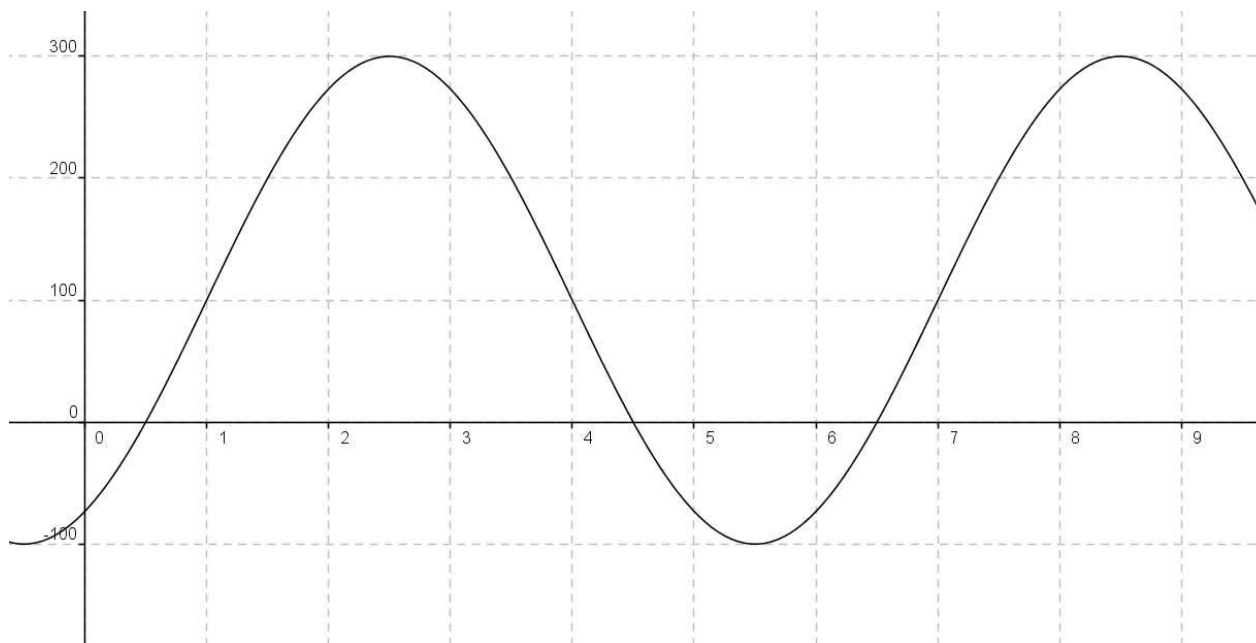


14.0 Voorkennis

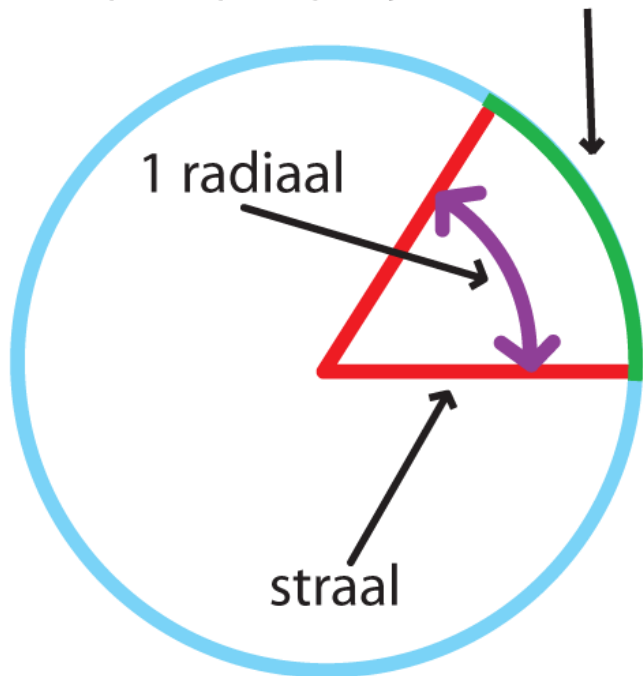


De hierboven getekende functie herhaalt zich om de 6 seconden. Dit noemen we dan ook een **periodieke functie**.

- **Evenwichtsstand** = $(\min + \max)/2 = (-100 + 300)/2 = 100$
- **Amplitude** = $\max - \text{evenw. stand} = 300 - 100 = 200$
- **Periode** = 6

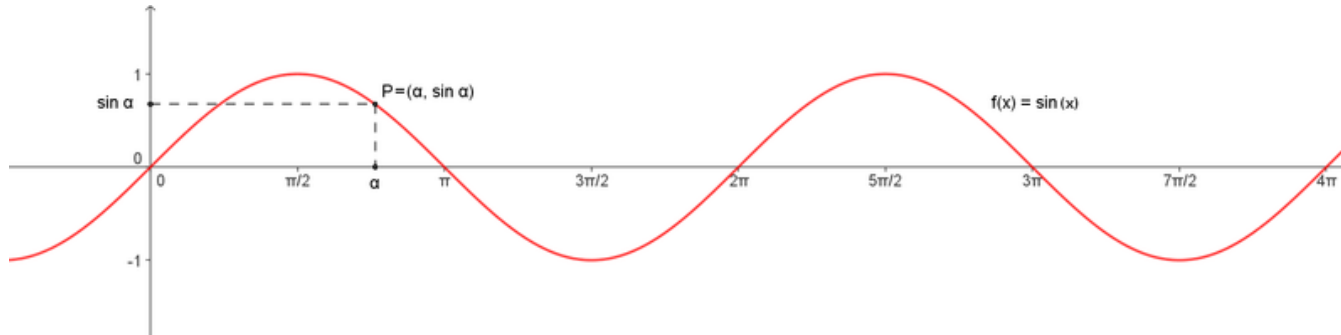
14.1 Sinusoïden [1]

booglengte gelijk aan straal



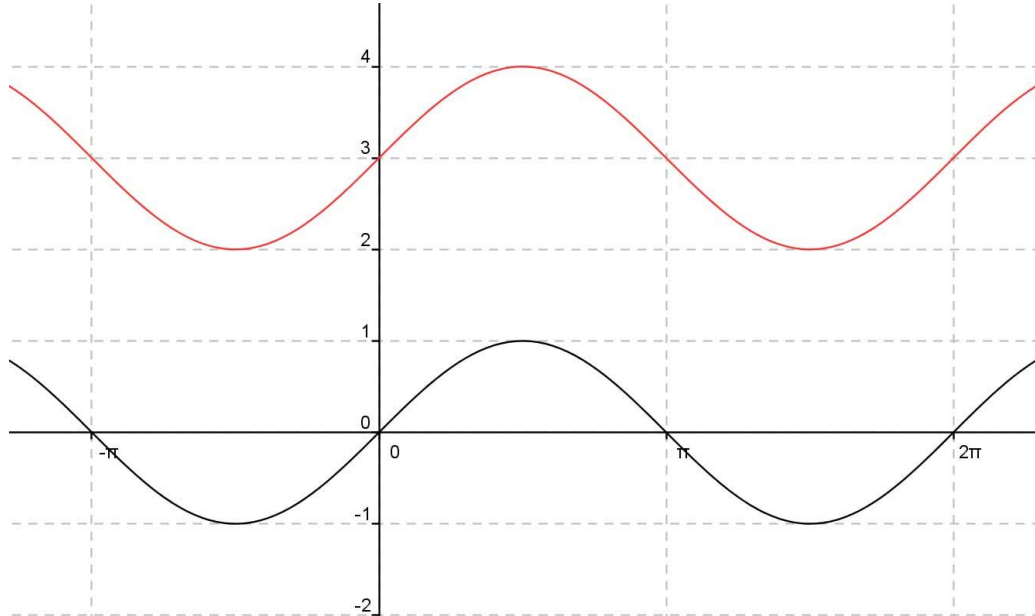
- In de eenheidscirkel is de booglengte van het groene stuk precies 1.
- In dit geval is de middelpuntshoek 1 radiaal.
- Een hoek van 1 radiaal is de middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1.
- Radiaal is een andere manier om de grootte van de middelpuntshoek weer te geven.
- De cirkelboog van de volledige cirkel is 2π . Bij deze booglengte hoort een middelpuntshoek van 2π rad.
- Zet je rekenmachine op **radialen!!!**

14.1 Sinusoïden [1]



- In het plaatje is de functie $f(x) = \sin(x)$ getekend
- Deze functie voegt aan elk getal x de sinus van x radialen toe.
- De x -as wordt in radialen aangegeven.
- De **periode** is 2π .
- De **evenwichtsstand** is 0.
- De maximale afwijking van de evenwichtsstand (**amplitude**) is 1
- De **nulpunten** zijn ..., -2π , $-\pi$, 0, π , 2π
- De **hoogste punten** zijn ..., $(0.5\pi, 1)$; $(2.5\pi, 1)$; ...
- De **laagste punten** zijn ..., $(-0.5\pi, -1)$; $(1.5\pi, -1)$; ...

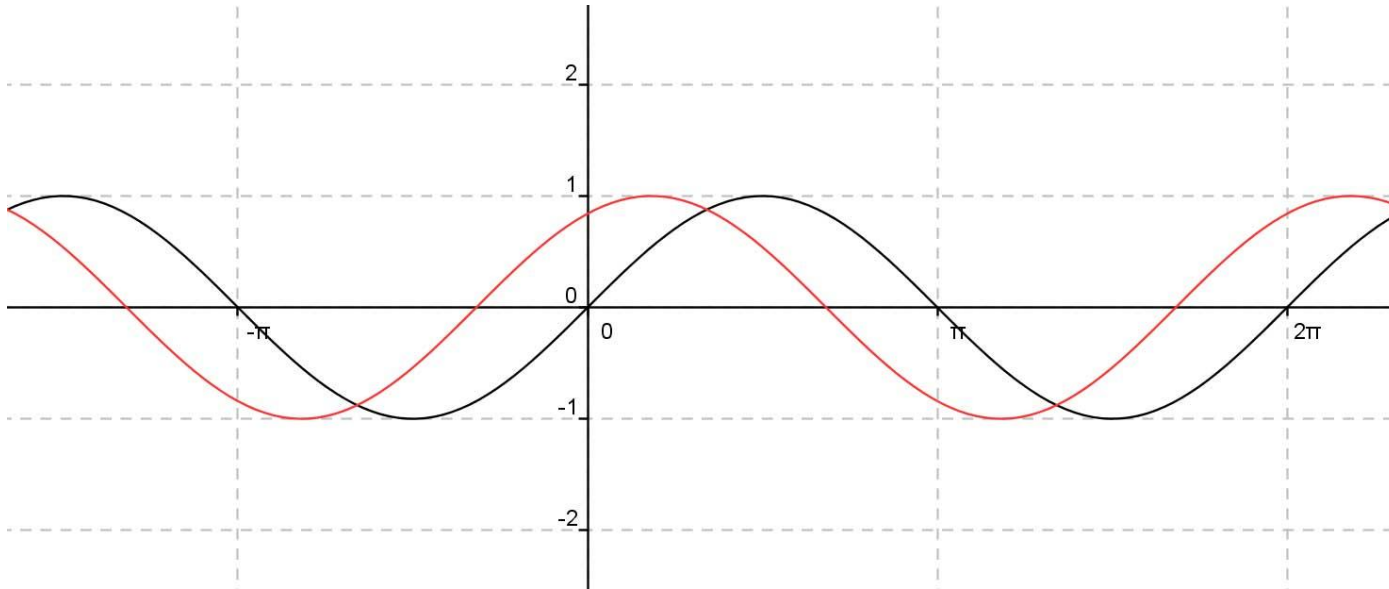
14.1 Sinusoïden [2]



- De zwarte grafiek is $f(x) = \sin(x)$
- De rode grafiek is $g(x) = \sin(x) + 3$
- De nieuwe evenwichtsstand wordt 3
- Amplitude en periode blijven gelijk

De zwarte grafiek wordt 3 omhoog geschoven.

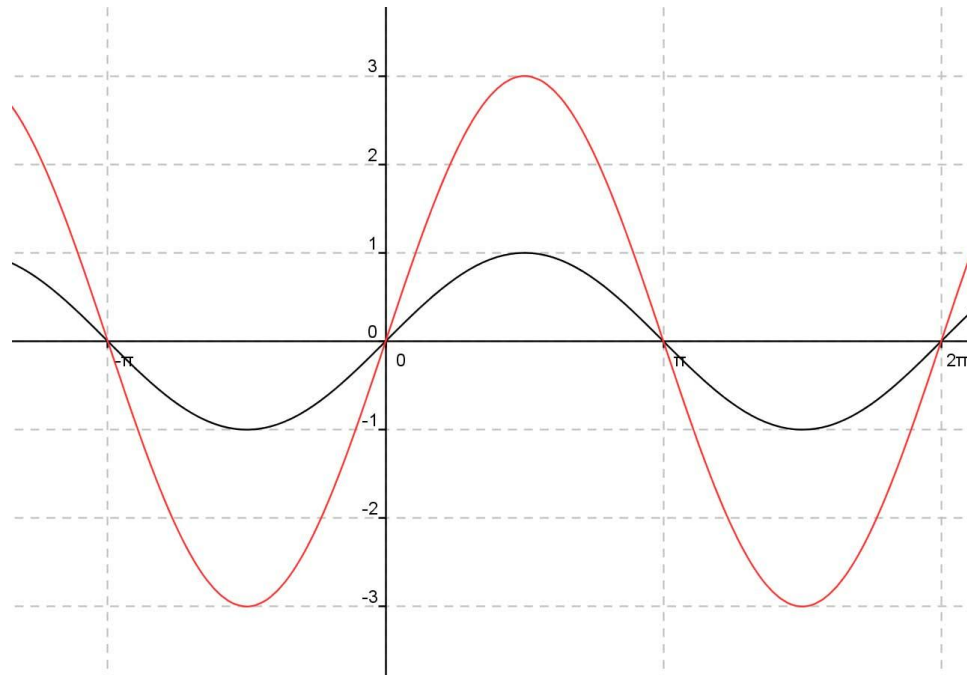
14.1 Sinusoïden [2]



- De zwarte grafiek is $f(x) = \sin(x)$
- De rode grafiek is $g(x) = \sin(x + 1)$
- Periode, amplitude en evenwichtsstand blijven gelijk.

De zwarte grafiek wordt 1 naar **links** geschoven.

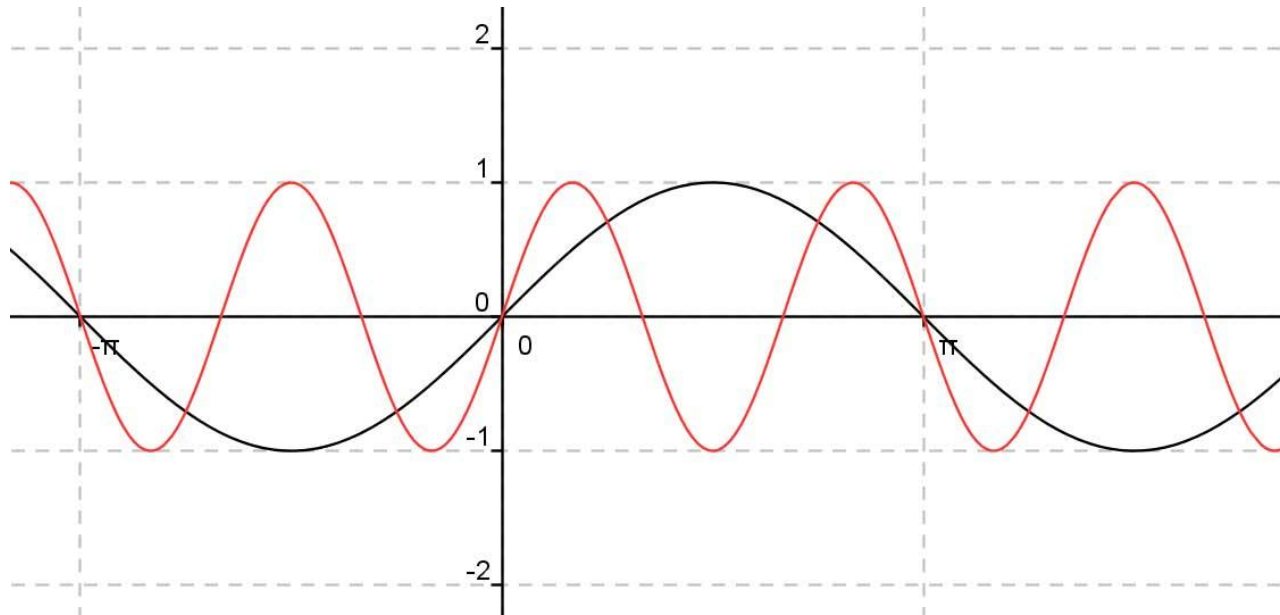
14.1 Sinusoïden [2]



- De zwarte grafiek is $f(x) = \sin(x)$
- De rode grafiek is $g(x) = 3\sin(x)$
- De nieuwe amplitude wordt 3
- Periode en evenwichtsstand blijven gelijk

De zwarte grafiek wordt ten opzichte van de x-as met 3 vermenigvuldigd.

14.1 Sinusoïden [2]



- De zwarte grafiek is $f(x) = \sin(x)$
- De rode grafiek is $g(x) = \sin(3x)$
- De nieuwe periode wordt $2/3\pi$
- Amplitude en evenwichtsstand blijven gelijk

De zwarte grafiek wordt ten opzichte van de y-as met **1/3** vermenigvuldigd.

14.1 Sinusoïden [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de formule $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x)$

Deze formule heeft de volgende kenmerken:

a = evenwichtsstand	[= -1]
$ b $ = amplitude	[= 1,5]
periode = $2\pi/c$	[= $2\pi/2 = \pi$]

14.1 Sinusoïden [3]

Teken de grafiek van $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\Pi)$

Stap 1:

Schrijf de formule in de vorm $y = a + b \sin(c(x-d))$

$$f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\Pi) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{1}{3}\Pi))$$

Stap 2:

Schrijf de vier kenmerken van de formule op:

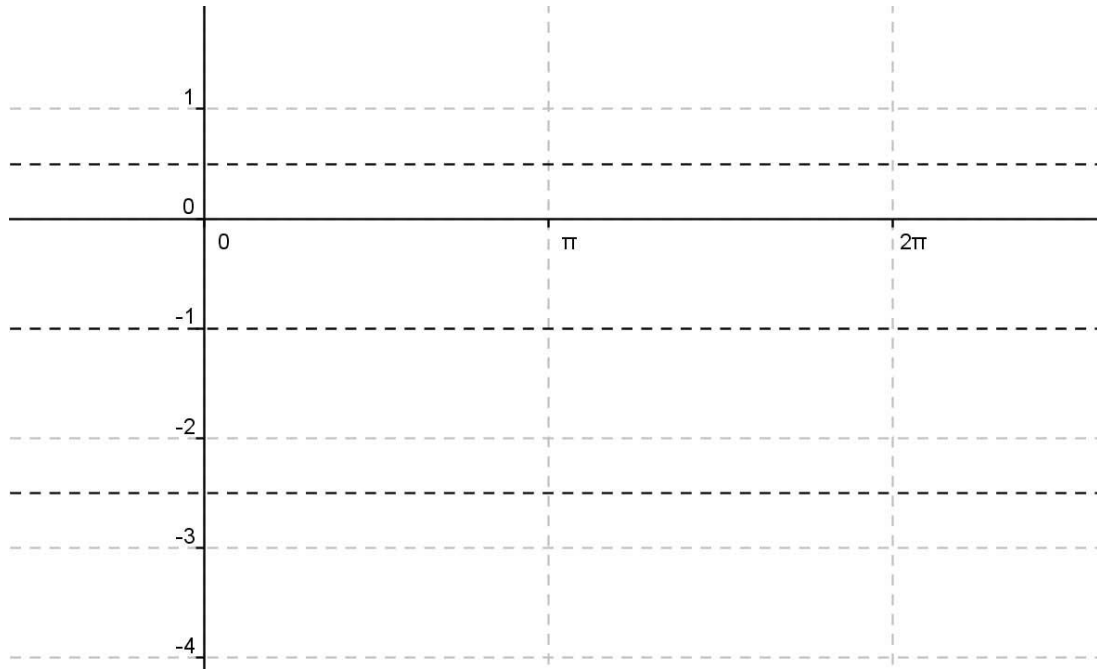
$a = \text{evenwichtsstand}$	$[= -1]$
$ b = \text{amplitude}$	$[= 1,5]$
$\text{periode} = 2\pi/c$	$[= 2\pi/2 = \pi]$
$d = x\text{-coördinaat beginpunt}$	$[= 1/3\pi]$

Let op:

- $b > 0$ dus de grafiek gaat stijgend door het beginpunt;
- Bij $b < 0$ gaat de grafiek dalend door het beginpunt;
- De y -coördinaat van het beginpunt is de evenwichtsstand $[-1]$.

14.1 Sinusoïden [3]

Teken de grafiek van $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$

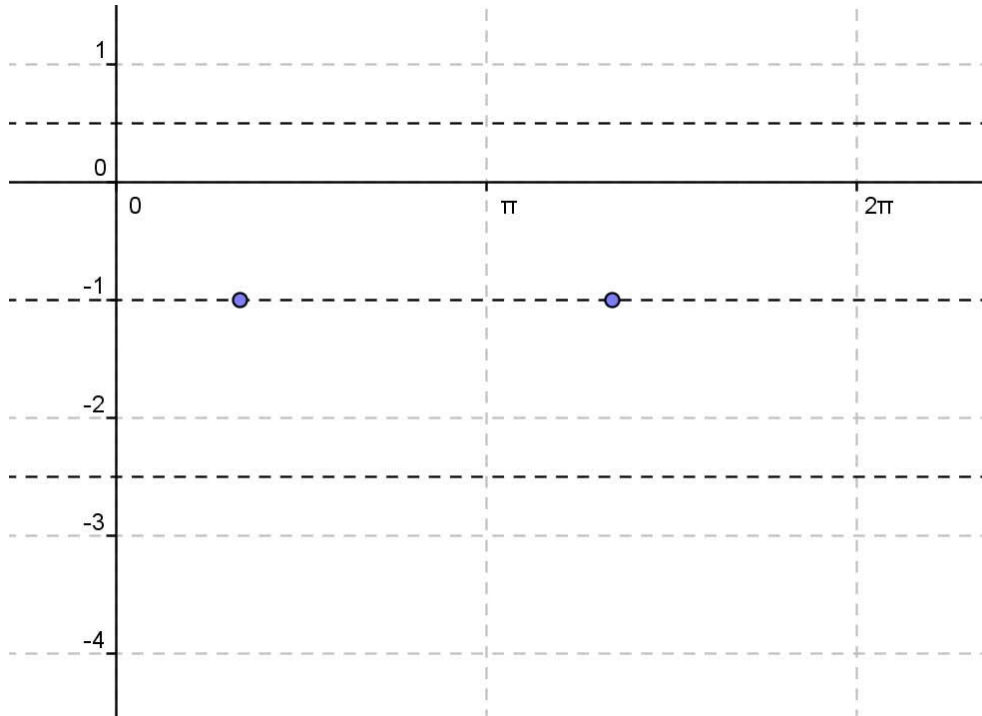


Stap 3:

Stippel in een assenstelsel de lijn van de evenwichtsstand en de lijnen waarop de toppen liggen.

14.1 Sinusoïden [3]

Teken de grafiek van $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$



Stap 4:

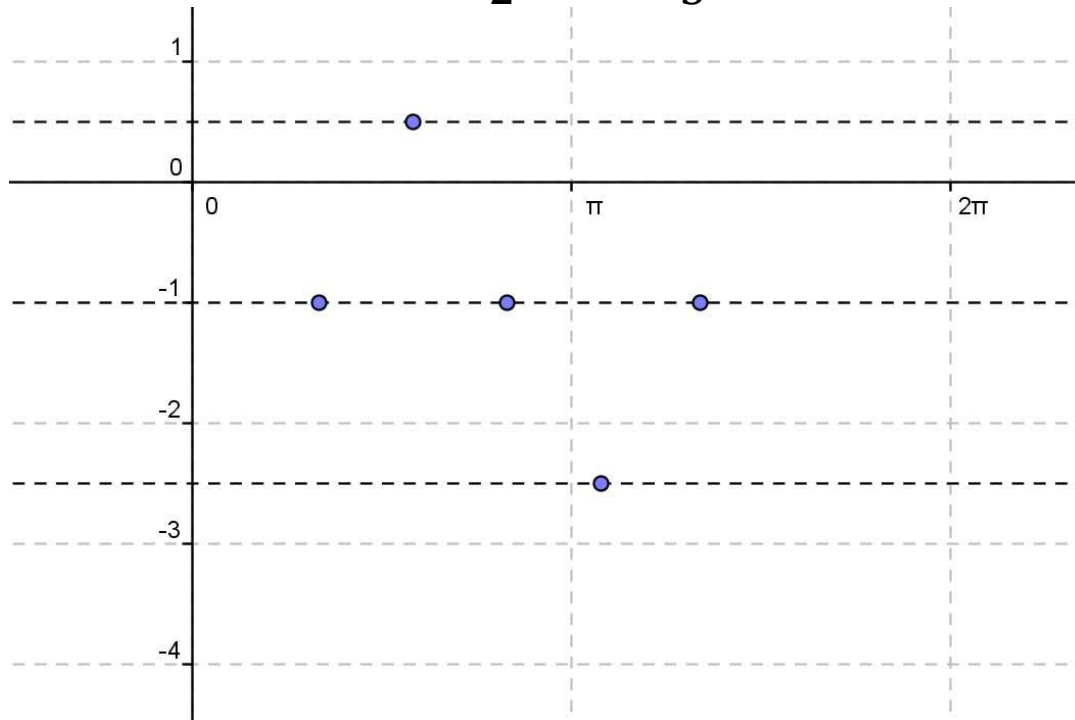
Teken het beginpunt en het punt dat één periode verder ligt.

Het beginpunt is $(\frac{1}{3}\pi, -1)$

Het punt één periode verder is $(\frac{1}{3}\pi + \pi, -1) = (1\frac{1}{3}\pi, -1)$

14.1 Sinusoïden [3]

Teken de grafiek van $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$



Stap 5:

Bij een sinusfunctie is er een maximum na $\frac{1}{4}$ periode, na $\frac{1}{2}$ periode gaat de functie weer door de evenwichtsstand en na $\frac{3}{4}$ periode is er een minimum.

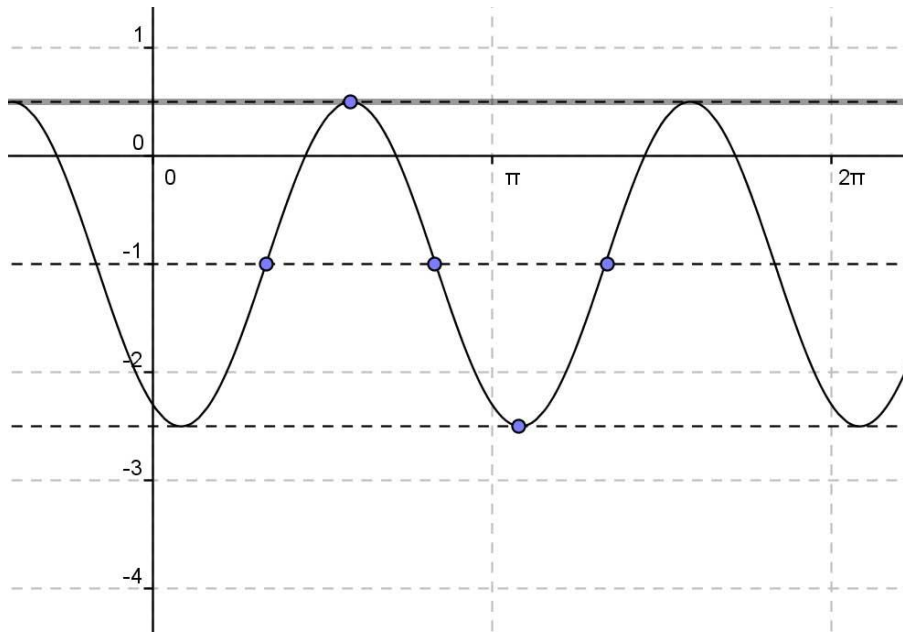
Maximum = $(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4}\pi, -1 + 1,5) = (\frac{7}{12}\pi, 0,5)$

Evenwichtsperiode = $(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi, -1) = (\frac{5}{6}\pi, -1)$

Minimum = $(\frac{1}{3}\pi + \frac{3}{4}\pi, -1 - 1,5) = (\frac{11}{12}\pi, -2,5)$

14.1 Sinusoïden [3]

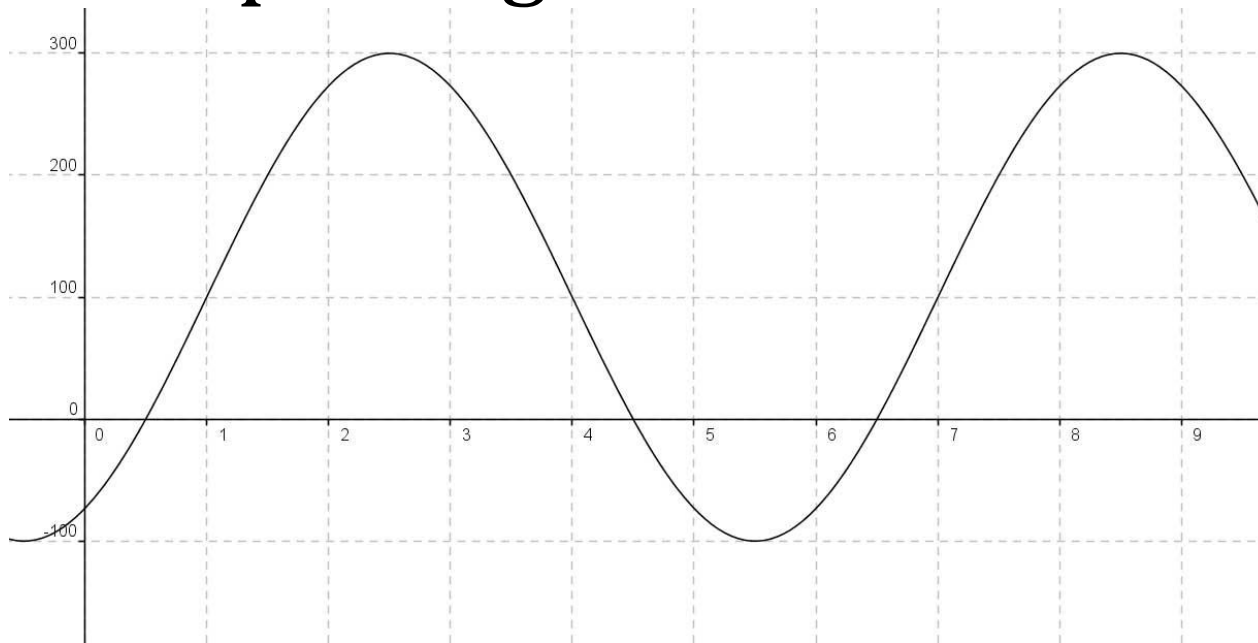
Teken de grafiek van $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$



Stap 6:

Teken de grafiek door de getekende punten.

14.2 Toepassingen van sinusoiden [1]



Stel de formule op van de hier getekende sinusoid:

$$a = \text{evenwichtsstand} = (\text{min} + \text{max})/2 = (-100 + 300)/2 = 100$$

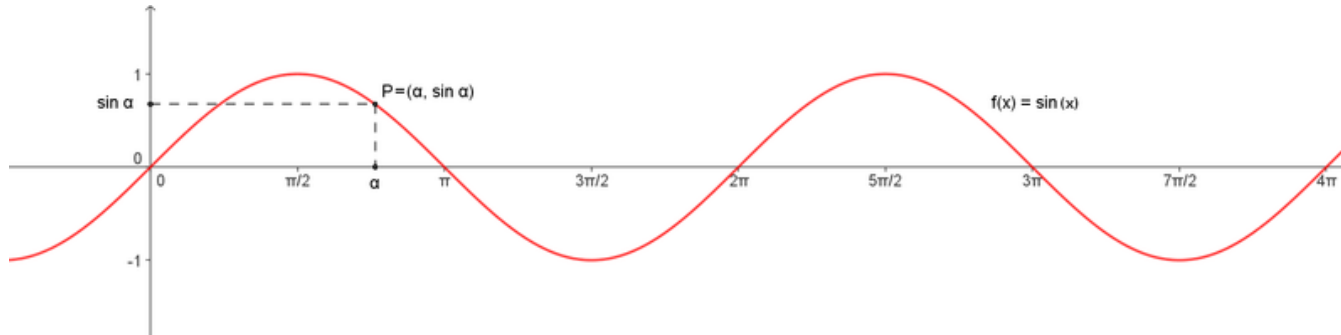
$$b = \text{amplitude} = \text{max} - \text{evenw. stand} = 300 - 100 = 200$$

$$c = 2\pi/\text{periode} = 2\pi/6$$

$$d = \text{x-coördinaat beginpunt} = 1$$

$$y = a + b \sin(c(x - d)) = 100 + 200 \sin(2\pi/6(x - 1))$$

14.2 Toepassingen van sinusoiden [2]



- In het plaatje is de functie $f(x) = \sin(x)$ getekend
- De **periode** is 2π ;
- De **evenwichtsstand** is 0;
- De maximale afwijking van de evenwichtsstand (**amplitude**) is 1;
- De **nulpunten** op het interval $[0, 2\pi]$ zijn: 0, π , 2π ;
- De nulpunten liggen op 0, $\frac{1}{2}$ en 1 periode;
- Het **hoogste punt** op het interval $[0, 2\pi]$ is $(0.5\pi, 1)$;
- Het hoogste punt ligt op $\frac{1}{4}$ periode;
- Het **laagste punt** op het interval $[0, 2\pi]$ is $(1.5\pi, -1)$;
- Het laagste punt ligt op $\frac{3}{4}$ periode.

14.2 Toepassingen van sinusoiden [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de formule $y = 3 + 2 \sin(\frac{1}{4} \pi(x - 1,5))$

- 1) $y_{\max} = \text{evenwichtsstand} + \text{amplitude} = 3 + 2 = 5$;
- 2) Het max. ligt op $\frac{1}{4}$ periode na het stijgend passeren van ev. stand in 1,5.
De periode van deze formule is $2\pi / \frac{1}{4} \pi = 8$
 $x_{\max} = 1,5 + \frac{1}{4} * 8 = 3,5$
- 3) $y_{\min} = \text{evenwichtsstand} - \text{amplitude} = 3 - 2 = 1$
- 4) Het min. ligt op $\frac{3}{4}$ periode na het stijgend passeren van ev. stand in 1,5.
 $x_{\min} = 1,5 + \frac{3}{4} * 8 = 7,5$
- 5) Bereken y voor $x = 4,7$
Vul op de GR in: $Y_1 = 3 + 2 \sin(\frac{1}{4} \pi(X - 1,5))$ en gebruik VALUE.
- 6) Voor welke x is y gelijk aan 4,6?
Vul op de GR in: $Y_1 = 3 + 2 \sin(\frac{1}{4} \pi(X - 1,5))$
 $Y_2 = 4,6$
INTERSECT geeft de oplossing.

14.3 Rijen bij figuren [1]

Algemeen:

Als de beginterm van een rekenkundige rij u_0 is geldt:

$$u_n = u_0 + vn \text{ (direct)}$$

$$u_n = u_{n-1} + v \text{ met } u_0 = \text{getal (recursief)}$$

Als de beginterm van een rekenkundige rij u_1 is geldt:

$$u_n = u_1 + v(n - 1) \text{ (direct)}$$

$$u_n = u_{n-1} + v \text{ met } u_1 = \text{getal (recursief)}$$

Algemeen:

Als de beginterm van een meetkundige rij u_0 is geldt:

$$u_n = u_0 \cdot r^n \text{ (direct)}$$

$$u_n = r \cdot u_{n-1} \text{ met } u_0 = \text{getal (recursief)}$$

Als de beginterm van een meetkundige rij u_1 is geldt:

$$u_n = u_1 \cdot r^{n-1} \text{ (direct)}$$

$$u_n = r \cdot u_{n-1} \text{ met } u_1 = \text{getal (recursief)}$$

14.3 Rijen bij figuren [2]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de getallenrij 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Dit is de **rij van Fibonacci**. Elke term is de som van de twee voorafgaande termen.

Algemeen: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ met $u_0 = 1$

Bereken de 12^{de} term van deze rij

Stap 1:

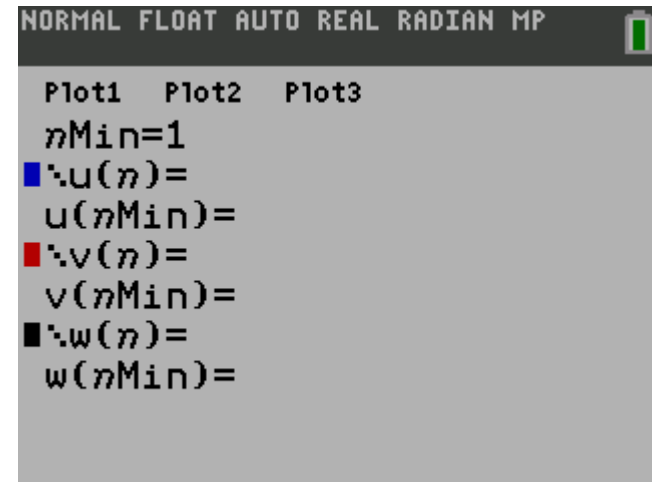
Zet eerst in het MODE menu de optie SEQ aan.



Stap 2:

Druk op de knop Y=

De indeling van het scherm is nu anders dan normaal.



14.3 Rijen bij figuren [2]

Voorbeeld 1:

Bereken de 12^{de} term van deze rij

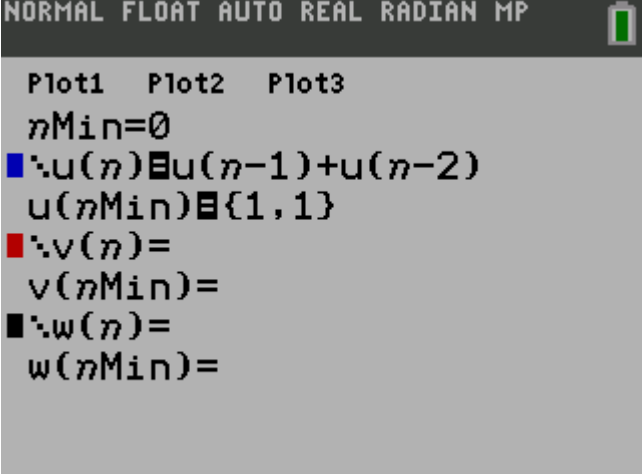
Stap 3:

Vul nu het volgende in:

Bij $nMin$ 0

Bij $u(n)$ $u(n-1) + u(n-2)$

Bij $u(nMin)$ $\{1, 1\}$



```
NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)+u(n-2)
u(nMin)={1,1}
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=
```

Op de GR krijg je:

u via de toets 2ND | 7

n via de toets die je normaal gebruikt voor de variabele X

$\{$ via de toets 2ND | (

$\}$ via de toets 2ND |)

Je moet bij $u(nMin)$ de eerste twee termen invullen. **Vul eerst de tweede term in en dan de eerste.** Is maar één term nodig, dan hoeft je geen $\{ \}$ te gebruiken.

14.3 Rijen bij figuren [2]

Voorbeeld 1:

Bereken de 12^{de} term van deze rij

Stap 4:

De uitkomst kun je vinden via 2ND | GRAPH

De 12^{de} term (u_{11}) heeft de waarde 144.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP					
PRESS + FOR $\Delta T b1$					
n	$u(n)$				
1	1				
2	2				
3	3				
4	5				
5	8				
6	13				
7	21				
8	34				
9	55				
10	89				
11	144				

$n=11$

Voorbeeld 2:

Vanaf welke term geldt bij de Rij van Fibonacci:

$u_n > 100.000$?

Uit de tabel volgt:

$u_{24} = 75.025$

$u_{25} = 121.393$

Vanaf de 26^{ste} term zijn er waarden groter dan 100.000.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP					
PRESS + FOR $\Delta T b1$					
n	$u(n)$				
15	987				
16	1597				
17	2584				
18	4181				
19	6765				
20	10946				
21	17711				
22	28657				
23	46368				
24	75025				
25	121393				

$n=25$

14.4 Variabelen vrijmaken [1]

Voorbeeld 1:

Schrijf de gegeven formule in de vorm $x = \dots$

$$y = 2\sqrt{x-6}$$

$$2\sqrt{x-6} = y$$

$$4(x-6) = y^2$$

$$4x - 24 = y^2$$

$$4x = y^2 + 24$$

$$x = \frac{1}{4}y^2 + 6$$

Gebruik: Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$

14.4 Variabelen vrijmaken [1]

Voorbeeld 2:

Schrijf de gegeven formule in de vorm $t = \dots$

$$K = 64(2t - 1)^3$$

$$64(2t - 1)^3 = K$$

$$(2t - 1)^3 = \frac{1}{64}K$$

$$2t - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{64}K}$$

$$2t = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{K} + 1$$

$$t = \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{K} + \frac{1}{2}$$

Gebruik: Uit $A^3 = B$ volgt $A = \sqrt[3]{B}$

14.4 Variabelen vrijmaken [1]

Voorbeeld 3:

Schrijf B als functie van A

$$A = \frac{B + 6}{B - 5}$$

$$B + 6 = A(B - 5)$$

$$B + 6 = AB - 5A$$

$$B - AB = -6 - 5A$$

$$B(1 - A) = -6 - 5A$$

$$B = \frac{-6 - 5A}{1 - A}$$

Kruislings vermenigvuldigen

14.4 Variabelen vrijmaken [1]

Bij breuken geldt de volgende regel:

$$\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{1} \Leftrightarrow A = BC \Leftrightarrow \frac{A}{C} = B$$

Je mag B en C dus verwisselen.

Voorbeeld 4:

Schrijf als functie van A

$$A = 6 + \frac{500}{B+5}$$

$$A - 6 = \frac{500}{B+5}$$

$$B + 5 = \frac{500}{A - 6}$$

$$B = \frac{500}{A - 6} - 5$$

14.4 Variabelen vrijmaken [1]

Voorbeeld 5:

Schrijf $y = 3x^{2,3}$ in de vorm $x = ay^n$.

$$3x^{2,3} = y$$

$$x^{2,3} = \frac{1}{3}y$$

$$x = \left(\frac{1}{3}y\right)^{\frac{1}{2,3}}$$

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2,3}} (y)^{\frac{1}{2,3}}$$

$$x = 0,62y^{0,43}$$

Delen door het getal voor x.

Gebruik: $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Gebruik: $(ab)^p = a^p b^p$ [4]

14.4 Variabelen vrijmaken [2]

Voorbeeld:

$$K = 300 + 2a + 6b + 4c$$

$$a = 2b + 8$$

$$2b = 5 - c$$

De vergelijking $K = 300 + 2a + 6b + 4c$ is een formule met **drie** variabelen.

Schrijf K nu als functie van b . (Er mogen dus geen a 's en c 's meer in voorkomen)

Stap 1:

Werk de a weg uit de formule van K :

Vul $a = 2b + 8$ in, in $K = 300 + 2a + 6b + 4c$:

$$K = 300 + 2(2b + 8) + 6b + 4c$$

$$K = 300 + 4b + 16 + 6b + 4c$$

$$K = 316 + 10b + 4c$$

14.4 Variabelen vrijmaken [2]

Voorbeeld:

$$K = 300 + 2a + 6b + 4c$$

$$a = 2b + 8$$

$$2b = 5 - c$$

Stap 2:

Werk de c weg uit de formule van K :

Schrijf $2b = 5 - c$ als $c = 5 - 2b$ en vul dit in, in: $K = 316 + 10b + 4c$:

$$K = 316 + 10b + 4(5 - 2b)$$

$$K = 316 + 10b + 20 - 8b$$

$$K = 336 + 2b$$

Je hebt nu K als functie van b geschreven.

14.4 Variabelen vrijmaken [3]

Voorbeeld 1:

Herleid de formule $2 \cdot \log(N) = 9 - 3k$ tot de vorm $N = b \cdot g^k$

$$2 \cdot \log(N) = 9 - 3k$$

$$\log(N) = 4,5 - 1,5k$$

$$N = 10^{4,5-1,5k}$$

$$N = 10^{4,5} \cdot 10^{-1,5k}$$

$$N = 10^{4,5} \cdot (10^{-1,5})^k$$

$$N = 32.000 \cdot 0,032^k$$

Zorg dat de logaritme links staat en de rest rechts
Voor de logaritme mag geen getal staan

Maak van de logaritme een machtsfunctie

Gebruik de rekenregels voor machten.

14.4 Variabelen vrijmaken [3]

Voorbeeld 2:

Herleid de formule $N = 5 \cdot (1,15)^{2t}$ tot de vorm $t = a \cdot \log(N)$

$$5 \cdot (1,15)^{2t} = N$$

$$(1,15)^{2t} = 0,2N$$

$$\log(1,15^{2t}) = \log(0,2N)$$

$$2t \log(1,15) = \log(0,2N)$$

$$2t = \frac{1}{\log(1,15)} \cdot \log(0,2N)$$

$$t \approx 16,48 \cdot \log(0,2N)$$

Neem links en rechts de logaritme.

Gebruik ${}^g \log(a^n) = n \cdot {}^g \log(a)$

14.5 Omvormen van formules met exponenten en logaritmen [1]

Voorbeeld 1:

Schrijf de formule $N = 75 \cdot 1,94^t$ in de vorm $N = b \cdot 10^{ct}$.

Er moet nu gelden:

$$1,94^t = 10^{ct}$$

$$1,94 = 10^c$$

$$\log(1,94) = \log(10^c)$$

$$\log(1,94) = c$$

$$c \approx 0,288$$

(neem logaritme aan beide kanten)

($\log = {}^{10}\log$ en ${}^{10}\log(10^c) = c$)

De formule wordt nu: $N = 75 \cdot 10^{0,288t}$.

14.5 Omvormen van formules met exponenten en logaritmen [1]

Voorbeeld 2:

Schrijf de formule $N = 25 \cdot \ln(3t + 1)$ met een logaritme met grondtal 10.

Er moet nu gelden:

$$N = 25 \cdot \ln(3t + 1)$$

$$N = 25 \cdot \frac{\log(3t + 1)}{\log(e)}$$

$$N = \frac{25}{\log(e)} \cdot \log(3t + 1)$$

$$N \approx 57,6 \cdot \log(3t + 1)$$

$${}_g \log(a) = \frac{{}_p \log(a)}{{}_p \log(g)} \left(= \frac{{}_{10} \log(a)}{{}_{10} \log(g)} \right)$$

14.5 Omvormen van formules met exponenten en logaritmen [2]

Voorbeeld 1:

Schrijf de formule $2 \cdot \ln(N) = 5 - 0,37t$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op één decimaal en g op twee decimalen.

Er moet nu gelden:

$$2 \cdot \ln(N) = 5 - 0,37t$$

$$\ln(N) = 2,5 - 0,185t$$

$$N = e^{2,5 - 0,185t}$$

$$N = e^{2,5} \cdot e^{-0,185t}$$

$$N = e^{2,5} \cdot (e^{-0,185})^t$$

$$N \approx 12,2 \cdot 0,83^t$$

Uit $g^{\log(y)} = x$ volgt $y = g^x$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

14.5 Omvormen van formules met exponenten en logaritmen [2]

Voorbeeld 2:

Schrijf de formule $N = 280e^{0,14t}$ in de vorm $\ln(N) = at + b$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

Er moet nu gelden:

$$N = 280e^{0,14t}$$

$$\ln(N) = \ln(280e^{0,14t})$$

$$\ln(N) = \ln(280) + \ln(e^{0,14t})$$

$$\ln(N) = 0,14t + \ln(280)$$

$$\ln(N) \approx 0,14t + 5,63$$

Neem aan beide kanten de $\ln$

$${}^g\log(ab) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$$

14.5 Omvormen van formules met exponenten en logaritmen [3]

Voorbeeld 1:

Herleid $\log(N) = 2,6 + 0,4\log(t)$ tot de vorm $N = a \cdot t^b$

$$\log(N) = 2,6 + 0,4\log(t)$$

Doe links en rechts 10...

$$10^{\log(N)} = 10^{2,6+0,4\log(t)}$$

$$N = 10^{2,6+0,4\log(t)}$$

$$N = 10^{2,6} \cdot 10^{0,4\log(t)}$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$N = 10^{2,6} \cdot 10^{\log(t^{0,4})}$$

$${}^g\log(a^n) = n \cdot {}^g\log(a)$$

$$N = 10^{2,6} \cdot t^{0,4}$$

$$N \approx 398 \cdot t^{0,4}$$

14.5 Omvormen van formules met exponenten en logaritmen [3]

Voorbeeld ~2:

Herleid $N = 224 \cdot t^{3,6}$ tot de vorm $\log(N) = a + b \cdot \log(t)$

$$N = 224 \cdot t^{3,6}$$

$$\log(N) = \log(224 \cdot t^{3,6})$$

$$\log(N) = \log(224) + \log(t^{3,6})$$

$$\log(N) = \log(224) + 3,6 \cdot \log(t)$$

$$\log(N) \approx 2,35 + 3,6 \cdot \log(t)$$

Neem van beide kanten de log.

$${}^g\log(ab) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$$

$${}^g\log(a^n) = n \cdot {}^g\log(a)$$