

14.0 Voorkennis

Sinusregel:

In elke $\triangle ABC$ geldt de sinusregel:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Voorbeeld 1:

Gegeven is $\triangle ABC$ met $c = 12$, $\alpha = 54^\circ$ en $\beta = 62^\circ$

Bereken a in twee decimalen nauwkeurig.

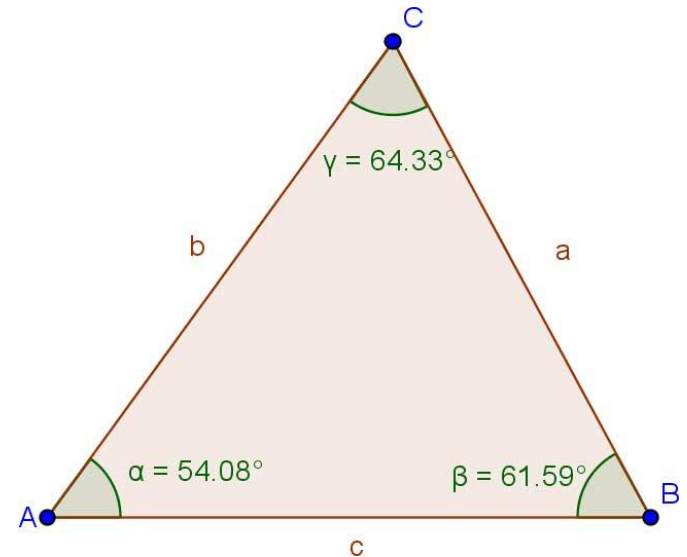
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{\sin 54^\circ} = \frac{12}{\sin 64^\circ}$$

$$a \cdot \sin 64^\circ = 12 \cdot \sin 54^\circ$$

$$a = \frac{12 \cdot \sin 54^\circ}{\sin 64^\circ}$$

$$a \approx 10,80$$



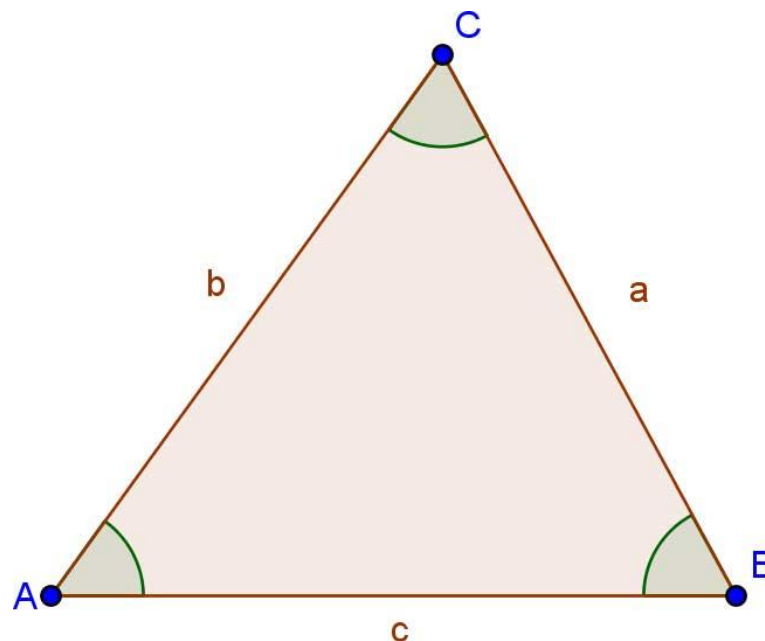
Reken pas in de laatste stap de sinussen uit.
Dit voorkomt tussentijds afronden.

14.0 Voorkennis

Voorbeeld 2:

Gegeven is $\triangle ABC$ met $a = 4,46$
 $b = 4,84$ en $c = 4,96$. Bereken $\angle A$ in graden
nauwkeurig.

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\4,46^2 &= 4,84^2 + 4,96^2 - 2 \cdot 4,84 \cdot 4,96 \cos \alpha \\19,8916 &= 48,0272 - 48,0128 \cos \alpha \\48,0128 \cos \alpha &= 28,1356 \\\cos \alpha &= 0,586... \\\alpha &\approx 54^\circ\end{aligned}$$



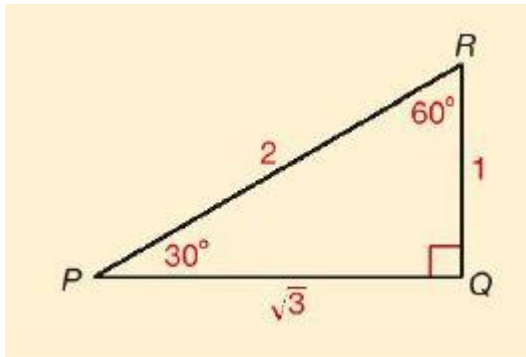
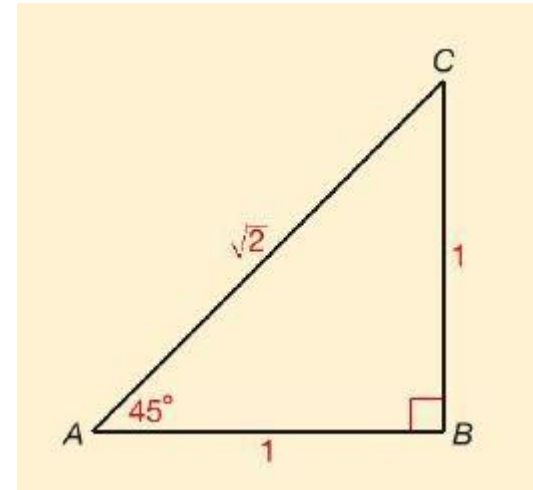
In elke $\triangle ABC$ geldt de cosinusregel:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma\end{aligned}$$

Met behulp van de cosinusregel is het dus mogelijk de grootte van de hoeken van een driehoek uit te rekenen als je alleen de lengtes van de zijden weet.

14.0 Voorkennis

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.



De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.

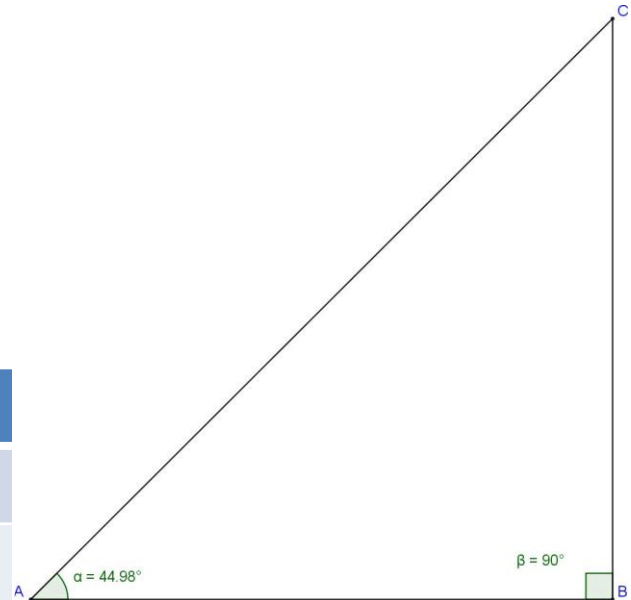
14.0 Voorkennis

Voorbeeld 3:

Gegeven is een rechthoekige $\triangle ABC$
met $AC = 12$ en $\angle A = 45^\circ$. Bereken exact AB

Er geldt nu:

AB	BC	AC
1	1	$\sqrt{2}$
x	y	12



Met behulp van deze verhoudingstabel kun je AB berekenen:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{12}$$

$$x \cdot \sqrt{2} = 1 \cdot 12$$

$$x = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

Let op:

Als er in de noemer **enkel** een wortelteken komt te staan, moet je dit wegwerken.

14.0 Voorkennis

Definitie = Een afspraak, die dus niet bewezen hoeft te worden.

Voorbeeld definitie:

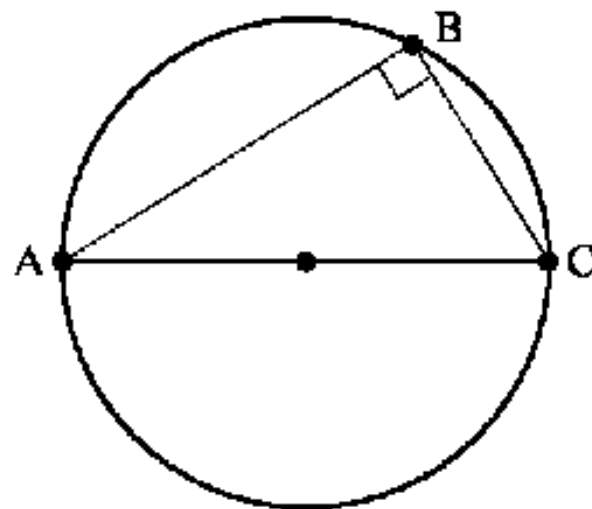
- Een gelijkbenige driehoek is een driehoek met twee gelijke zijden;
- Een gestrekte hoek is een hoek van 180 graden.
- Een parallellogram is een vierhoek waarvan beide paren overstaande zijden evenwijdig zijn;
- Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden.

Stelling = Een eigenschap, die bewezen moet worden. Voor het bewijs kun je alle bekende definities en eerder bewezen stellingen gebruiken.

14.0 Voorkennis

Stelling van Thales:

Als $\triangle ABC$ rechthoekig is in B ,
dan ligt B op de cirkel met middellijn AC .



Omgekeerde stelling van Thales:

Als van $\triangle ABC$ de zijde AC middellijn
van een cirkel is en punt B op die cirkel ligt,
dan is de $\triangle$ rechthoekig in C .

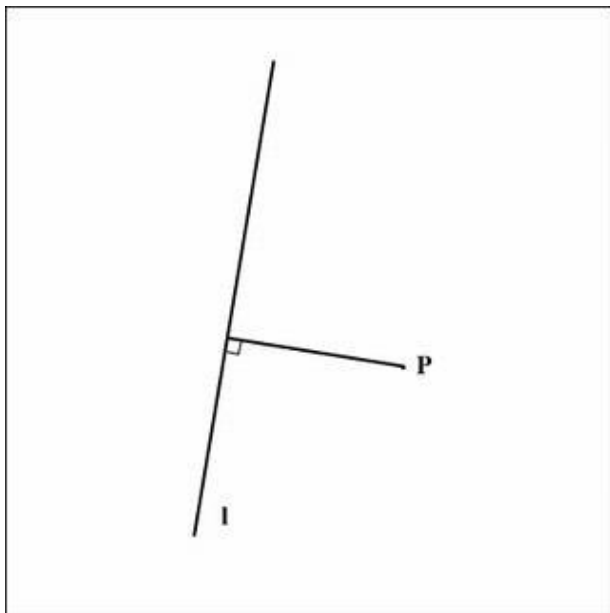
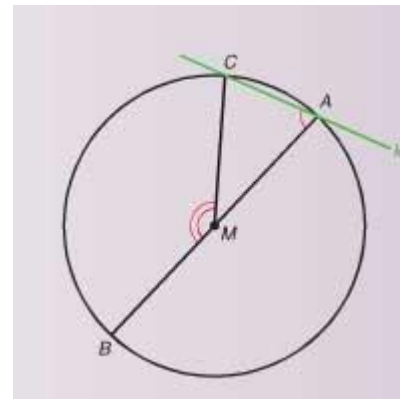
14.0 Voorkennis

Definitie van raaklijn aan cirkel:

Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die precies één punt gemeenschappelijk heeft met de cirkel.

Stelling van raaklijn aan cirkel:

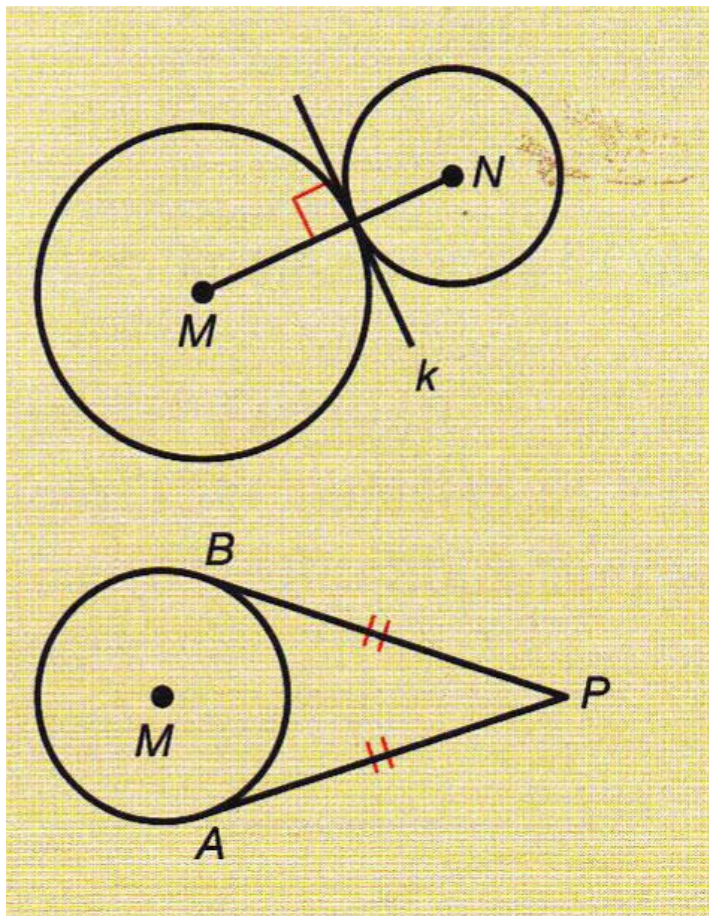
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.



Definitie van afstand punt tot lijn:

De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van het loodlijnstuk neergelaten vanuit dat punt op die lijn.

14.0 Voorkennis



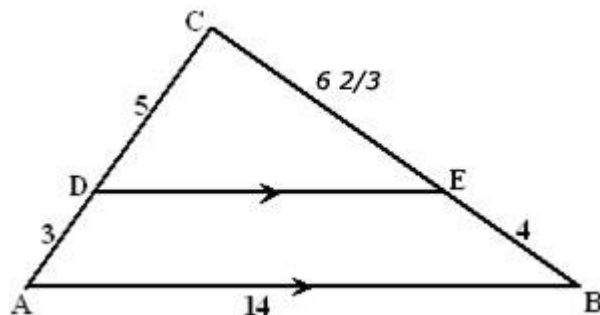
Stelling raaklijn in gemeenschappelijk raakpunt:

De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.

Stelling afstand punt tot raakpunten:

Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.

14.0 Voorkennis



Voorbeeld 4:

De zijden AB en DE zijn evenwijdig.
Bereken DE .

Stap 1:

Laat zien dat de twee driehoeken in de figuur gelijkvormig zijn.

$\triangle ABC$ heeft drie hoeken: $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C$.

$\triangle DEC$ heeft drie hoeken: $\angle D$, $\angle E$ en $\angle C$.

$$\angle B = \angle E \text{ (F-hoeken)}$$

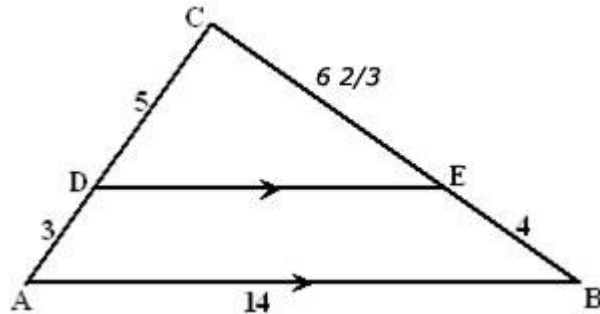
$$\angle A = \angle D \text{ (F-hoeken)}$$

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze **twee paar gelijke hoeken** hebben.

Er geldt nu: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

[Let op de juiste volgorde van de letters]

14.0 Voorkennis



Voorbeeld 4:

De zijden AB en DE zijn evenwijdig.
Bereken DE .

Stap 2:

Maak een algemene verhoudingstabel:

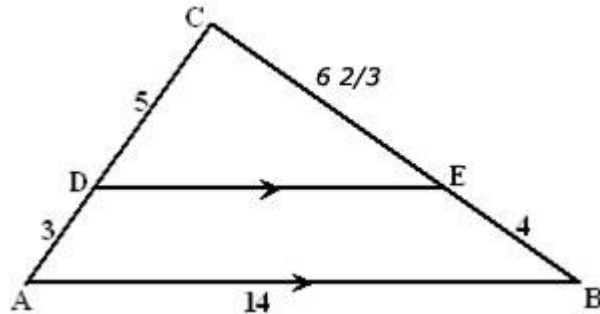
$\triangle ABC$	AB	BC	AC
$\triangle DEC$	DE	EC	DC

Stap 3:

Maak een verhoudingstabel met de bekende waarden:

14	$10\frac{2}{3}$	8 (3+5)
DE	$6\frac{2}{3}$	5

14.0 Voorkennis



Voorbeeld 4:

De zijden AB en DE zijn evenwijdig.
Bereken DE .

Stap 4:

Bereken DE :

$$DE = \frac{14 \cdot 5}{8} = \frac{70}{8} = 8 \frac{3}{4}$$

14.0 Voorkennis

De lijn k door de punten $A(2, 0)$ en $B(0, -5)$ kan op een vijftal manier genoteerd worden:

1. Assenvergelijking:

$$k : \frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1$$

2. Lineaire vergelijking:

$$k : 5x - 2y = 10$$

3. Lineaire vergelijking van de vorm $y = ax + b$:

$$k : y = 2\frac{1}{2}x - 5$$

14.0 Voorkennis

De lijn k door de punten $A(2, 0)$ en $B(0, -5)$ kan op een vijftal manier genoteerd worden:

4. Parameterrepresentatie:

Stel $x = 2t$. Invullen geeft $y = 2\frac{1}{2} \cdot 2t - 5 = 5t - 5$

Hieruit volgt: $k: x(t) = 2t$ en $y(t) = 5t - 5$.

5. Vectorrepresentatie:

De richtingsvector van k is gelijk aan: $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Hieruit ontstaat de vectorrepresentatie: $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

14.0 Voorkennis

Voorbeeld 5:

Gegeven is de lijn $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Stel de vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$

$$\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ geeft } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$k: 5x - 4y = c$$

Het punt $(2, 3)$ ligt op de lijn k . Invullen hiervan geeft:

$$c = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -2.$$

De gevraagde vergelijking is dus $k: 5x - 4y = 2$

14.0 Voorkennis

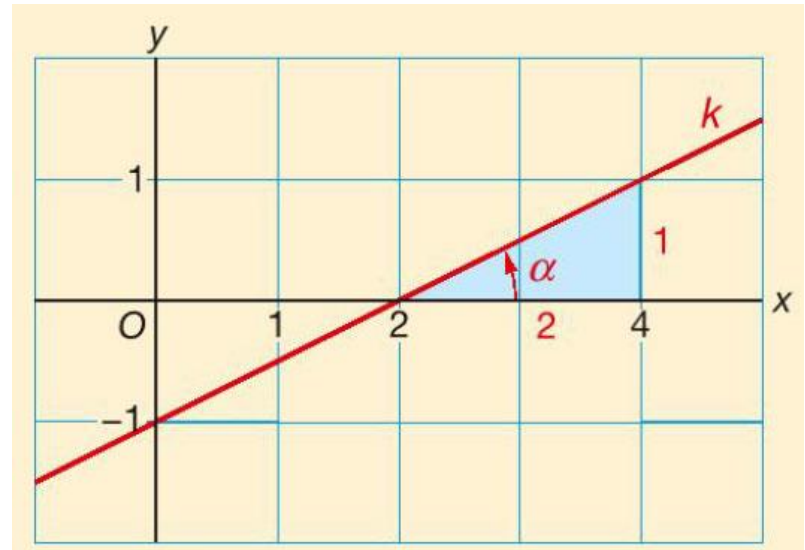
Voorbeeld 6:

Getekend is de lijn k : $y = \frac{1}{2}x - 1$.

De richtingshoek α van de lijn k is te berekenen met:

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 26,6^\circ (= \alpha)$$



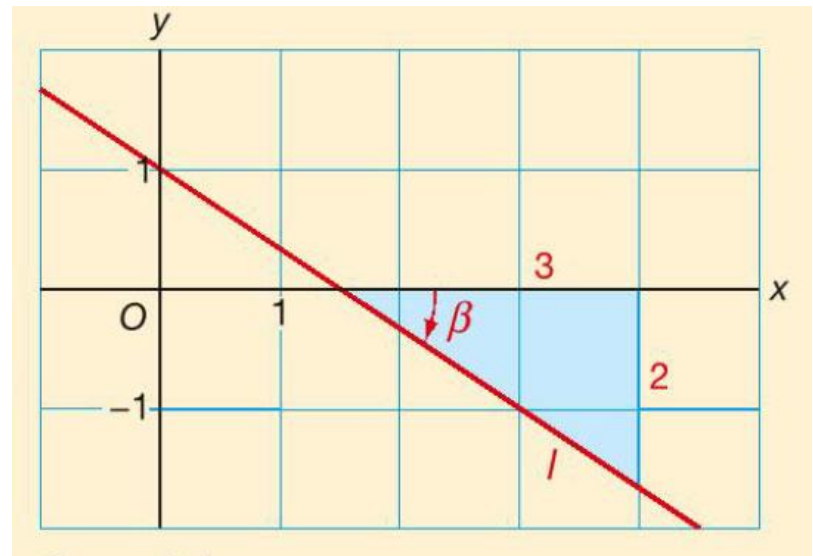
Voorbeeld 7:

Getekend is de lijn l : $y = -\frac{2}{3}x + 1$

De richtingshoek β van de lijn l is te berekenen met:

$$\tan(\beta) = -\frac{2}{3}$$

$$\tan^{-1}(-\frac{2}{3}) \approx -33,7^\circ (= \beta)$$

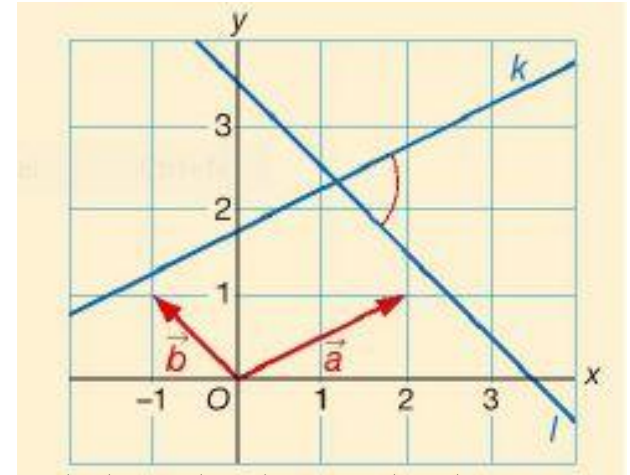


14.0 Voorkennis

Algemeen:

De hoek φ tussen de twee snijdende lijnen kan als volgt berekend worden:

$$\cos(\angle(k,l)) = \cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l)) = \frac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}$$



Voorbeeld 8:

Gegeven zijn de lijnen $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bereken $\angle(k,l)$

$$\cos(\angle(k,l)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|2 \cdot -3 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{130}}$$

Hieruit volgt $\angle(k,l) \approx 74,7^\circ$

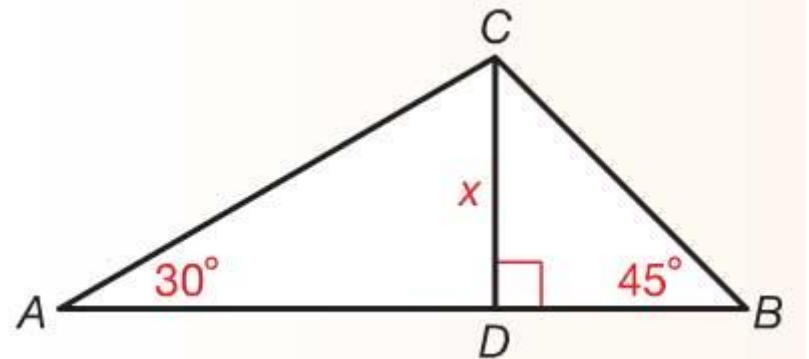
14.1 Vergelijkingen bij meetkundige figuren [1]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de $\triangle ABC$ met

$AB = 10$ en $\angle A = 30^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$.

Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.



Stap 1:

$$\text{Opp}(\triangle ABC) = 0,5 \cdot AB \cdot CD = 0,5 \cdot 10 \cdot CD = 5CD$$

Stap 2:

$\triangle BCD$ is gelijkzijdig. Er geldt: $BD = CD = x$.

Stap 3:

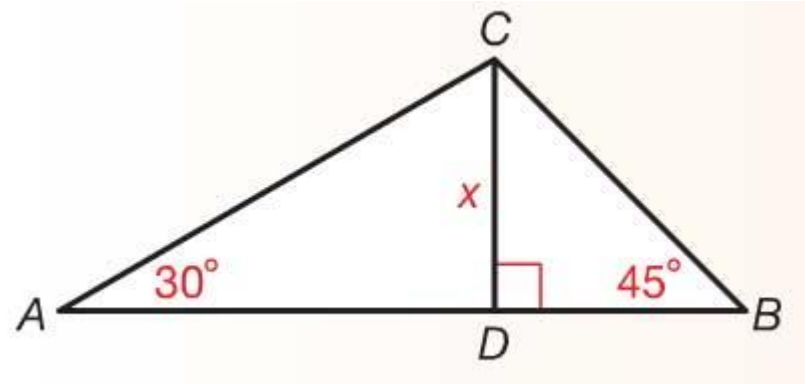
De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$. $\triangle ACD$ is zo'n driehoek.

Hieruit volgt dat als de lengte van CD gelijk is aan x , de lengte van AD gelijk is aan $x\sqrt{3}$.

14.1 Vergelijkingen bij meetkundige figuren [1]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de $\triangle ABC$ met
 $AB = 10$ en $\angle A = 30^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$.
Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.



Stap 4:

Bereken de waarde van x:

$$AD + DB = 10$$

$$x\sqrt{3} + x = 10$$

$$x(1 + \sqrt{3}) = 10$$

$$x = \frac{10}{1 + \sqrt{3}}$$

Stap 5:

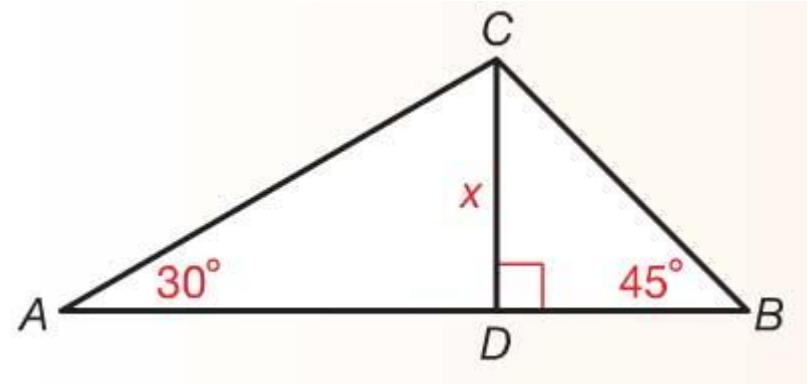
Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$:

$$Opp(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{10}{1 + \sqrt{3}} \right) = \frac{50}{1 + \sqrt{3}}$$

14.1 Vergelijkingen bij meetkundige figuren [1]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de $\triangle ABC$ met
 $AB = 10$ en $\angle A = 30^\circ$ en $\angle B = 45^\circ$.
Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.



Stap 6:

Werk de wortel uit de noemer weg:

$$\begin{aligned} \text{Opp}(\triangle ABC) &= \frac{50}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{50}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{50(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} \\ &= -25(1 - \sqrt{3}) \\ &= -25 + 25\sqrt{3} \end{aligned}$$

14.1 Vergelijkingen bij meetkundige figuren [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de $\triangle ABC$ (gelijkbenig) met $AC = BC$ en $AB = CD$. De omgeschreven cirkel Van de driehoek is getekend. De straal van deze cirkel is 6.

Bereken de lengte van AB .

$$AD = x, AB = CD = 2x, DM = 2x - 6$$

$$AD^2 + DM^2 = AM^2$$

$$x^2 + (2x - 6)^2 = 6^2$$

$$x^2 + 4x^2 - 24x + 36 = 36$$

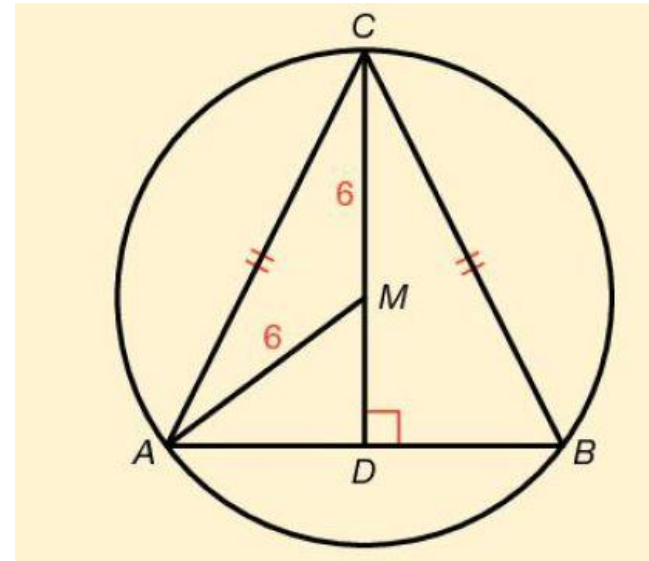
$$5x^2 - 24x = 0$$

$$x(5x - 24) = 0$$

$$x = 0 \vee 5x = 24$$

$$x = 0 \vee x = 4,8$$

$$AD = 4,8 \text{ en } AB = 9,6$$



Let op:

Je kunt verschillende lijnstukken voor x nemen.

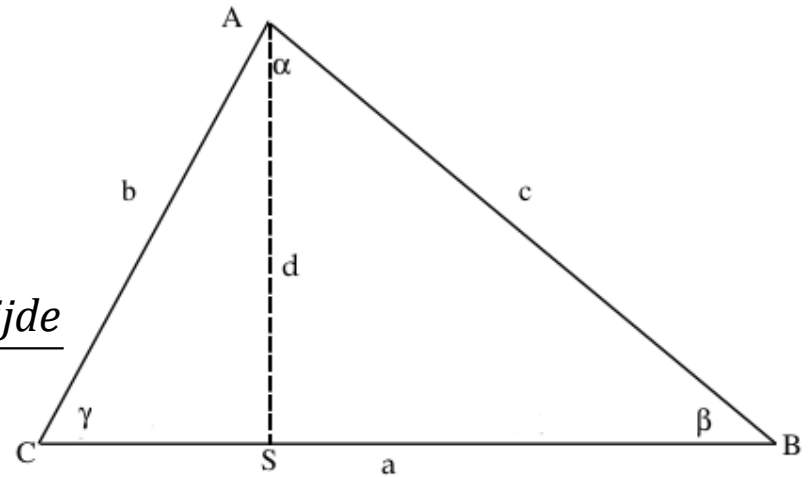
Pak steeds het lijnstuk dat zorgt voor een eenvoudige berekening.

14.1 Vergelijkingen bij meetkundige figuren [3]

Hiernaast is $\triangle ABC$ met hoogtelijn AS
Getekend.

$$\text{Opp}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AS$$

$$\begin{aligned} \text{Er geldt ook: } \sin(\angle C) &= \frac{\text{overstaande rechthoekzijde}}{\text{schuine zijde}} \\ &= \frac{AS}{AC} \\ \text{dus } AS &= AC \cdot \sin(\angle C) \end{aligned}$$



Hieruit volgt: $\text{Opp}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AS = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin(\angle C)$

Let op:

Deze formule is afhankelijk van de naamgeving van de hoekpunten van de driehoek!!!
Je hebt nu dus niet de lengte van hoogtelijn AS nodig om de oppervlakte van de driehoek te berekenen.

14.1 Vergelijkingen bij meetkundige figuren [3]

Herhaling:

$$\begin{aligned}\sin(2A) &= 2\sin(A)\cos(A) \\ \cos(2A) &= \cos^2(A) - \sin^2(A) \\ \cos(2A) &= 2\cos^2(A) - 1 \\ \cos(2A) &= 1 - 2\sin^2(A) \\ \sin^2(A) + \cos^2(A) &= 1\end{aligned}$$

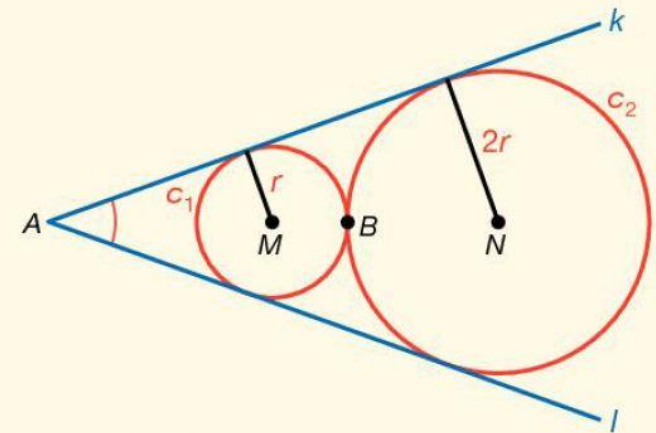
Voorbeeld:

Gegeven is de cirkel c_1 met straal r en de cirkel c_2 met straal $2r$. De cirkels raken elkaar in het punt B . De gemeenschappelijke raaklijnen k en l snijden elkaar in het punt A . Bereken exact $\sin(\angle(k, l))$

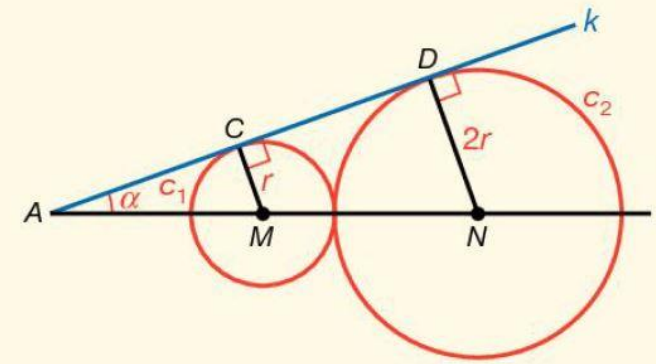
Er geldt:

$$\sin(\angle(k, l)) = \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\angle MAC) = \frac{MC}{AM}$$



figuur 14.23



14.1 Vergelijkingen bij meetkundige figuren [3]

Voorbeeld:

Stap 1:

Bereken $\sin(\alpha)$

$$AM = x$$

Vanwege de gelijkvormigheid van $\triangle AMC$ en $\triangle AND$

geldt er:
$$\frac{AM}{AN} = \frac{MC}{ND}$$

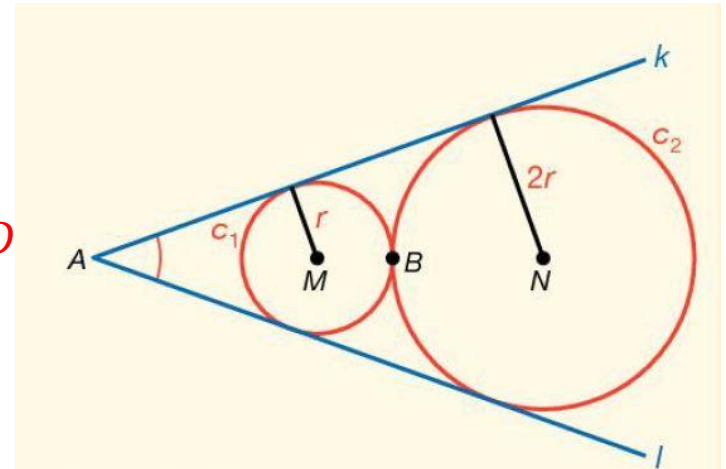
$$\frac{x}{x+3r} = \frac{r}{2r}$$

$$\frac{x}{x+3r} = \frac{1}{2}$$

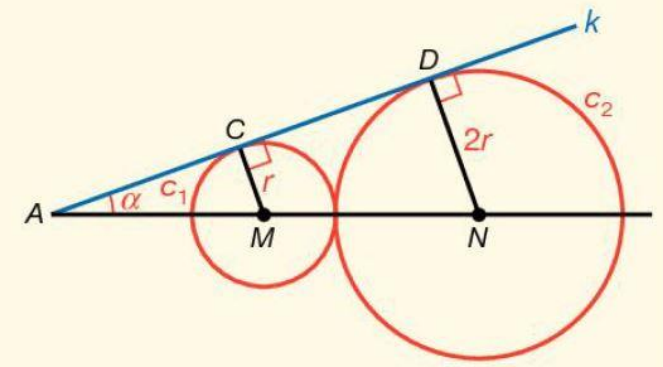
$$2x = x + 3r$$

$$x = AM = 3r$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\angle MAC) = \frac{MC}{AM} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$



figuur 14.23



14.1 Vergelijkingen bij meetkundige figuren [3]

Voorbeeld:

Stap 2:

Bereken $\cos(\alpha)$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \text{ en } \sin(\alpha) = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1$$

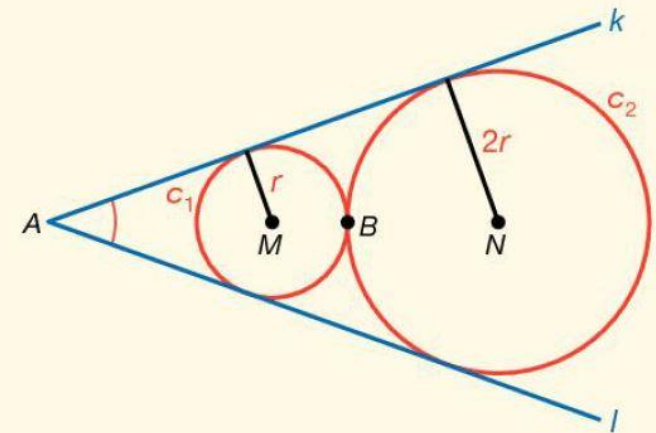
$$\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \vee \cos(\alpha) = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

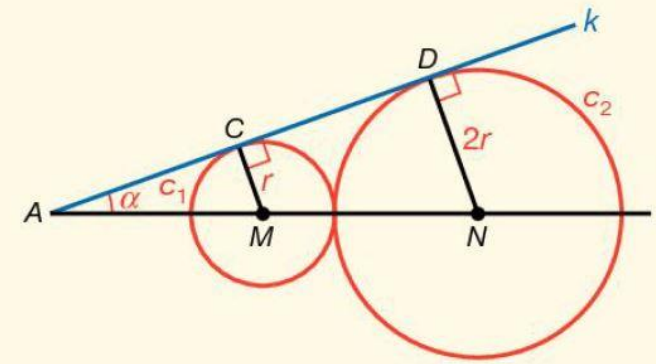
Stap 3:

Bereken de gevraagde hoek.

$$\begin{aligned} \sin(\angle(k, l)) &= \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{9}\sqrt{2} \end{aligned}$$



figuur 14.23



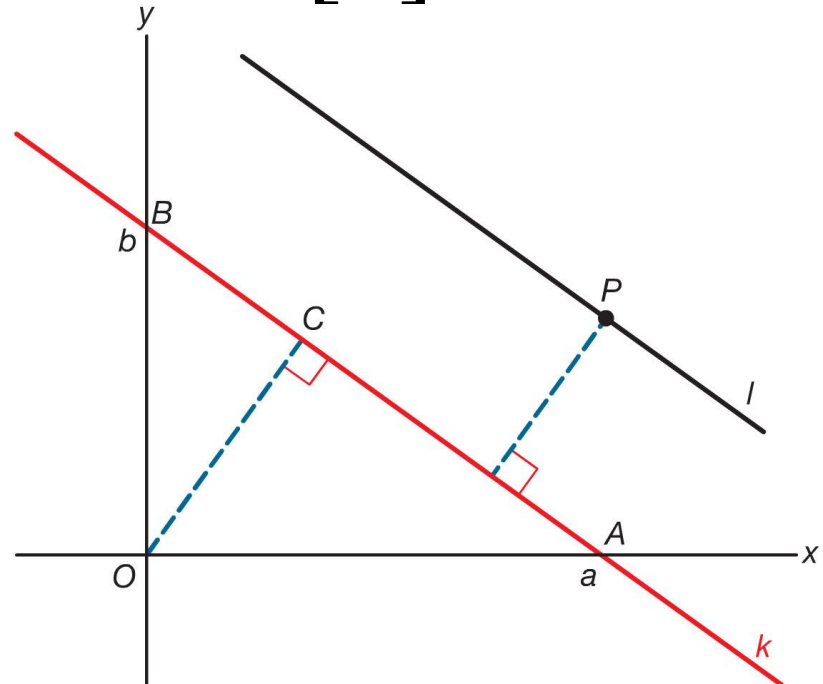
14.2 Lijnen en cirkels [1]

Hiernaast is de lijn $k : ax + by = c$ getekend.
 l is een hulplijn evenwijdig aan lijn k door
 het punt P . Dus $l : ax + by = ax_p + by_p$.

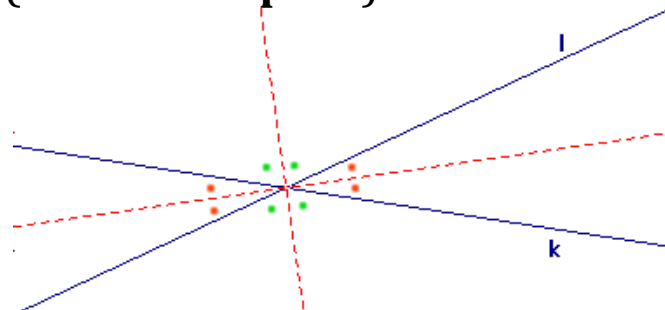
$$d(P, k) = d(l, k) = |d(O, l) - d(O, k)|$$

De afstand van punt $P(x_p, y_p)$ tot de lijn

$$k: ax + by = c \text{ is } d(P, k) = \frac{|ax_p + by_p - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Het is mogelijk om de vergelijkingen van de bissectrices van twee lijnen op te stellen.
 Let op dat een tweetal lijnen, die elkaar snijden steeds twee bissectrices hebben, die
 loodrecht op elkaar staan (**bissectricepaar**)



14.2 Lijnen en cirkels [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de driehoek ABC met $A(1, 0)$, $B(8, 4)$ en $C(4, 6)$. De bissectrice k van $\angle ACB$ snijdt de middelloodlijn l van zijde AC in het punt S . Bereken de coördinaten van S .

Stap 1:

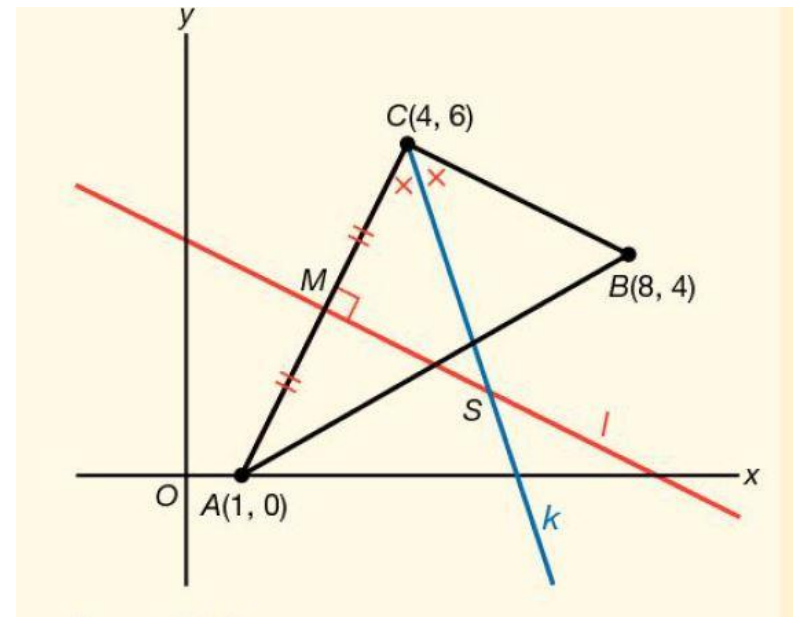
Stel de vergelijkingen op van AC en BC .

$$\vec{r}_{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en } AC: 2x - y = 2$$

$$\vec{r}_{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{en } BC: x + 2y = 16$$



14.2 Lijnen en cirkels [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de driehoek ABC met $A(1, 0)$, $B(8, 4)$ en $C(4, 6)$. De bissectrice k van $\angle ACB$ snijdt de middelloodlijn l van zijde AC in het punt S . Bereken de coördinaten van S .

Stap 2:

Stel de formule op van de lijn k .

Uit $d(P, AC) = d(P, BC)$ volgt

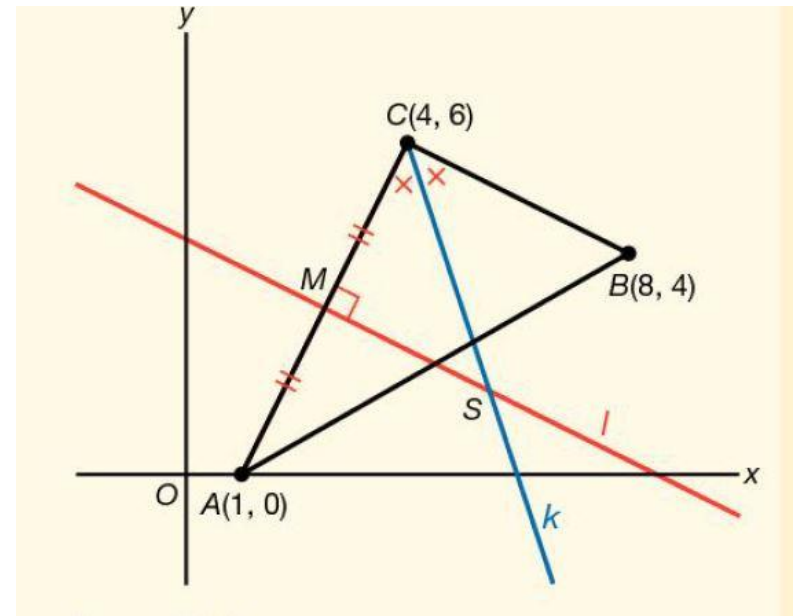
$$\frac{|2x - y - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{|x + 2y - 16|}{\sqrt{5}}$$

$$|2x - y - 2| = |x + 2y - 16|$$

$$2x - y - 2 = x + 2y - 16 \vee 2x - y - 2 = -x - 2y + 16$$

$$x - 3y = -14 \vee 3x + y = 18$$

Let op: Gebruik de rechtse uitkomst. De linkse uitkomst leidt niet tot snijpunt S .



14.2 Lijnen en cirkels [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de driehoek ABC met $A(1, 0)$, $B(8, 4)$ en $C(4, 6)$. De bissectrice k van $\angle ACB$ snijdt de middelloodlijn l van zijde AC in het punt S . Bereken de coördinaten van S .

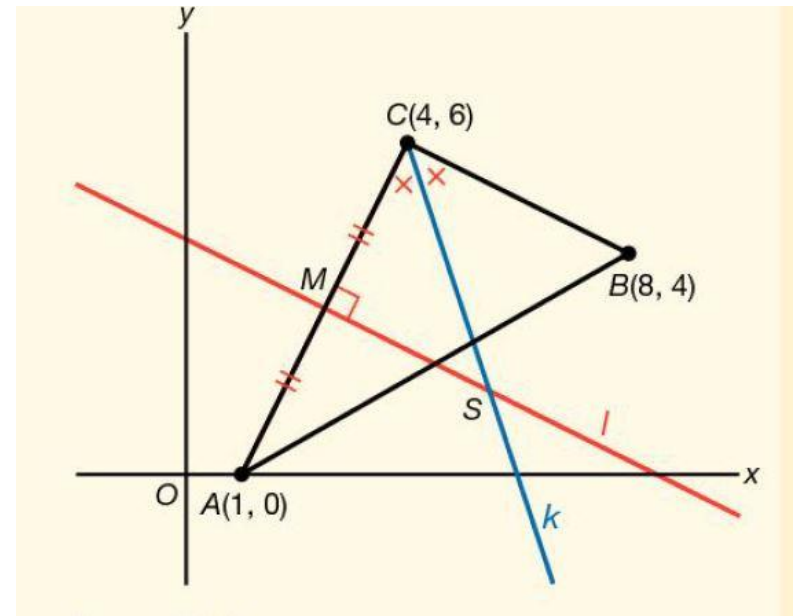
Stap 3:

Stel de formule op van de lijn l .

$$\vec{n}_l = \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt $l : x + 2y = c$

Invullen van $M(2\frac{1}{2}, 3)$ geeft $l : x + 2y = 8\frac{1}{2}$



14.2 Lijnen en cirkels [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de driehoek ABC met $A(1, 0)$, $B(8, 4)$ en $C(4, 6)$. De bissectrice k van $\angle ACB$ snijdt de middelloodlijn l van zijde AC in het punt S . Bereken de coördinaten van S .

Stap 4:

Bepaal het snijpunt S van k en l .

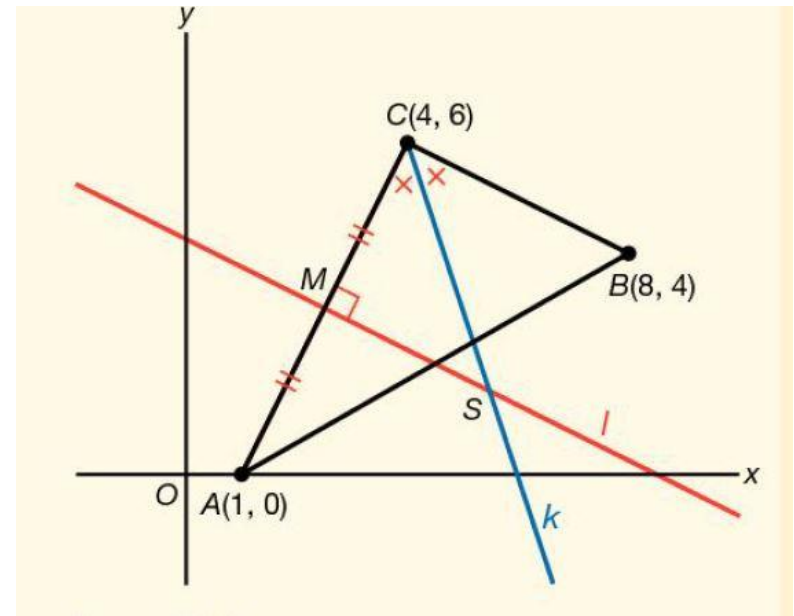
$$\begin{cases} 3x + y = 18 & |2| \\ x + 2y = 8\frac{1}{2} & |1| \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 2y = 36 \\ x + 2y = 8\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$5x = 27\frac{1}{2}$$

$$x = 5\frac{1}{2}$$

Invullen van $x = 5\frac{1}{2}$ in één van de formules geeft $y = 1\frac{1}{2}$.
 $S(5\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$



14.2 Lijnen en cirkels [2]

Algemeen:

Bij het oplossen van raakproblemen bij cirkels gebruik je de eigenschappen dat een raaklijn loodrecht staat op de cirkel naar het raaklijn EN dat de afstand van het middelpunt van de cirkel tot de raaklijn gelijk is aan de lengte van de straal.

Situatie 1:

Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is:

- een cirkel EN een punt op de cirkel waar k de cirkel raakt.

Situatie 2:

Stel een vergelijking op van de cirkel c als gegeven is:

- het middelpunt van c EN een lijn waaraan c raakt.

Situatie 3:

Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is:

- een cirkel waaraan k raakt EN de richting van k .

Situatie 4:

Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is:

- een cirkel waaraan k raakt EN een punt buiten de cirkel op k .

14.2 Lijnen en cirkels [2]

Voorbeeld:

Gegeven zijn de snijdende cirkels

$$c_1 : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5 \text{ en}$$

$$c_2 : (x - 6)^2 + y^2 = 20$$

De lijnen k_1 en k_2 zijn de gemeenschappelijke richtlijnen van de cirkels.

Stel van k_1 en van k_2 een vergelijking op.

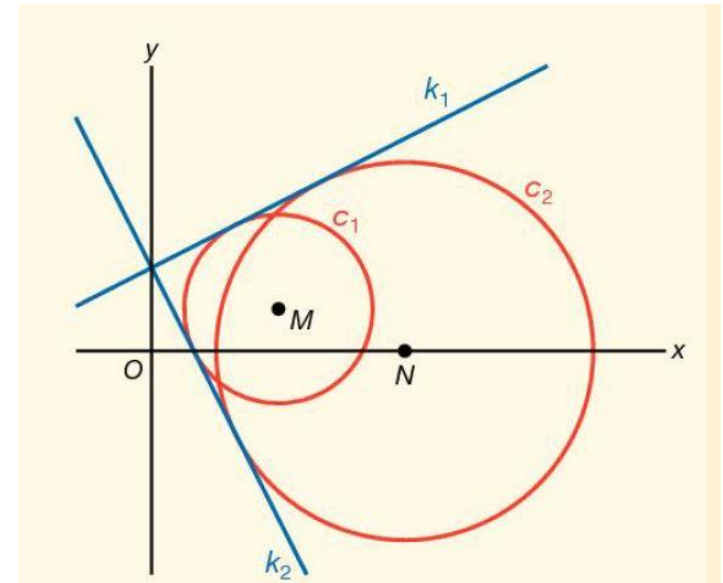
Stap 1:

Geef aan met welke cirkels je te maken hebt.

c_1 heeft middelpunt $M(3, 1)$ en straal $\sqrt{5}$

c_2 heeft middelpunt $N(6, 0)$ en straal $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Voor de lijn k geldt: $k: y = ax + b \Leftrightarrow k: ax - y + b = 0$



14.2 Lijnen en cirkels [2]

Voorbeeld:

Gegeven zijn de snijdende cirkels

$$c_1 : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5 \text{ en}$$

$$c_2 : (x - 6)^2 + y^2 = 20$$

De lijnen k_1 en k_2 zijn de gemeenschappelijke richtlijnen van de cirkels.

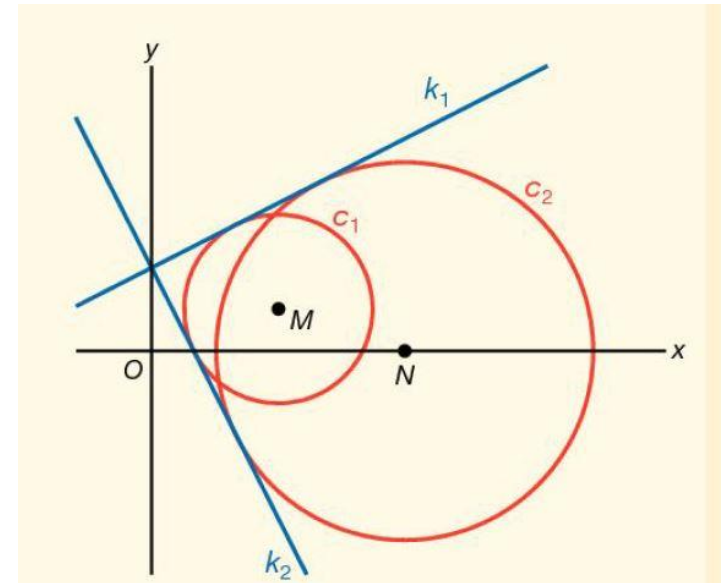
Stel van k_1 en van k_2 een vergelijking op.

Stap 2:

Stel twee vergelijkingen op met a en b .

$$d(M, k) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|3a - 1 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |3a - 1 + b| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

$$d(N, k) = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|6a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |6a + b| = 2\sqrt{5a^2 + 5}$$



14.2 Lijnen en cirkels [2]

Voorbeeld:

Gegeven zijn de snijdende cirkels

$$c_1 : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5 \text{ en}$$

$$c_2 : (x - 6)^2 + y^2 = 20$$

De lijnen k_1 en k_2 zijn de gemeenschappelijke richtlijnen van de cirkels.

Stel van k_1 en van k_2 een vergelijking op.

Stap 3:

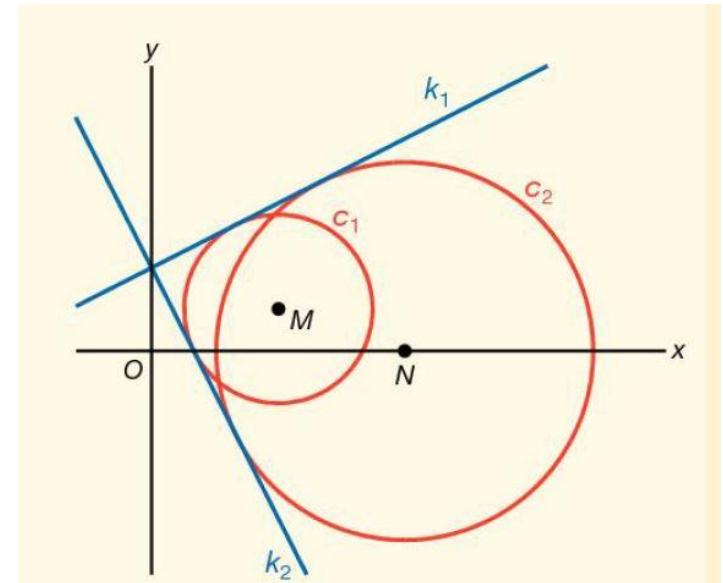
Stel een uitdrukking op voor b .

$$|3a - 1 + b| = \frac{1}{2}|6a + b|$$

$$3a - 1 + b = 3a + \frac{1}{2}b \vee 3a - 1 + b = -3a - \frac{1}{2}b$$

$$\frac{1}{2}b = 1 \vee 6a + 1\frac{1}{2}b = 1$$

$$b = 2 \vee b = -4a + \frac{2}{3}$$



14.2 Lijnen en cirkels [2]

Voorbeeld:

Stap 4:

Stel een uitdrukking op voor a .

$$|3a - 1 + b| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

$$|3a + 1| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

$$9a^2 + 6a + 1 = 5a^2 + 5$$

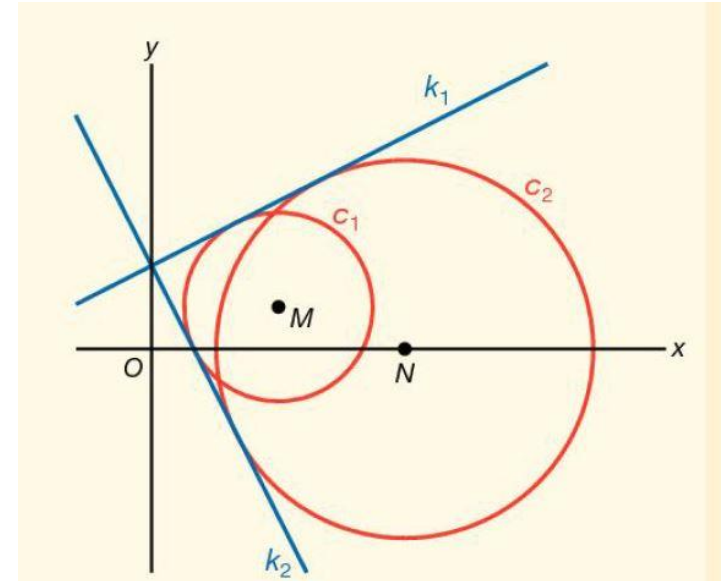
$$4a^2 + 6a - 4 = 0$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$a = \frac{-3-5}{4} = -2 \vee a = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

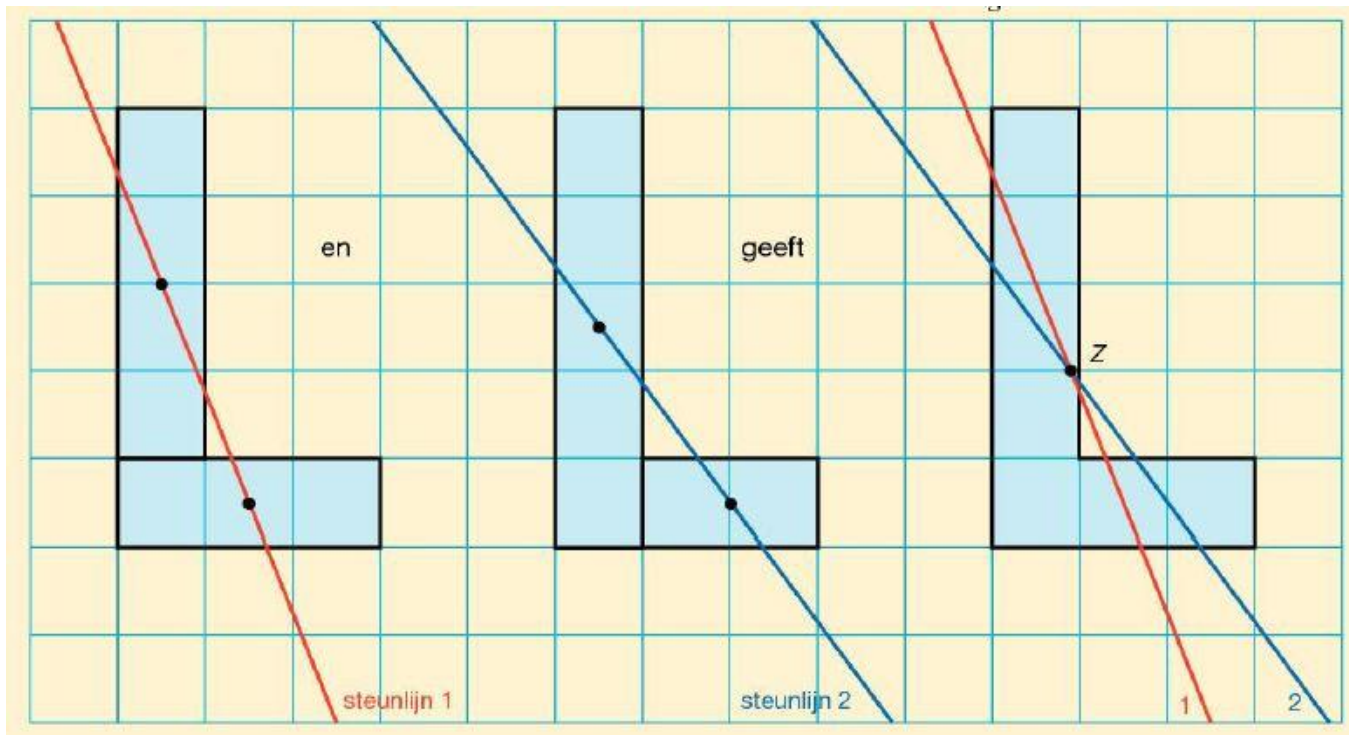
Hieruit volgen: $k_1: y = -2x + 2$ en $k_2: y = \frac{1}{2}x + 2$



14.3 Zwaartepunten [1]

Het zwaartepunt van een massieve homogene vorm kan als volgt bepaald worden:

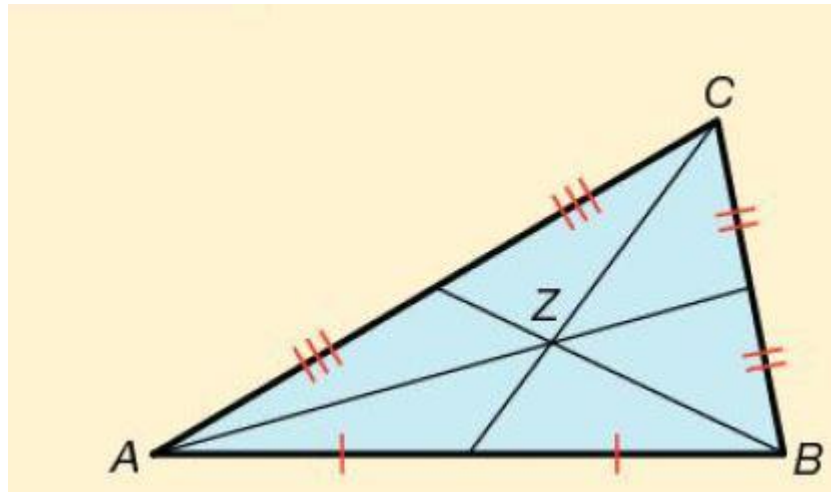
1. Verdeel de vorm in twee figuren waarvan je de zwaartepunten kunt bepalen;
2. Teken de steunlijn door de beide zwaartepunten;
3. Verdeel de vorm in twee andere figuren, bepaal het zwaartepunt en teken de steunlijn.
4. Het snijpunt van beide steunlijnen is het zwaartepunt van de vorm.



14.3 Zwaartepunten [1]

Een figuur die je kunt gebruiken is de driehoek.

In een driehoek bepaal je het zwaartepunt met behulp van zwaartelijnen.
Een zwaartelijns is een lijn door een hoekpunt die de tegenoverliggende zijde loodrecht snijdt.



14.3 Zwaartepunten [2]

Hefboomwet:

Er is ten opzichte van het zwaartepunt evenwicht van momenten en daaruit volgt $m_1 \cdot x = m_2 \cdot y$.

Voorbeeld 1:

Bereken de plaats van het zwaartepunt Z.

$$AZ = x$$

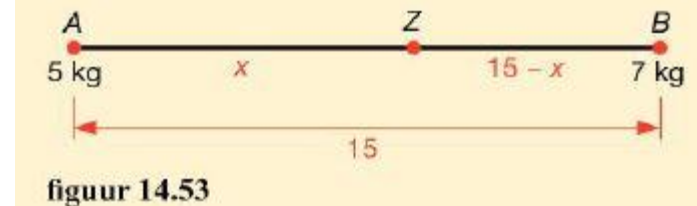
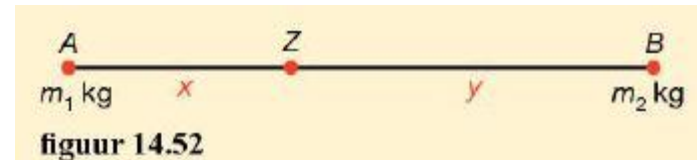
$$BZ = 15 - x$$

$$5 \cdot x = 7 \cdot (15 - x)$$

$$5x = 105 - 7x$$

$$12x = 105$$

$$x = 8,75$$



14.3 Zwaartepunten [2]

Voorbeeld 2:

Bereken de plaats van het zwaartepunt Z.

$$AZ = z - 10$$

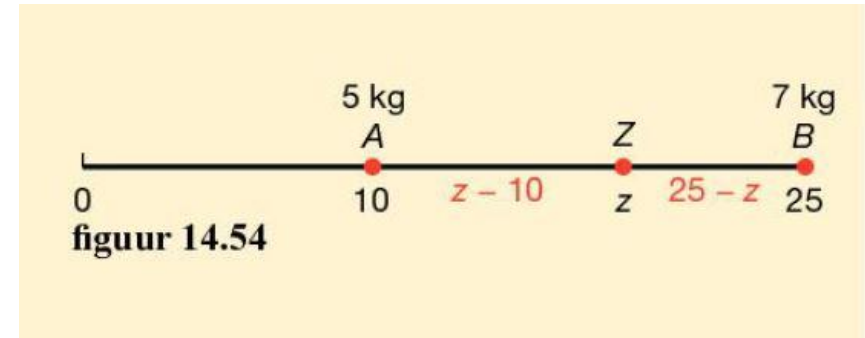
$$BZ = 25 - z$$

$$5 \cdot (z - 10) = 7 \cdot (25 - z)$$

$$5z - 50 = 175 - 7z$$

$$12z = 225$$

$$z = 18,75$$



Momentenstelling:

De plaats van het zwaartepunt van de massa's $m_1, m_2, \dots, m_n$ op de getallenlijn met de afstanden $a_1, a_2, \dots, a_n$ tot 0 is te berekenen met

$$z = \frac{1}{M} (m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2 + \dots + m_n \cdot a_n)$$

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

Een massieve homogene massa kun je opvatten als een puntmassa in het zwaartepunt.

14.3 Zwaartepunten [2]

Voorbeeld 3:

Bereken de plaats van het zwaartepunt Z.

De vorm is opgebouwd uit massieve homogene vierkanten.

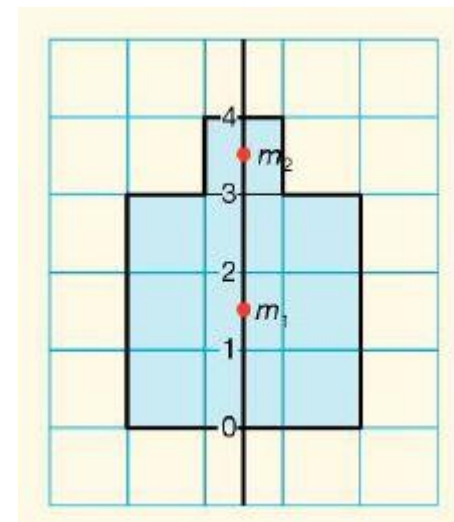
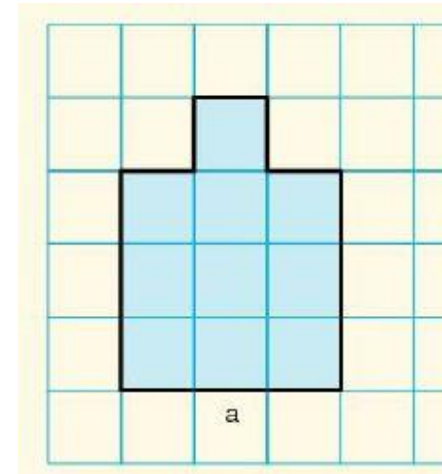
Het zwaartepunt ligt op de symmetrieas.

Voor massa m_1 geldt: $m_1 = 3 \cdot 3 = 9$.

Voor massa m_2 geldt: $m_2 = 1 \cdot 1 = 1$

$$z = \frac{1}{9+1} (9 \cdot 1\frac{1}{2} + 1 \cdot 3\frac{1}{2}) = \frac{1}{10} \cdot 17 = 1,7$$

Het zwaartepunt ligt 1,7 boven 0.



14.3 Zwaartepunten [2]

Voorbeeld 4:

Bereken de plaats van het zwaartepunt Z.

De vorm is opgebouwd uit twee keer vier even zware puntmassa's die op de hoekpunten van vierkanten liggen.

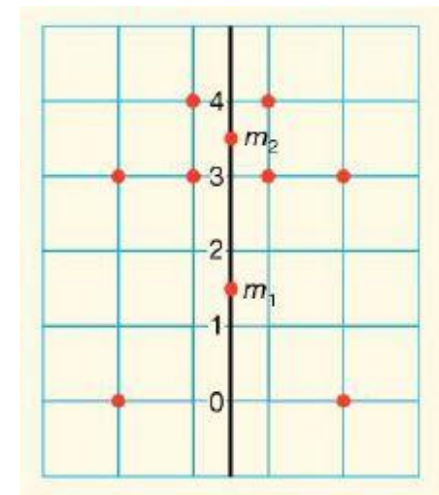
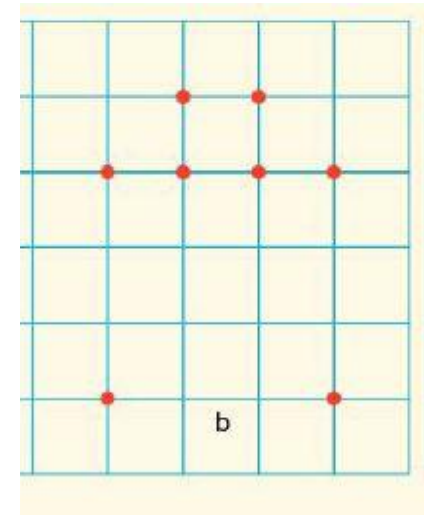
Het zwaartepunt ligt op de symmetrieas.

Voor massa m_1 geldt: $m_1 = 4 \cdot 1 = 4$.

Voor massa m_2 geldt: $m_2 = 4 \cdot 1 = 4$

$$z = \frac{1}{4 + 4} (4 \cdot 1\frac{1}{2} + 4 \cdot 3\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} \cdot 20 = 2,5$$

Het zwaartepunt ligt 2,5 boven 0.



14.3 Zwaartepunten [3]

Momentenstelling (met vectoren):

De plaats van het zwaartepunt Z van de massa's $m_1, m_2, \dots, m_n$ in de punten

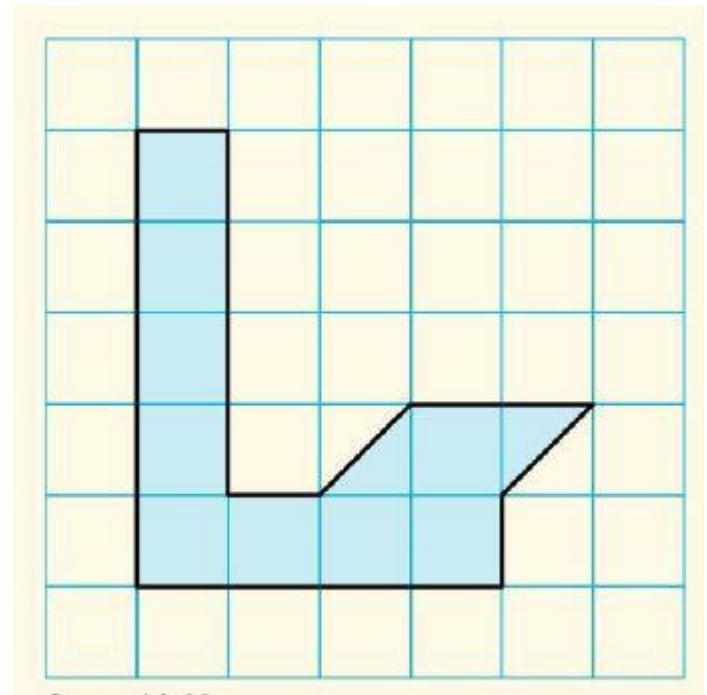
$$A_1, A_2, \dots, A_n \text{ geldt: } \vec{z} = \frac{1}{M} (m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{a}_n)$$

met $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$

Voorbeeld:

Gegeven is een massieve, homogene vorm.

Teken de plaats van het zwaartepunt met behulp van vectoren.



14.3 Zwaartepunten [3]

Voorbeeld:

Gegeven is een massieve, homogene vorm.

Teken de plaats van het zwaartepunt met behulp van vectoren.

Stap 1:

Split de vorm op in een aantal stukken en teken een assenstelsel.

Stap 2:

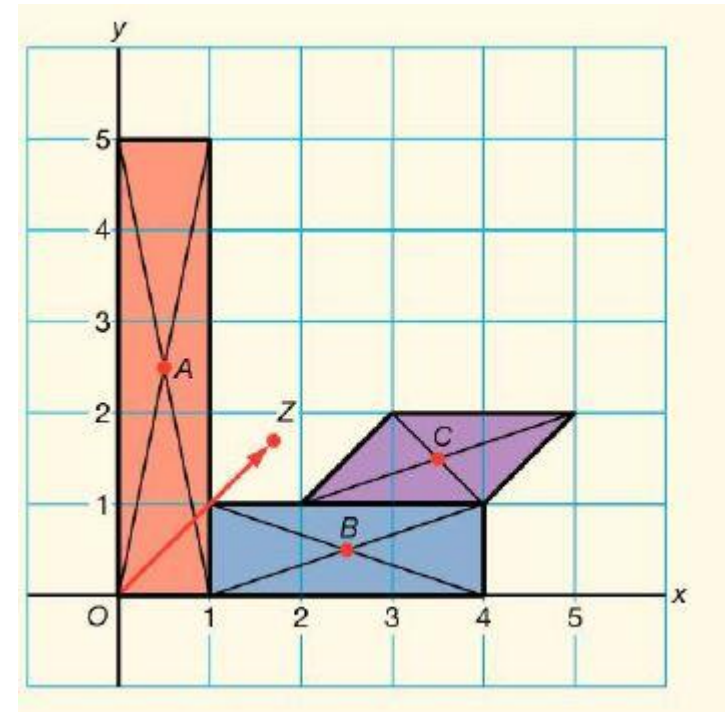
Bepaal de massa's

A heeft massa 5.

B heeft massa 3.

C heeft massa 2.

De totale massa is $5 + 3 + 2 = 10$



14.3 Zwaartepunten [3]

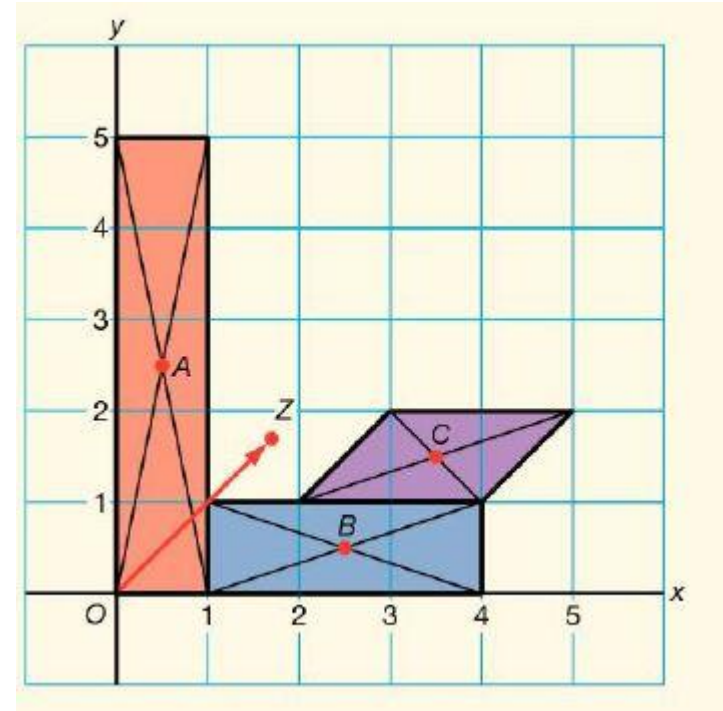
Voorbeeld:

Gegeven is een massieve, homogene vorm.

Teken de plaats van het zwaartepunt met behulp van vectoren.

Stap 3:

Bepaal de plaats van het zwaartepunt.



$$\begin{aligned}\vec{z} &= \frac{1}{10} (5 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}) = \frac{1}{10} \left(5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{10} \left(\begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 12\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1,7 \\ 1,7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

14.4 Bewegingsvergelijkingen onderzoeken [1]

In het plaatje hiernaast is de vector $\vec{r}(t)$ getekend, die vanuit O het punt P aanwijst. Dit is de plaatsvector van P .

Bij de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

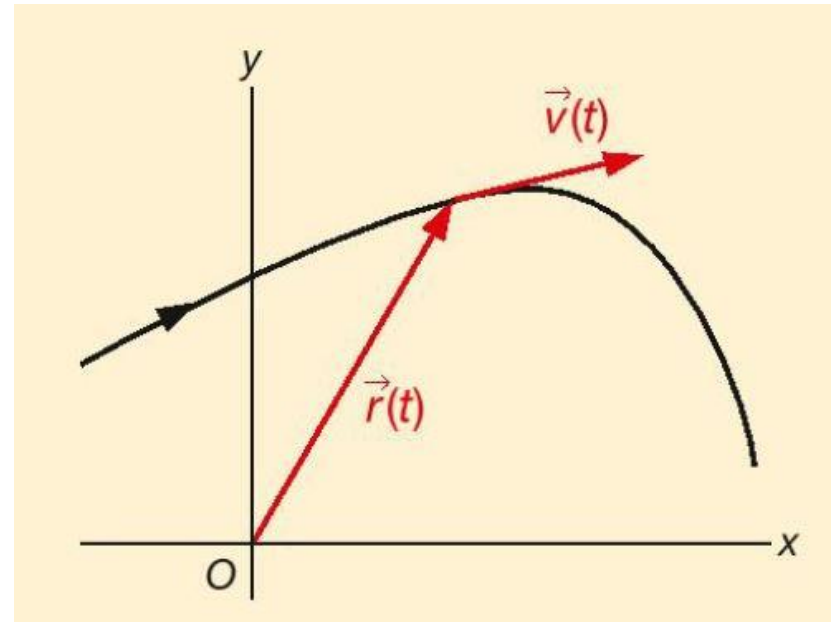
van een punt P hoort de **snelheidsvector**

$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. De snelheidsvector is een

richtingsvector van de raaklijn aan de baan op het tijdstip t .

De lengte van de snelheidsvector is de baansnelheid van P op het tijdstip t .

De baansnelheid van P is te berekenen met: $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$



14.4 Bewegingsvergelijkingen onderzoeken [1]

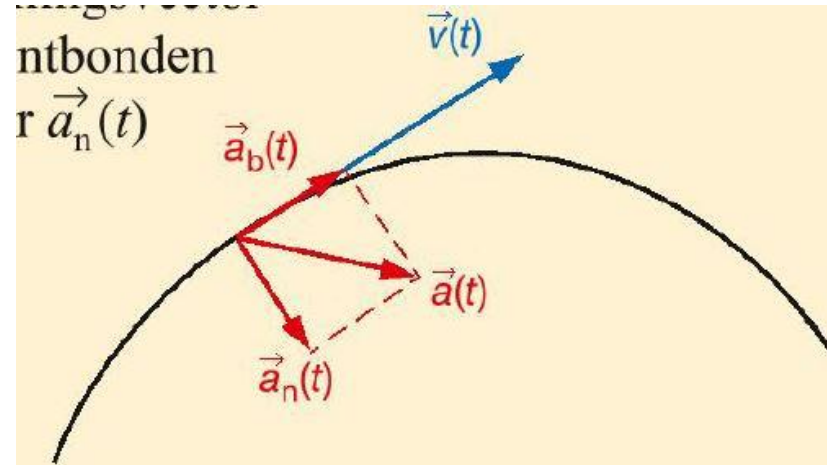
In het plaatje hiernaast zijn de snelheidsvector $\vec{v}(t)$ en de versnellingsvector $\vec{a}(t)$ op tijdstip t getekend. De lengte van de vector $\vec{a}_n(t)$ heeft te maken met de kromming van de baan. De lengte van de vector $\vec{a}_b(t)$ geeft de grootte van de baanversnelling van punt P .

Bij de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

van een punt P hoort de **snelheidsvector** $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

en de versnellingsvector $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$

en de baanversnelling $a_b(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|}$



14.4 Bewegingsvergelijkingen onderzoeken [1]

Voorbeeld 1:

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2t \end{cases}$$

Druk de baanversnelling $a_b(t)$ uit in t .

Er geldt: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ \frac{1}{4}t^4 - 2t \end{pmatrix}$ en $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^3 - 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$

$$a_b(t) = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{\begin{pmatrix} 2t \\ t^3 - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(2t)^2 + (t^3 - 2)^2}} = \frac{3t^5 - 6t^2 + 4t}{\sqrt{4t^2 + t^6 - 4t^3 + 4}}$$

14.4 Bewegingsvergelijkingen onderzoeken [1]

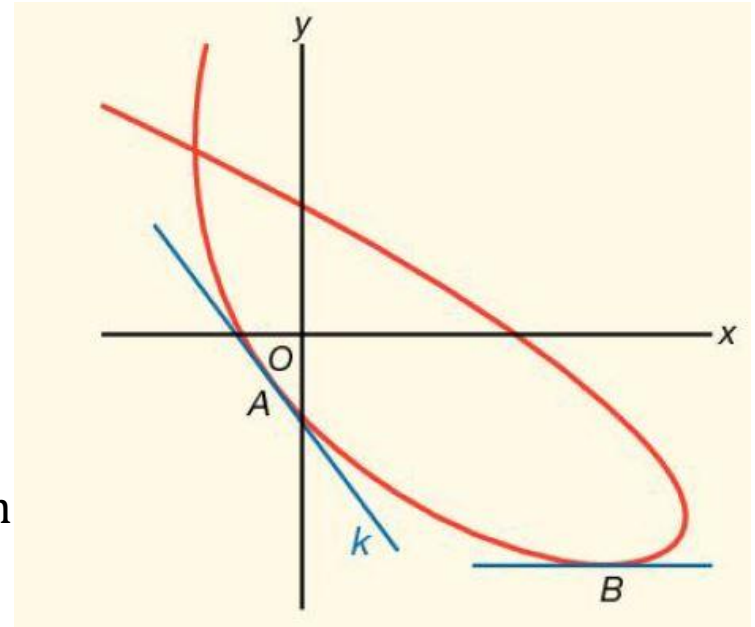
Voorbeeld 2:

De baan van het punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 \\ y(t) = t^2 - 4t - 1 \end{cases}$$

Bij punt A geldt $t = 4$.

Stel een vergelijking op van de lijn k die de baan raakt in A .



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 \\ t^2 - 4t - 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 6t + 5 \\ 2t - 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(4) = \begin{pmatrix} 4^2 - 6 \cdot 4 + 5 \\ 2 \cdot 4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

14.4 Bewegingsvergelijkingen onderzoeken [1]

Voorbeeld 2:

De baan van het punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 \\ y(t) = t^2 - 4t - 1 \end{cases}$$

Bij punt A geldt $t = 4$.

Stel een vergelijking op van de lijn k die de baan raakt in A .

$$k: 4x + 3y = c$$

$t = 4$ geeft het punt $(-\frac{2}{3}, -1)$

Dit invullen geeft $c = -\frac{5}{3}$

Hieruit volgt: $k: 4x + 3y = -\frac{5}{3}$

