

13.0 Voorkennis

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$

Deze functie bestaat niet bij een x van 2. Invullen van $x = 2$ geeft een deling door 0.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \frac{x^2(x - 2)}{x - 2} = x^2 \text{ met } x \neq 2$$

De functie $g(x) = x^2$ heeft als domein $\mathbb{R}$ en is een **ononderbroken kromme**. Deze functie is **continu** in $\mathbb{R}$.

De functie g is continu in een open interval V als het bijbehorende deel van de grafiek van f een ononderbroken kromme is.

De grafiek van $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ valt samen met de grafiek van $g(x) = x^2$ maar voor

$x = 2$ heeft de grafiek van f een **perforatie** met de coördinaten (2,4).
Toevoegen van het punt (2,4) maakt van f een continue functie in $\mathbb{R}$.

4 is de **continuumakende waarde** van f voor $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

13.0 Voorkennis

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ betekent dat $f(x)$ onbeperkt tot b kan naderen door x maar dicht genoeg bij a te kiezen.

Als de functie f continu is in a , dan geldt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Als voor de functie f geldt dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, dan is f continu in a .

Voorbeeld 1:

Bereken: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 + 2 - 6}{2 - 3} = \frac{0}{-1} = 0$$

Voorbeeld 2:

Bereken: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5$$

13.0 Voorkennis

Algemeen:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ betekent $f(x)$ kan onbeperkt tot b naderen door x maar

groot genoeg te nemen.

Voorbeeld 3:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{3-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{2+0}{0-1} = -2$$

Voorbeeld 4:

$|4-x| = 4-x$ als $4-x \geq 0$ ofwel $x \leq 4$.

$|4-x| = -(4-x)$ als $4-x < 0$ ofwel $x > 4$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-1}{|4-x|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-1}{-(4-x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-1}{-4+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{x}}{\frac{-4}{x} + 1} = \frac{5-0}{0+1} = 5$$

13.0 Voorkennis

Algemeen:

Als $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ of als $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ dan is de lijn $y = b$

de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

Voorbeeld 5:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{3-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}-1} = \frac{2+0}{0-1} = -2$$

De horizontale asymptoot van bovenstaande grafiek is de lijn $y = 2$.

13.0 Voorkennis

Voorbeeld 6:

Gegeven is de functie $g(x) = \frac{|4x - 1|}{x + 1}$

$$|4x - 1| = 4x - 1 \text{ als } 4x - 1 \geq 0 \text{ ofwel } x \geq \frac{1}{4}$$

$$|4x - 1| = -(4x - 1) \text{ als } 4x - 1 < 0 \text{ ofwel } x < \frac{1}{4}$$

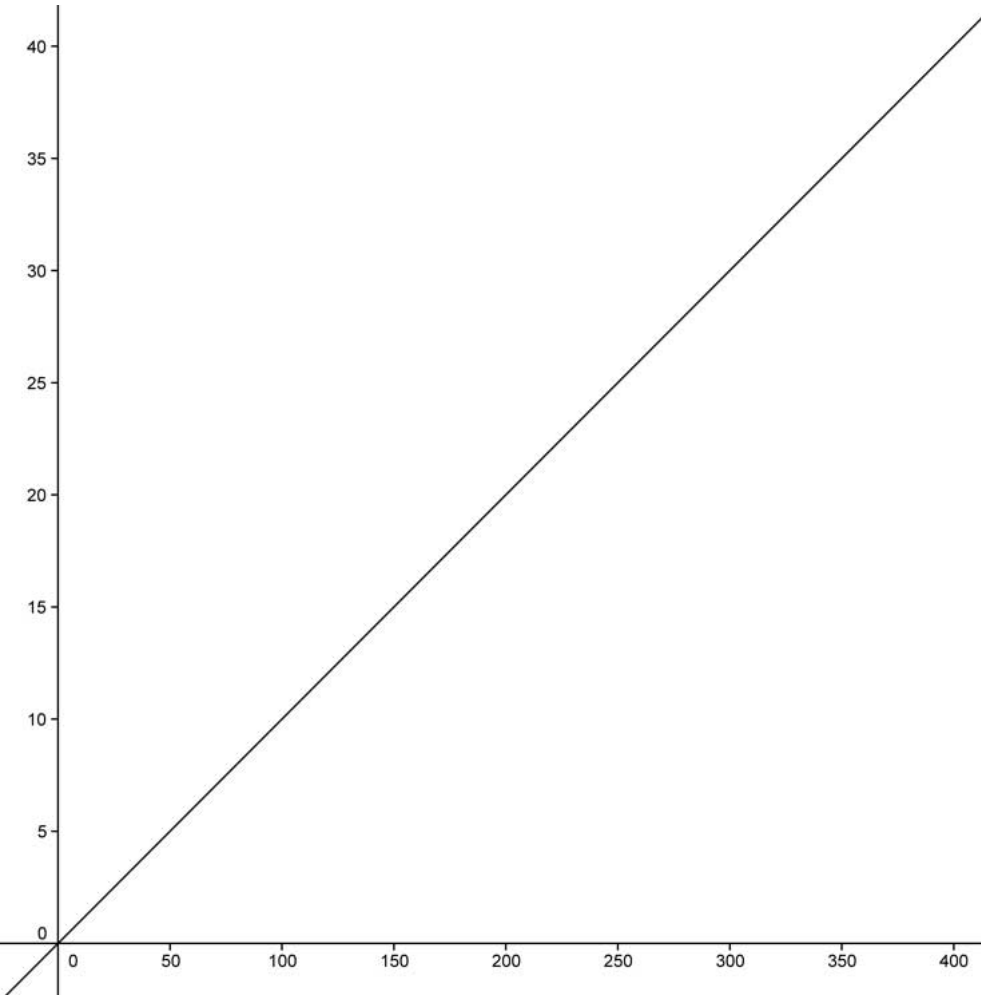
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{4 - 0}{1 + 0} = 4$$

Voor $x \rightarrow \infty$ nadert de grafiek de horizontale asymptoot $y = 4$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-4 + 0}{1 + 0} = -4$$

Voor $x \rightarrow -\infty$ nadert de grafiek de horizontale asymptoot $y = -4$

13.1 Evenredigheden en inverse functies [1]



- Bij evenredige grootheden hoort een verhoudingstabel;
- Bij evenredige grootheden hoort als grafiek een rechte lijn door (0,0);
- Bij evenredige grootheden hoort een formule van de vorm $y = ax$;
- Als de ene grootheid k keer zo groot wordt, wordt de andere grootheid dat ook.

13.1 Evenredigheden en inverse functies [1]

Voorbeeld 1:

Aan een schip is zoveel drinkwater aanwezig dat 12 mensen hier 10 dagen kunnen doen.

Personen (x)	12	24	6	120
Dagen (y)	10	5	20	1
Product	120	120	120	120

Let op:

- In dit voorbeeld is y omgekeerd evenredig met x ;
- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door hetzelfde getal delen;
- Het product xy is constant, dus $xy = a$ of $y = \frac{a}{x}$
- De grafiek is een hyperbool.

13.1 Evenredigheden en inverse functies [1]

Voorbeeld 2:

Gegeven is dat y evenredig is met $\frac{2x-3}{2x+1}$

Voor $x = 2$ is $y = 0,1$.

Stel de formule op van y .

Er geldt: $y = a \cdot \frac{2x-3}{2x+1}$

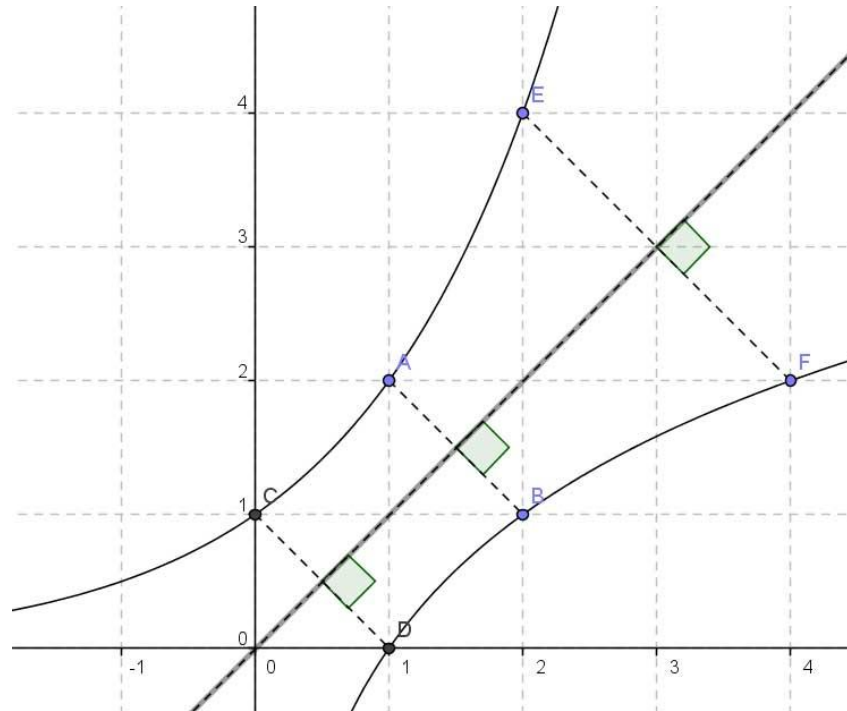
Invullen van $x = 2$ en $y = 0,1$ geeft $0,1 = a \cdot \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 + 1}$

$$0,2a = 0,1$$

$$a = 0,5$$

Hieruit volgt: $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-3}{2x+1} = \frac{2x-3}{4x+2}$

13.1 Evenredigheden en inverse functies [2]



De grafieken van $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \log_2(x)$ spiegelen in de lijn $y = x$.
We noemen f en g nu **inverse functies**.

13.1 Evenredigheden en inverse functies [2]

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 - \frac{4}{x+2}$ en $g(x) = \frac{2x-2}{3-x}$

De grafieken van een functie en de bijbehorende inverse functie zijn elkaar spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

De bovenstaande twee functies zijn elkaars inverse. Je kunt het functievoorschrift van g vinden door bij het functievoorschrift van f de variabelen x en y te verwisselen en y vrij te maken.

$$x = 3 - \frac{4}{y+2}$$

$$3 - x = \frac{4}{y+2}$$

$$(y+2)(3-x) = 4$$

$$3y - xy + 6 - 2x = 4$$

$$3y - xy = 2x - 2$$

$$y(3-x) = 2x - 2$$

$$y = \frac{2x-2}{3-x}$$

13.2 Asymptoten bij gebroken functies [1]

Algemeen:

Als $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ of als $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ dan is de lijn $y = b$

de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

Voorbeeld 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{3-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{2+0}{0-1} = -2$$

De horizontale asymptoot van bovenstaande grafiek is de lijn $y = 2$.

13.2 Asymptoten bij gebroken functies [1]

Voorbeeld 2:

Stel de formule op van de horizontale asymptoot van de functie $f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{x^2 + 4}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 6x}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{6}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3$$

De horizontale asymptoot van bovenstaande grafiek is de lijn $y = 3$.

In dit voorbeeld maak je gebruik van de volgende eigenschappen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

Let op:

Als x hele grote waarden aanneemt is er sprake van een horizontale asymptoot. Het punt $(-2, 3)$ ligt echter op de grafiek van f .

Een verticale asymptoot vind je door de noemer gelijk te stellen aan nul. De teller mag niet tegelijkertijd ook nul worden.

13.2 Asymptoten bij gebroken functies [1]

Voorbeeld 3:

Stel de formule op van de asymptoten van de functie $f(x) = \frac{|2x^3 - 1|}{x^3 - 1}$

Stap 1:

Bepaal de verticale asymptoten

$$x^3 - 1 = 0 \wedge |2x^3 - 1| \neq 0$$

$$x^3 = 1 \wedge x^3 \neq \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \wedge x \neq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Stap 2:

Bij deze formule met absolute waarden zijn er twee horizontale asymptoten:

$$|2x^3 - 1| = 2x^3 - 1 \text{ als } 2x^3 - 1 \geq 0 \text{ ofwel } x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ en dus als } x \rightarrow \infty$$

$$|2x^3 - 1| = -(2x^3 - 1) \text{ als } 2x^3 - 1 < 0 \text{ ofwel } x < \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ en dus als } x \rightarrow -\infty$$

13.2 Asymptoten bij gebroken functies [1]

Voorbeeld 3:

Stel de formule op van de asymptoten van de functie $f(x) = \frac{|2x^3 - 1|}{x^3 - 1}$

Stap 3:

Bepaal de horizontale asymptoten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|2x^3 - 1|}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x^3 - 1|}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}} = \frac{-2 + 0}{1 - 0} = -2$$

De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = 2$ en $y = -2$

13.2 Asymptoten bij gebroken functies [2]

Voorbeeld:

Bereken de asymptoten van $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4}$

Stap 1:

Bereken de verticale asymptoten:

$$x^2 - 4 = 0 \wedge x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \neq 0$$

$$x^2 = 4 \wedge x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \neq 0$$

$$x = 2 \vee x = -2 \wedge x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \neq 0$$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

Stap 2:

Een gebroken functie waarvan de graad van de teller één hoger is dan de graad van de noemer, heeft een grafiek met een scheve asymptoot.

Met behulp van staartdelen kun je achter deze scheve asymptoot komen.

13.2 Asymptoten bij gebroken functies [2]

Voorbeeld:

Bereken: $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4}$

Stap 2:

$$\begin{array}{r} x^2 - 4 \ / \quad x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \ \backslash \ x \\ \quad x^3 \qquad \quad - 4x \\ \hline \qquad 2x^2 \qquad - 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 4 \ / \quad 2x^2 \qquad - 5 \ \backslash \ x + 2 \\ \quad 2x^2 \qquad - 8 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 3 \end{array}$$

en dus $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x^2 - 4}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2 - 4} = 0$$

Hieruit volgt dat de **scheve asymptoot** de lijn $y = x + 2$ is.

13.2 Asymptoten bij gebroken functies [2]

De grafiek van de functie f heeft een scheve asymptoot $y = ax + b$ voor $x \rightarrow \infty$.
als voor grote waarden van x de grafiek van f vrijwel gaat samenvallen met de lijn $y = ax + b$, dus als

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

De richtingscoëfficiënt a kan berekend

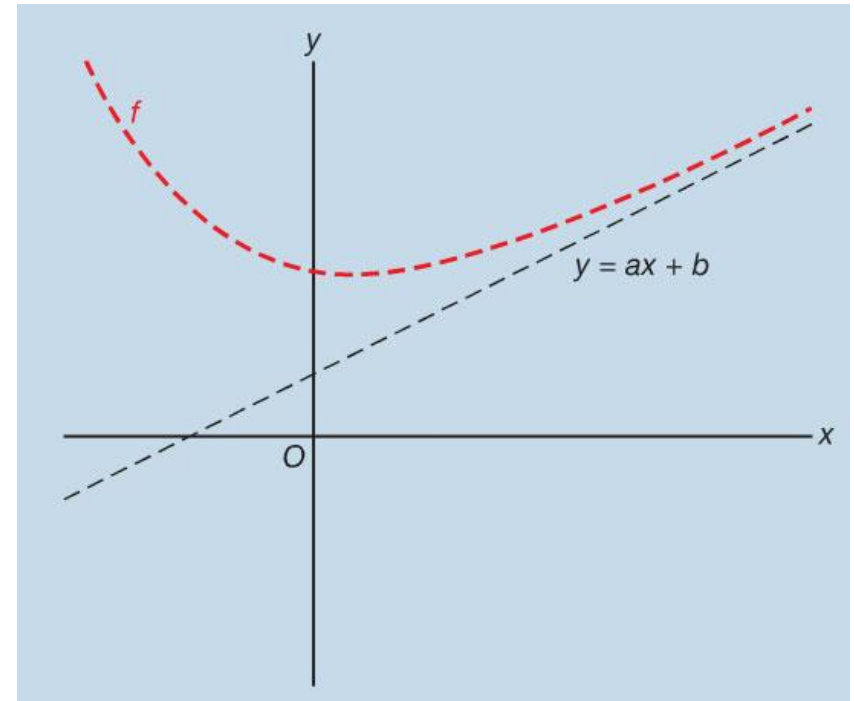
worden met: $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$

Verder valt af te leiden:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

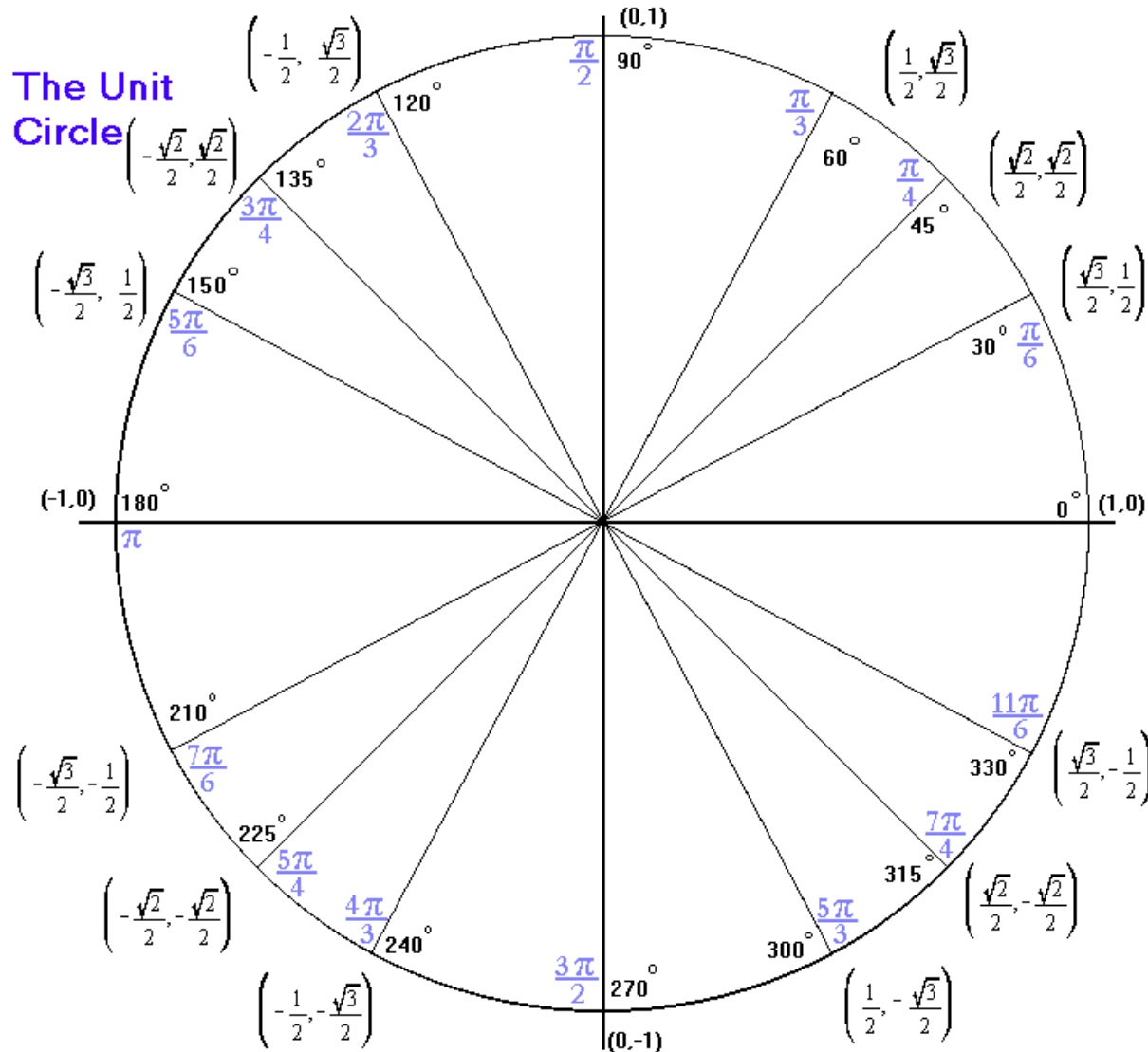
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$



13.2 Asymptoten bij gebroken functies [3]

Oplossen van goniometrische vergelijkingen:



Vergelijkingen van
de vorm

$$\sin(A) = C$$
$$\text{en } \cos(A) = C$$

los je op met de
exacte waarde cirkel.

13.2 Asymptoten bij gebroken functies [3]

Oplossen van goniometrische vergelijkingen:

$\sin(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = -B + k \cdot 2\pi$

$\sin(A) = \sin(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$

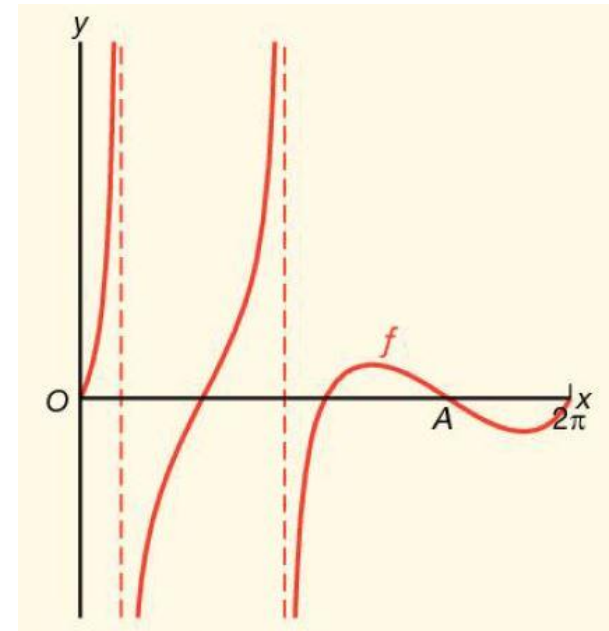
$\cos(A) = \cos(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = -B + k \cdot 2\pi$

Voorbeeld:

Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{\sin(2x)}{1 - 2\sin(x)}$

Het punt A is een snijpunt van de grafiek met de x -as.
De lijn k raakt de grafiek in A en snijdt de asymptoten in de punten B en C .

Bereken exact de coördinaten van B en C .



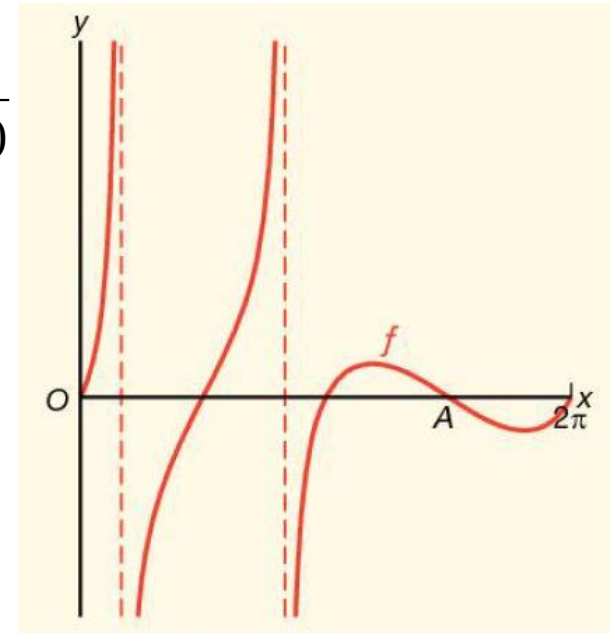
13.2 Asymptoten bij gebroken functies [3]

Voorbeeld:

Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{\sin(2x)}{1 - 2\sin(x)}$

Het punt A is een snijpunt van de grafiek met de x -as.
De lijn k raakt de grafiek in A en snijdt de asymptoten in de punten B en C .

Bereken exact de coördinaten van B en C .



Stap 1:

Bereken de verticale asymptoten.

$$1 - 2\sin(x) = 0 \wedge \sin(2x) \neq 0$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \wedge 2x \neq k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De **verticale asymptoten** zijn de lijnen $x = \frac{1}{6}\pi \wedge x = \frac{5}{6}\pi$

13.2 Asymptoten bij gebroken functies [3]

Voorbeeld:

Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{\sin(2x)}{1 - 2\sin(x)}$

Bereken exact de coördinaten van B en C .

Stap 2:

Bereken de coördinaten van punt A .

$$\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \frac{1}{2}\pi \Rightarrow A(1\frac{1}{2}\pi, 0)$$

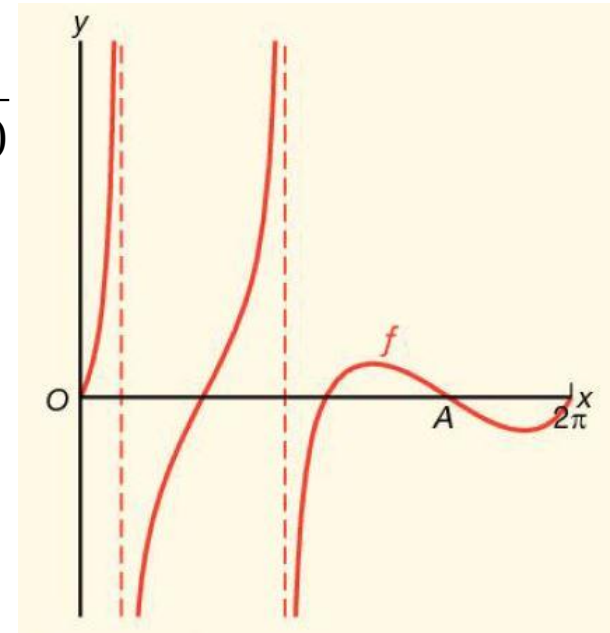
Stap 3:

Bereken de afgeleide van $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{(1 - 2\sin(x)) \cdot [\sin(2x)]' - \sin(2x) \cdot [1 - 2\sin(x)]'}{(1 - 2\sin(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 - 2\sin(x)) \cdot [2\cos(2x)]' - \sin(2x) \cdot -2\cos(x)]'}{(1 - 2\sin(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\cos(2x) - 4\sin(x)\cos(2x) + 2\sin(2x)\cos(x)}{(1 - 2\sin(x))^2}$$



13.2 Asymptoten bij gebroken functies [3]

Voorbeeld:

Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \frac{\sin(2x)}{1 - 2\sin(x)}$

Bereken exact de coördinaten van B en C .

Stap 4:

Stel de vergelijking van raaklijn k op.

$$f'(1\frac{1}{2}\pi) = \frac{2 \cdot -1 - 4 \cdot -1 \cdot -1 + 2 \cdot 0 \cdot 0}{(1 - 2 \cdot -1)^2} = \frac{-2 - 4}{3^2} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

Invullen van $A(1\frac{1}{2}\pi, 0)$ geeft $b = \pi$.

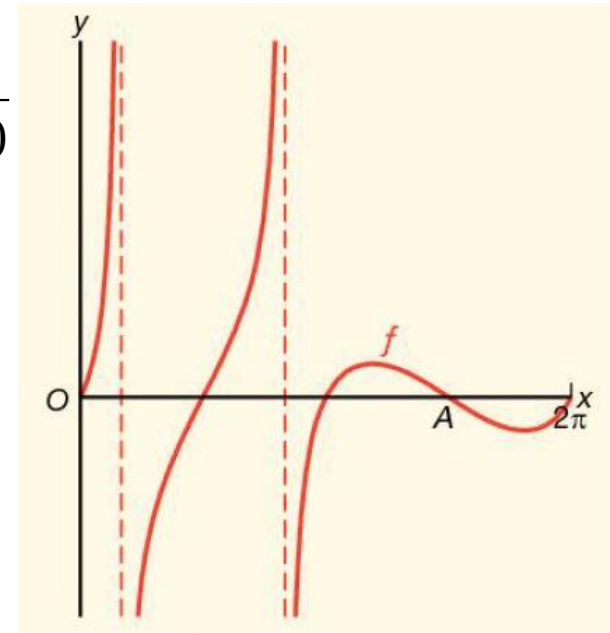
$$k: y = -\frac{2}{3}x + \pi$$

Stap 5:

Bereken de coördinaten van B en C .

$$y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}\pi + \pi = \frac{8}{9}\pi \quad B(\frac{1}{6}\pi, \frac{8}{9}\pi)$$

$$y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}\pi + \pi = \frac{4}{9}\pi \quad C(\frac{5}{6}\pi, \frac{4}{9}\pi)$$



13.3 Limieten en perforaties [1]

Voorbeeld 1:

Gegeven zijn de functies $f_q(x) = \begin{cases} x^2 & \text{voor } x \leq 2 \\ -x + q & \text{voor } x > 2 \end{cases}$

De **linkerlimiet** is: $\lim_{x \uparrow 2} f_q(x) = \lim_{x \uparrow 2} x^2 = 4$

De **rechterlimiet** is: $\lim_{x \downarrow 2} f_q(x) = \lim_{x \downarrow 2} (-x + q) = -2 + q$

De limiet $\lim_{x \rightarrow 2} f_q(x)$ bestaat als $\lim_{x \uparrow 2} f_q(x) = \lim_{x \downarrow 2} f_q(x)$

Er moet gelden: $4 = -2 + q$.

Hieruit volgt: $q = 6$.

Voor $q = 6$ is de functie f_q **continu** in 2. Een grafiek is continu als er sprake is van een ononderbroken kromme.

13.3 Limieten en perforaties [1]

Voorbeeld 2:

Voor $0 < p < 1$ zijn gegeven de functies $f_p(x) = \begin{cases} \sin(p\pi x) & \text{voor } x < 2 \\ \frac{1}{8}x^2 & \text{voor } x > 2 \end{cases}$

Voor welke p bestaat $\lim_{x \rightarrow 2} f_p(x)$?

$$\lim_{x \uparrow 2} f_p(x) = \lim_{x \uparrow 2} \sin(p\pi x) = \sin(2p\pi)$$

$$\lim_{x \uparrow 2} f_p(x) = \lim_{x \uparrow 2} \frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{8} \cdot 2^2 = \frac{1}{2}$$

De limiet bestaat als de linker- en rechterlimiet aan elkaar gelijk zijn:

$$\sin(2p\pi) = \frac{1}{2}$$

$$2p\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2p\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$p = \frac{1}{12} + k \cdot 1 \vee p = \frac{5}{12} + k \cdot 1$$

$$p = \frac{1}{12} \vee p = \frac{5}{12}$$

13.3 Limieten en perforaties [2]

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$

Deze functie bestaat niet bij een x van 2. Invullen van $x = 2$ geeft een deling door 0.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \frac{x^2(x - 2)}{x - 2} = x^2 \text{ met } x \neq 2$$

De functie $g(x) = x^2$ heeft als domein $\mathbb{R}$ en is een **ononderbroken kromme**. Deze functie is **continu** in $\mathbb{R}$.

De functie g is continu in een open interval V als het bijbehorende deel van de grafiek van f een ononderbroken kromme is.

De grafiek van $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ valt samen met de grafiek van $g(x) = x^2$ maar voor

$x = 2$ heeft de grafiek van f een **perforatie** met de coördinaten (2,4).
Toevoegen van het punt (2,4) maakt van f een continue functie in $\mathbb{R}$.

4 is de **continuumakende waarde** van f voor $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

13.3 Limieten en perforaties [2]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 2x - 15}$

Geef de perforatie van deze functie.

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 2x - 15} = \frac{(x-3)(x-5)}{(x+3)(x-5)}$$

De factor $(x - 5)$ komt in de teller en noemer van de functie voor.
Hieruit volgt dat de x-coördinaat van de perforatie gelijk is aan 5.

De y-coördinaat kan als volgt gevonden worden:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-3)(x-5)}{(x+3)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-3)}{(x+3)} = \frac{5-3}{5+3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

De perforatie is nu: $(5, \frac{1}{4})$

13.3 Limieten en perforaties [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de functie $f_a(x) = \frac{4x^2 - 4x - 3}{2x + a}$

Bereken exact de twee waarden van a waarvoor de grafiek een perforatie heeft met de coördinaten van deze perforaties.

$$f_a(x) = \frac{4x^2 - 4x - 3}{2x + a} = \frac{(2x+1)(2x-3)}{2x+a}$$

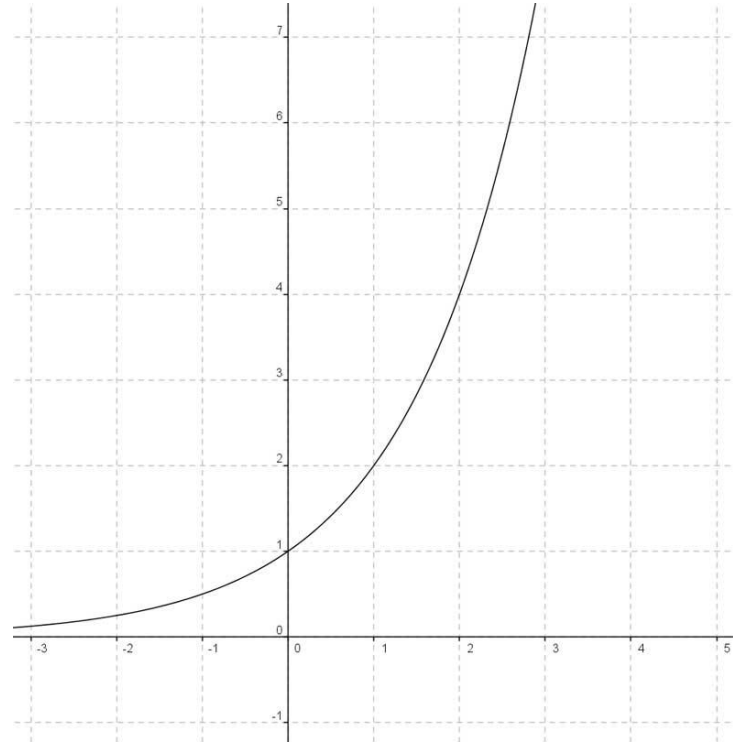
Er is een perforatie bij $a = 1$ en $a = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(2x-3)}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (2x-3) = -1-3 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(2x-3)}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} (2x+1) = 3+1 = 4$$

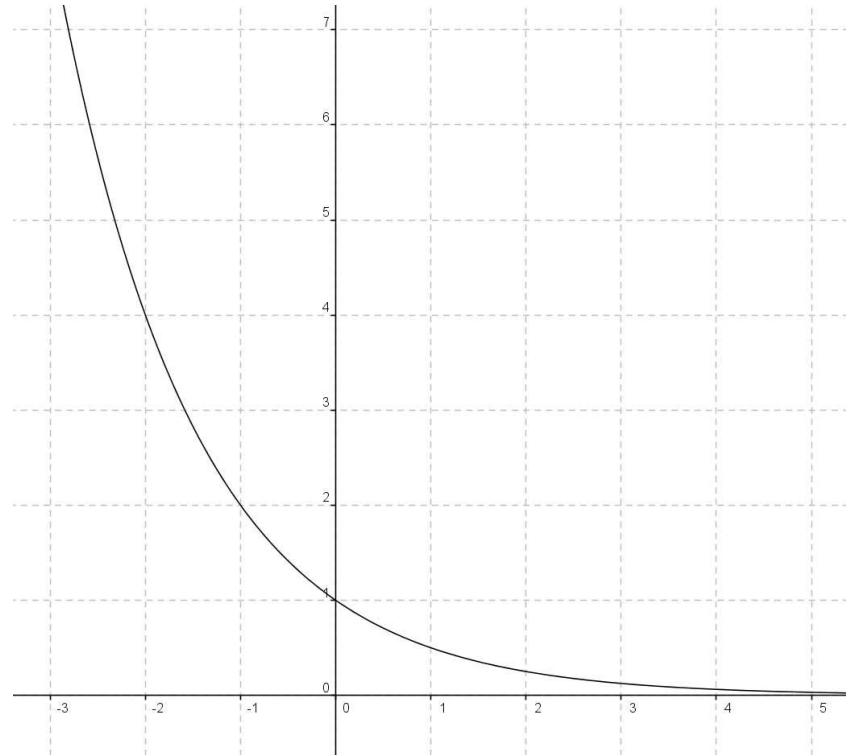
De perforaties zijn: $(-\frac{1}{2}, -4)$ en $(1\frac{1}{2}, 4)$

13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies [1]



- In de grafiek is de **exponentiële standaardfunctie** $f(x) = 2^x$ getekend;
- $D_f = \mathbb{R}$, $B_f = (0, \rightarrow)$ met de x-as als asymptoot (Dit volgt uit: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$);
- Elke functie g^x met $g > 1$ heeft deze vorm;
- Voor $g > 1$ is $\lim_{x \rightarrow -\infty} g^x = 0$

13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies [1]



- In de grafiek is de **exponentiële standaardfunctie** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ getekend;
- $D_f = \mathbb{R}$, $B_f = (0, \rightarrow)$ met de x-as als asymptoot. (Dit volgt uit: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$);
- Elke functie g^x met $0 < g < 1$ heeft deze vorm;
- Voor $0 < g < 1$ is $\lim_{x \rightarrow \infty} g^x = 0$

13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies [1]

Voorbeeld:

Stel van elke asymptoot van de grafiek van $f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 2}$ de formule op.

Verticale asymptoten:

$$e^x - 2 = 0 \wedge 2e^x + 1 \neq 0$$

$$e^x = 2 \wedge 2e^x \neq -1$$

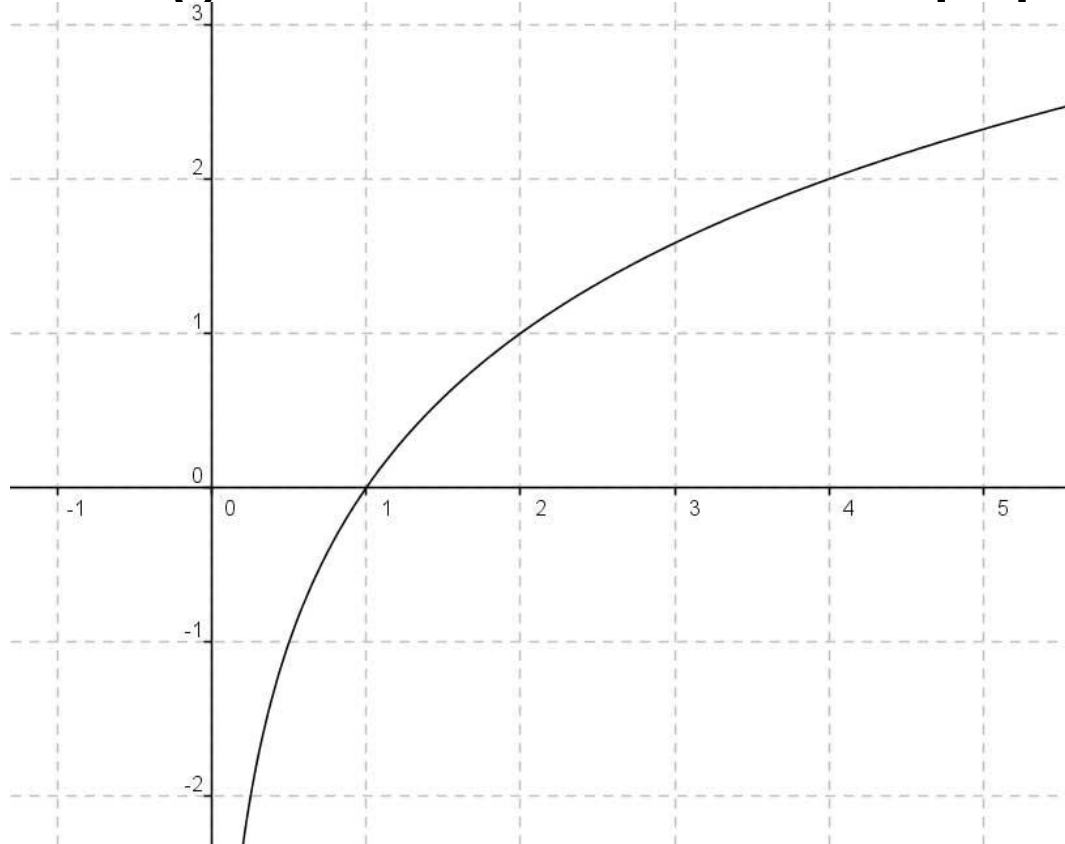
$$x = \ln(2)$$

Horizontale asymptoten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x + 1}{e^x - 2} = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 - 2} = -\frac{1}{2} \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x + 1}{e^x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{2}{e^x}} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2 \quad y = 2$$

13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies [2]



- In de grafiek is de functie $f(x) = {}^2\log(x)$ getekend met $\lim_{x \rightarrow \infty} {}^2\log(x) = \infty$
- $D_f = (0, \rightarrow)$, $B_f = | \mathbb{R}$ met de y-as als asymptoot en dus $\lim_{x \downarrow 0} {}^2\log(x) = -\infty$
- Elke functie ${}^g\log(x)$ met $g > 1$ heeft deze vorm.

13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies [2]

Voorbeeld 1:

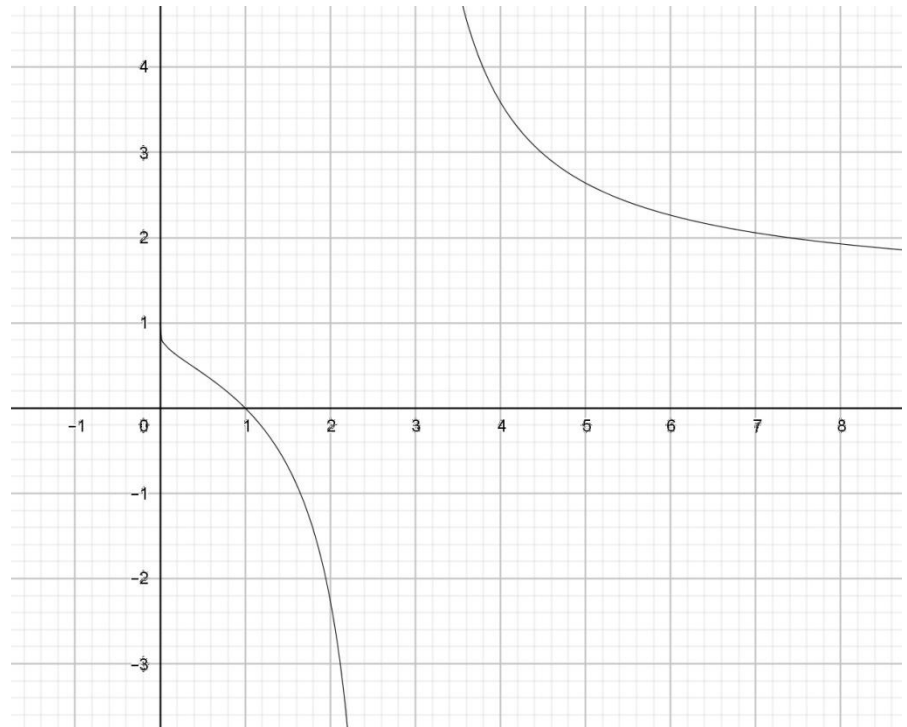
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} =$$

$$\lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} =$$

$$\lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$



13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{2\ln(x)-1}$

Stel de formules van de asymptoten op.

Verticale asymptoot:

$$2\ln(x) - 1 = 0$$

$$\ln(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Horizontale asymptoot:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2\ln(x)-1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{4}{2\ln(x)-1} = 0$$

