6 meter.
De totale lengte van de omheining is 120 meter.
Druk de oppervlakte O van het stuk land uit in x .



Stap 3: Schrijf O als functie van x door stap 1 en 2 te combineren.

$$O = (x + 12)(-x + 57)$$

$$O = -x^2 + 57x - 12x + 684$$

$$O = -x^2 + 45x + 684$$

13.4 Optimaliseren [2]

Voorbeeld:

Gegeven: een doos met vierkante bodem (x bij x cm) en een hoogte van h cm.
De som van de hoogte en de omtrek van de bodem is 300 cm.
Bereken wanneer de inhoud I maximaal is.

Stap 1:

Schrijf I als functie van x en h :

$$I = x \cdot x \cdot h = x^2 \cdot h$$

Stap 2:

Zoek een verband tussen x en h en druk h uit in x :

Hoogte + omtrek bodem = 300

$$h + 4x = 300$$

$$h = 300 - 4x$$

Stap 3:

Schrijf I als functie van x

$$I = x^2 h \text{ met } h = 300 - 4x$$

$$I = x^2(300 - 4x)$$

$$I = 300x^2 - 4x^3$$

13.4 Optimaliseren [2]

Voorbeeld:

Gegeven: een doos met vierkante bodem (x bij x cm) en een hoogte van h cm.
De som van de hoogte en de omtrek van de bodem is 300 cm.
Bereken wanneer de inhoud I maximaal is.

Stap 4:

Bereken wanneer de inhoud I maximaal is (gebruik de afgeleide):

$$I = 300x^2 - 4x^3$$

$$\frac{dI}{dx} = 600x - 12x^2$$

$$\frac{dI}{dx} = 0$$

$$600x - 12x^2 = 0$$

$$x(600 - 12x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 50$$

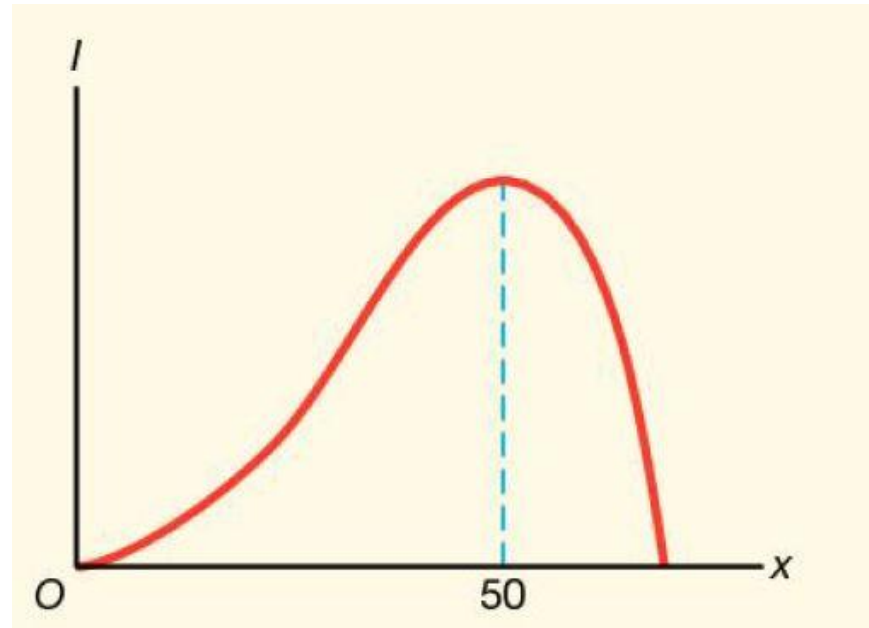
13.4 Optimaliseren [2]

Voorbeeld:

Gegeven: een doos met vierkante bodem (x bij x cm) en een hoogte van h cm.
De som van de hoogte en de omtrek van de bodem is 300 cm.
Bereken wanneer de inhoud I maximaal is.

Stap 5:

Maak een schets en controleer met behulp van een schets van de functie I of er sprake is van een maximum.



Stap 6:

Geef het antwoord op de gestelde vraag.

Hieruit volgt dat de inhoud maximaal is bij een **x van 50 centimeter** en een **h van $300 - 4 \cdot 50 = 300 - 200 = 100$ centimeter**.