

15.0 Voorkennis

Herhaling rekenregels voor differentiëren:

$$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

(somregel)

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(productregel)

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \Rightarrow q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

(quotiëntregel)

$$f(x) = u(v(x)) \text{ geeft } f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

(kettingregel)

$$f(x) = e^x \text{ geeft } f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \text{ geeft } f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = {}^g\log(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$$

15.0 Voorkennis

Herhaling rekenregels voor differentiëren:

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$g(x) = \cos(x) \Rightarrow g'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Voorbeeld 1:

$$f(x) = 4^{2x-1} = 4^u \text{ met } u = 2x - 1$$

$$f'(x) = 4^u \cdot \ln(4) \cdot u' = 4^u \cdot \ln(4) \cdot 2 = 2 \cdot 4^{2x-1} \cdot \ln(4)$$

Voorbeeld 2:

$$g(x) = x^2 \cdot 2^x$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= [x^2]' \cdot 2^x + x^2 \cdot [2^x]' \\ &= 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2) \\ &= 2^x (2x + \ln(2) \cdot x^2) \end{aligned}$$

15.0 Voorkennis

Voorbeeld 3:

$$f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot [\ln(x) + 1]' - [x]' \cdot (\ln(x) + 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln(x) - 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x) - 1}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$$

Voorbeeld 4:

$$g(x) = {}^3\log(x^2 + 1) = {}^3\log(u) \text{ met } u = x^2 + 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{u \cdot \ln(3)} \cdot u' = \frac{2x}{(x^2 + 1)\ln(3)}$$

15.0 Voorkennis

Voorbeeld 5:

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 120x + 150$.

Bereken algebraïsch de extreme waarden van f .

Stap 1:

Bereken de afgeleide van de gegeven functie.

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 120$$

Stap 2:

Los algebraïsch op: $f'(x) = 0$

$$12x^2 - 18x - 120 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 20 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -20 = 169$$

$$x = \frac{3-13}{4} = 2\frac{1}{2} \vee x = \frac{3+13}{4} = 4$$

15.0 Voorkennis

Voorbeeld 5:

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 120x + 150$.

Bereken algebraïsch de extreme waarden van f .

Stap 3:

Plot de grafiek op je GR en **maak een schets**.

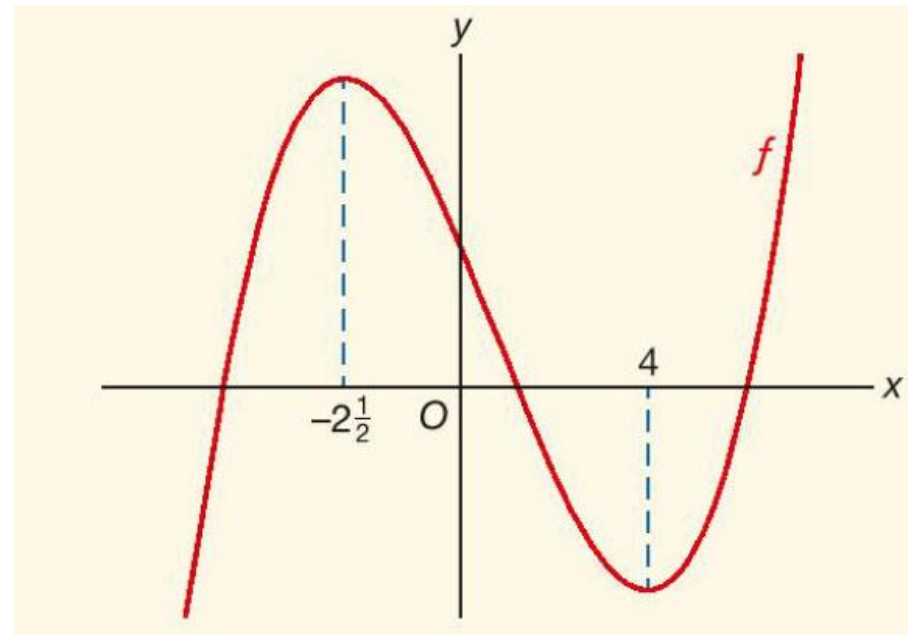
Controleer of je met een maximum of een minimum te doen hebt.

Stap 4:

Bereken de extreme waarden:

Maximum is $f(-2\frac{1}{2}) = 331\frac{1}{4}$

Minimum is $f(4) = -218$



15.0 Voorkennis

Voorbeeld 6:

Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 + 7x - 6$$

Stap 1:

Bereken de eerste en tweede afgeleide van $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + 7 \quad \text{EN} \quad f''(x) = x^2 - 6x + 9$$

Stap 2:

Los de vergelijking $f''(x) = 0$ op

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

15.0 Voorkennis

Voorbeeld 6:

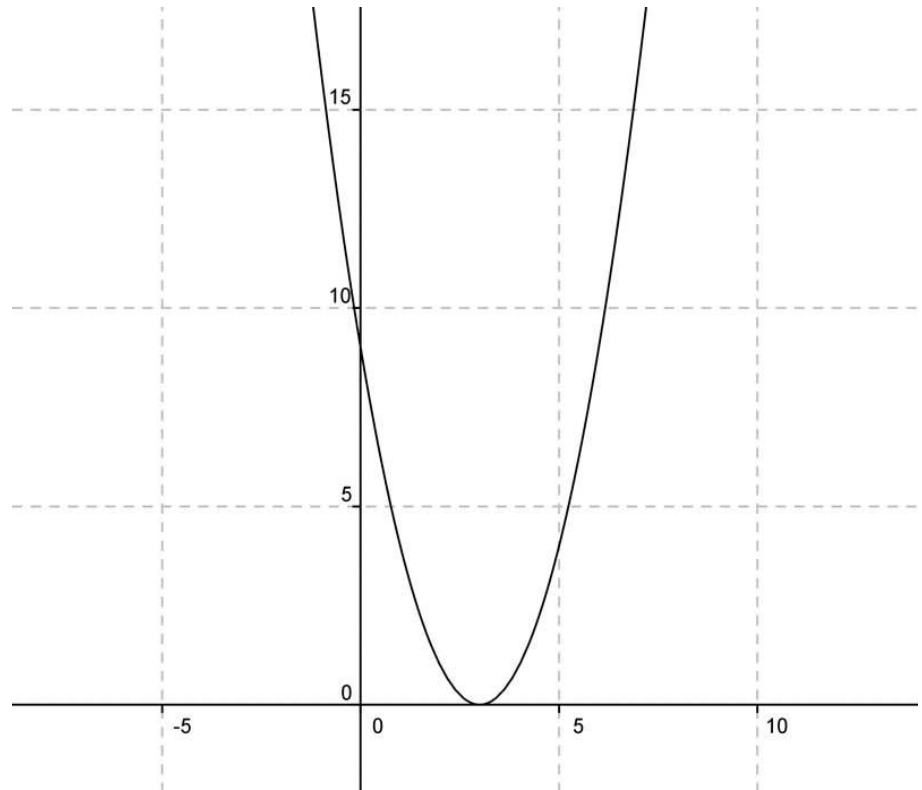
Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 + 7x - 6$$

Stap 3:

Maak met behulp van de GR **een schets van de tweede afgeleide**.

In het punt $x = 3$ verwisselt de tweede afgeleide niet van teken.
De oorspronkelijke functie heeft hier dus GEEN buigpunt.



15.0 Voorkennis

Let op:

Primitiveren (of integreren) is dus het omgekeerde van differentiëren.

Met behulp van het bovenstaande is te controleren dat de onderstaande primitieven kloppen.

$$f(x) = ax^n \Rightarrow F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c \text{ met } n \neq -1$$

$$f(x) = g^x \Rightarrow F(x) = \frac{g^x}{\ln(g)} + c$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln|x| + c$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow F(x) = x \ln(x) - x + c$$

$$f(x) = {}^g \log(x) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(g)} (x \ln(x) - x) + c$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x) + c$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x) + c$$

15.0 Voorkennis

Voorbeeld 7:

Bereken de afgeleide van de functie $F(x) = (2x - 1)^3$

$$F(x) = (2x - 1)^3 = u^3 \text{ met } 2x - 1$$

$$F'(x) = 3u^2 \cdot u' = 3(2x - 1)^2 \cdot 2 = 3 \cdot 2(2x - 1)^2 = 6(2x - 1)^2$$

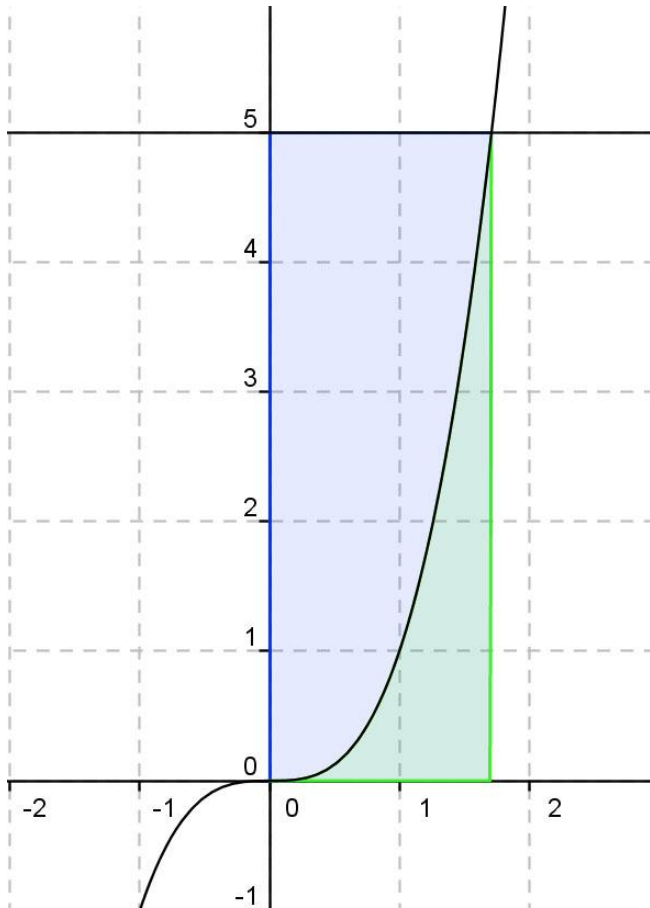
Hieruit volgt dat de primitieve van $6(2x - 1)^2$ gelijk is aan $(2x - 1)^3 + C$

“Kettingregel voor primitiveren”:

De primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\frac{1}{a}F(ax + b) + c$

Je berekent de primitieve dus op de “normale” manier en vermenigvuldigd de uitkomst dan met $1/a$.

15.0 Voorkennis



Voorbeeld 8:

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek $f(x) = x^3$, de y -as en de lijn $y = 5$. Bereken exact de oppervlakte van V (het blauwe gebied)

Stap 1:

Bereken exact het snijpunt van de grafiek van $f(x)$ en de lijn $y = 5$.

$$x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$$

15.0 Voorkennis

Stap 2:

$$O(V) = O(\text{onder grafiek } y = 5) - O(\text{onder grafiek } f(x))$$

$$O(\text{onder grafiek } y = 5) =$$

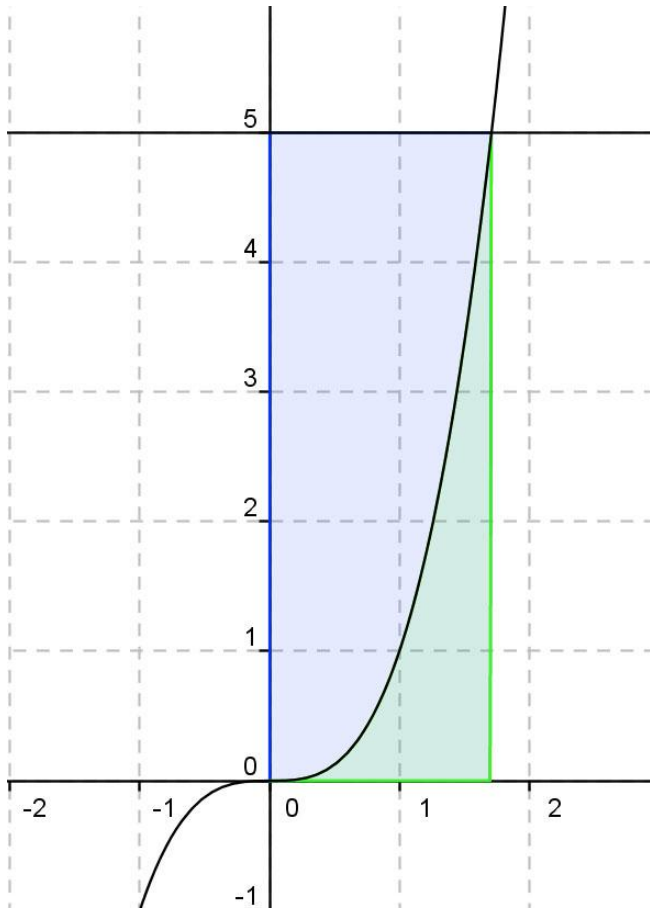
$$\int_0^{\sqrt[3]{5}} 5dx = [5x]_0^{\sqrt[3]{5}} = 5 \cdot \sqrt[3]{5} - 5 \cdot 0 = 5 \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$O(\text{onder grafiek } f(x)) =$$

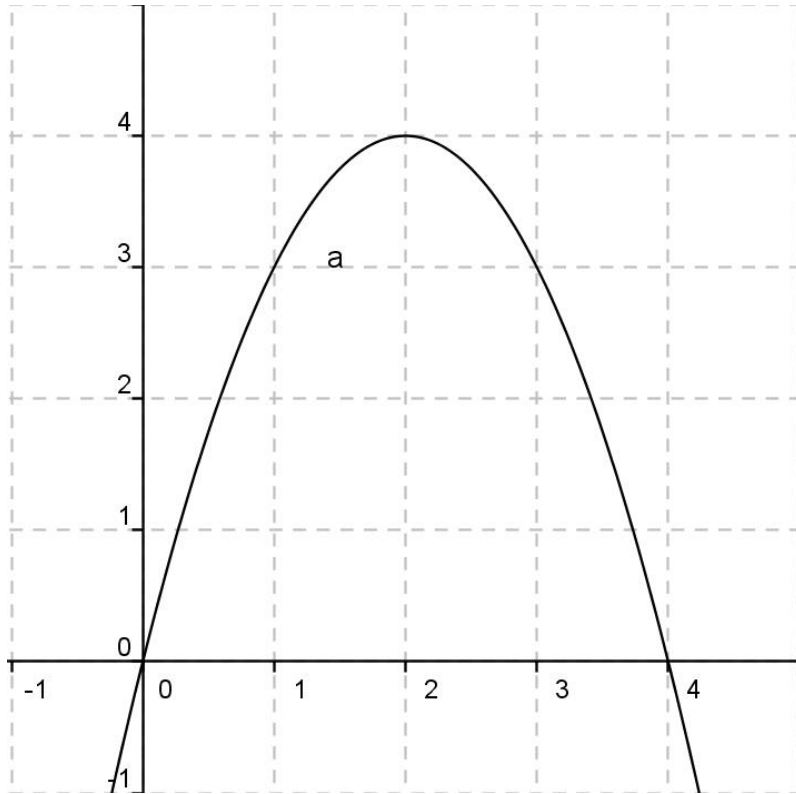
$$\int_0^{\sqrt[3]{5}} f(x)dx = \int_0^{\sqrt[3]{5}} x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^{\sqrt[3]{5}} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt[3]{5} \right)^4 - 0 = \frac{1}{4} \cdot \left(5^{\frac{1}{3}} \right)^4 = \frac{1}{4} \cdot 5^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$O(V) = 5 \cdot \sqrt[3]{5} - 1\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{5} = 3\frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{5}$$



15.0 Voorkennis



Voorbeeld 9:

Bereken de inhoud van het **Omwentelingslichaam** L dat ontstaat als het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek $f(x) = 4x - x^2$ en de x -as om deze x -as gewenteld wordt.

Stap 1:

Bereken de snijpunten van $f(x)$ en de x -as.

$$f(x) = 0$$

$$4x - x^2 = 0$$

$$x(4-x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

15.0 Voorkennis

Voorbeeld 9:

Stap 2:

Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam met :

$$I(L) = \int_0^4 \pi(f(x))^2 dx = \int_0^4 \pi(4x - x^2)^2 dx =$$

$$\int_0^4 \pi(16x^2 - 8x^3 + x^4) dx =$$

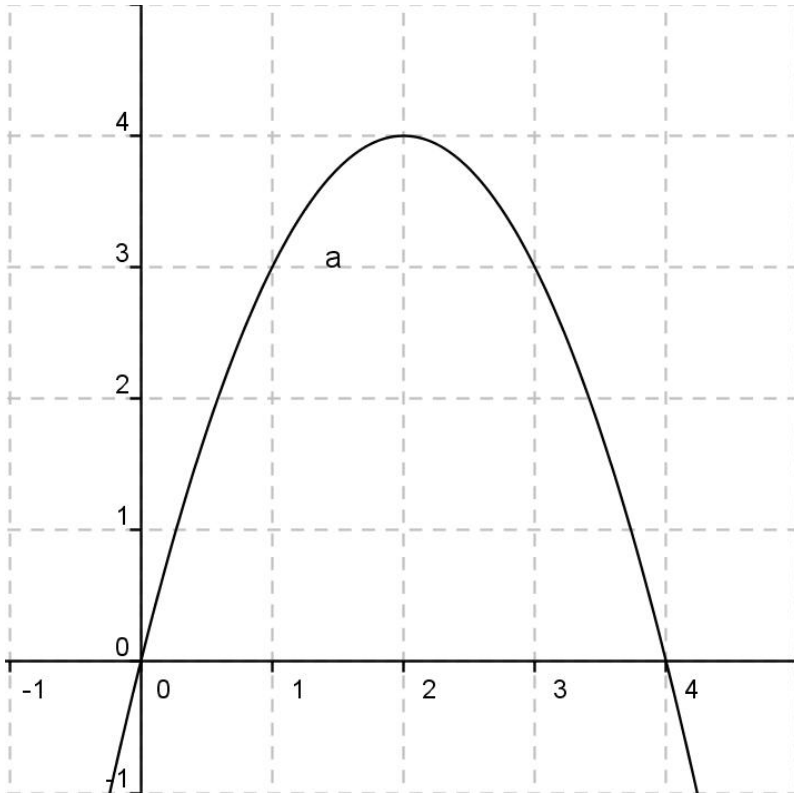
$$\pi \left[\frac{16}{3} x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^4 =$$

$$\pi \left(\frac{16}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^4 + \frac{1}{5} \cdot 4^5 \right) =$$

$$\pi \left(341 \frac{1}{3} - 512 + 204 \frac{4}{5} \right) =$$

$$\pi \left(-170 \frac{2}{3} + 204 \frac{4}{5} \right) =$$

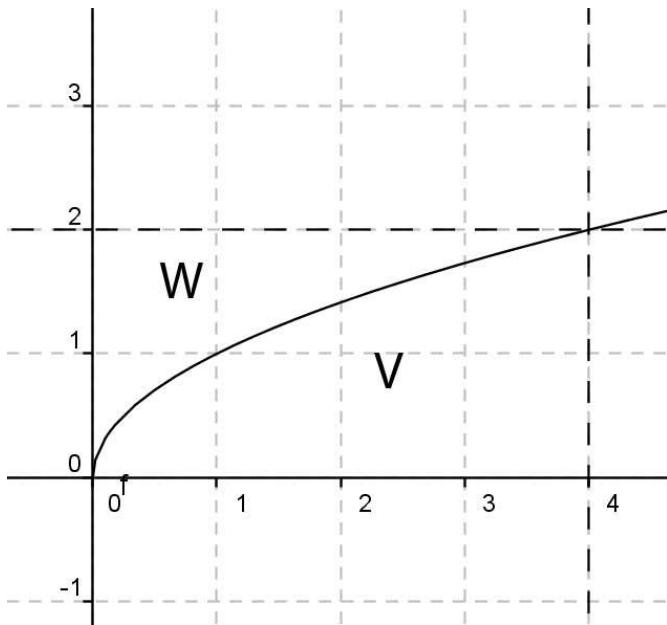
$$\pi \left(-170 \frac{10}{15} + 204 \frac{20}{25} \right) = 34 \frac{2}{15} \pi$$



15.0 Voorkennis

Voorbeeld 10:

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$, de x -as en de lijn $x = 4$. Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y -as



Stap 1: Bereken de inhoud van de cilinder met straal 4 en hoogte 2:

$$I(\text{Cilinder}) = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi$$

Stap 2: Bereken de inhoud van het lichaam M dat Ontstaat als W om de y -as gewenteld wordt:

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_0^{f(4)} \pi x^2 dy = \int_0^2 \pi y^4 dy = \\ &= \left[\frac{1}{5} \pi y^5 \right]_0^2 = \left(\frac{32}{5} \pi - 0 \right) = \frac{32}{5} \pi \end{aligned}$$

Stap 3: Bereken de inhoud van lichaam L

$$I(L) = I(\text{Cilinder}) - I(M) = 32\pi - \frac{32}{5} \pi = 25\frac{3}{5} \pi$$

15.1 Hellingen, buigpunten en toppen [1]

toenemend stijgend	afnemend stijgend	toenemend dalend	afnemend dalend
			
			
			
$f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$	$f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$	$f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$	$f'(x) < 0 \wedge f''(x) > 0$

Een andere notatie voor de tweede afgeleide van $f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$

15.1 Hellingen, buigpunten en toppen [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $N(t) = 100(1 - e^{-0,02t}) = 100 - 100e^{-0,02t}$

Toon algebraïsch aan dat N een afnemend stijgende functie van t is.

Stap 1:

Bereken de eerste en tweede afgeleide van $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = -100 \cdot -0,02 \cdot e^{-0,02t} = 2e^{-0,02t}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dN}{dt} \right) = 2 \cdot -0,02 \cdot e^{-0,02t} = -0,04e^{-0,02t}$$

Stap 2:

$$\frac{dN}{dt} = 2e^{-0,02t} > 0$$

De eerste afgeleide is altijd groter dan nul.
 $N(t)$ is dus een stijgende functie.

15.1 Hellingen, buigpunten en toppen [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $N(t) = 100(1 - e^{-0,02t}) = 100 - 100e^{-0,02t}$

Toon algebraïsch aan dat N een afnemend stijgende functie van t is

Stap 2:

$$\frac{dN}{dt} = 2e^{-0,02t} > 0$$

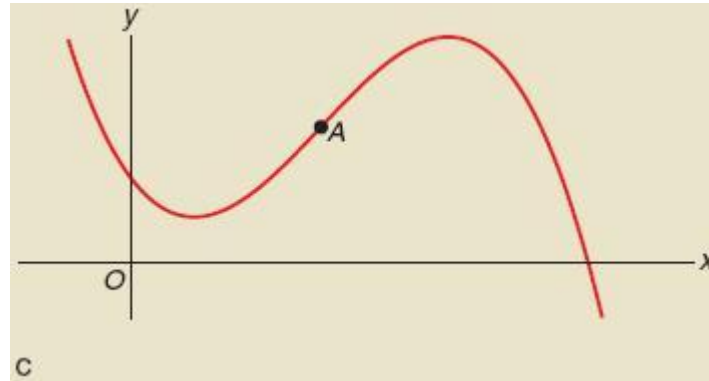
De eerste afgeleide is altijd groter dan nul.
 $N(t)$ is dus een stijgende functie.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dN}{dt} \right) = -0,04e^{-0,02t} < 0$$

De tweede afgeleide is altijd kleiner dan nul.
 $N'(t)$ is dus een dalende functie

De eerste afgeleide is dus altijd groter dan nul, maar het is wel een dalende functie. Hieruit volgt dat $N(t)$ een afnemend stijgende functie is.

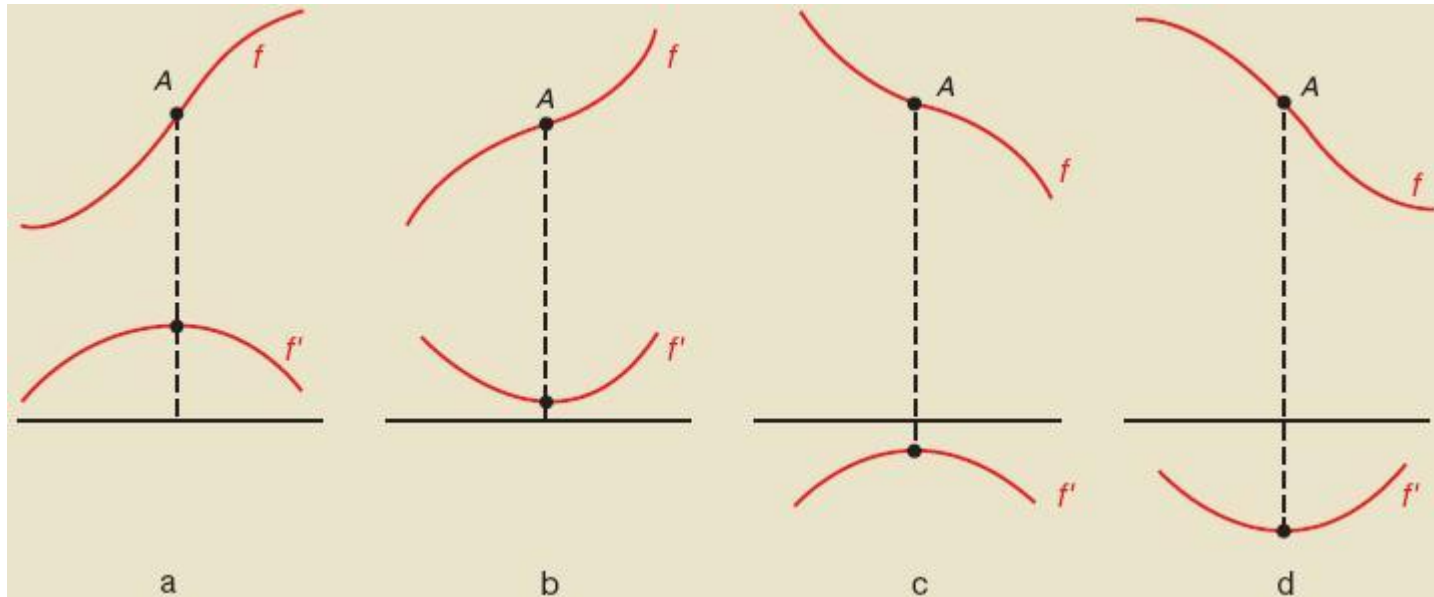
15.1 Hellingen, buigpunten en toppen [2]



- De functie is afnemend dalend tot het lokale minimum;
- Vanaf het lokale minimum tot punt *A* is de functie toenemend stijgend;
- Vanaf punt *A* tot het lokale maximum is de functie afnemend stijgend;
- Vanaf het lokale maximum is de functie toenemend dalend.

Het punt *A* heet een zogenaamd **buigpunt**.

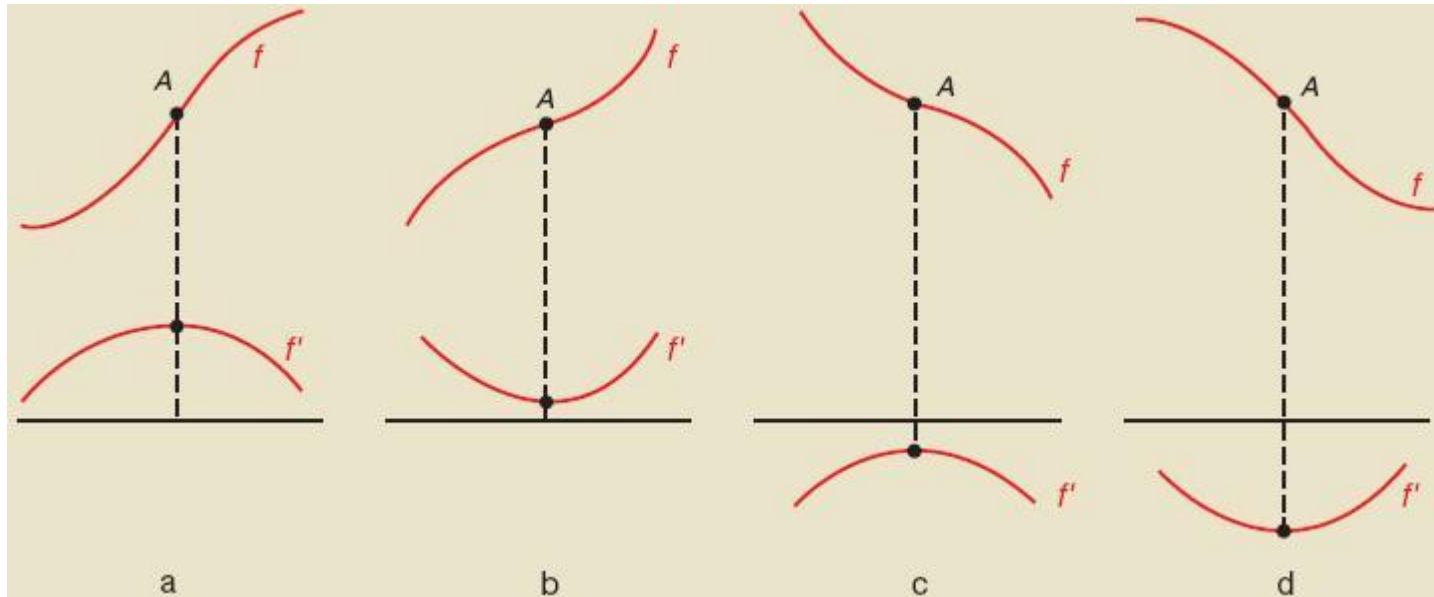
15.1 Hellingen, buigpunten en toppen [2]



- a: De grafiek is eerst toenemend stijgend en dan afnemend stijgend;
- b: De grafiek is eerst afnemend stijgend en dan toenemend stijgend;
- c: De grafiek is eerst afnemend dalend en dan toenemend dalend;
- d: De grafiek is eerst toenemend dalend en dan afnemend dalend;

In al deze vier situaties is het punt A het buigpunt.

15.1 Hellingen, buigpunten en toppen [2]



- Waar f een buigpunt heeft, heeft de afgeleide f' een maximum of minimum;
- Het buigpunt van een functie f kan gevonden worden door de extreme waarde van f' te berekenen;
- De extreme waarde van f' kan berekend worden door de afgeleide van f' gelijk te stellen aan nul;
- De afgeleide van f' is de functie f'' (**tweede afgeleide**).

15.1 Hellingen, buigpunten en toppen [2]

Voorbeeld:

Bereken exact voor welke waarden van a en b de grafiek van $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 5x + b$ in het punt $(2, 10)$ overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

$$f(x) = ax^3 + 2x^2 + 5x + b$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 4x + 5$$

$$f''(x) = 6ax + 4$$

Er moet gelden $f''(2) = 0 \Leftrightarrow 12a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -1/3$

$$f(x) = -1/3x^3 + 2x^2 + 5x + b$$

$$f(2) = 10 \text{ geeft } b = -5\frac{1}{3}$$

Er is dus een buigpunt voor bovenstaande waarden van a en b .

15.1 Hellingen, buigpunten en toppen [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de grafiek van de functie $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + p$.

De toppen van de functie zijn de punten A en B .

Bereken exact voor welke p de afstand tussen de punten O en A gelijk is aan de afstand tussen de punten O en B .

Stap 1:

Bereken de x -coördinaten van de toppen.

$$f_p'(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x_A = 1 \vee x_B = 3$$

15.1 Hellingen, buigpunten en toppen [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de grafiek van de functie $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + p$.

De toppen van de functie zijn de punten A en B .

Bereken exact voor welke p de afstand tussen de punten O en A gelijk is aan de afstand tussen de punten O en B .

Stap 2:

Druk de y-coördinaten van de toppen uit in p .

$$y_A = f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + p = 1\frac{1}{3} + p$$

$$y_B = f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + p = p$$

Stap 3:

Druk OA^2 en OB^2 uit in p .

$$OA^2 = (x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 = 1^2 + (1\frac{1}{3} + p)^2 = p^2 + 2\frac{2}{3}p + 2\frac{7}{9}$$

$$OB^2 = (x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2 = 3^2 + p^2 = 9 + p^2$$

15.1 Hellingen, buigpunten en toppen [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de grafiek van de functie $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + p$.

De toppen van de functie zijn de punten A en B .

Bereken exact voor welke p de afstand tussen de punten O en A gelijk is aan de afstand tussen de punten O en B .

Stap 4:

Los de vergelijking $OA^2 = OB^2$ op.

$$p^2 + 2\frac{2}{3}p + 2\frac{7}{9} = p^2 + 9$$

$$2\frac{2}{3}p = 6\frac{2}{9}$$

$$p = 2\frac{1}{3}$$

15.2 Raakproblemen [1]

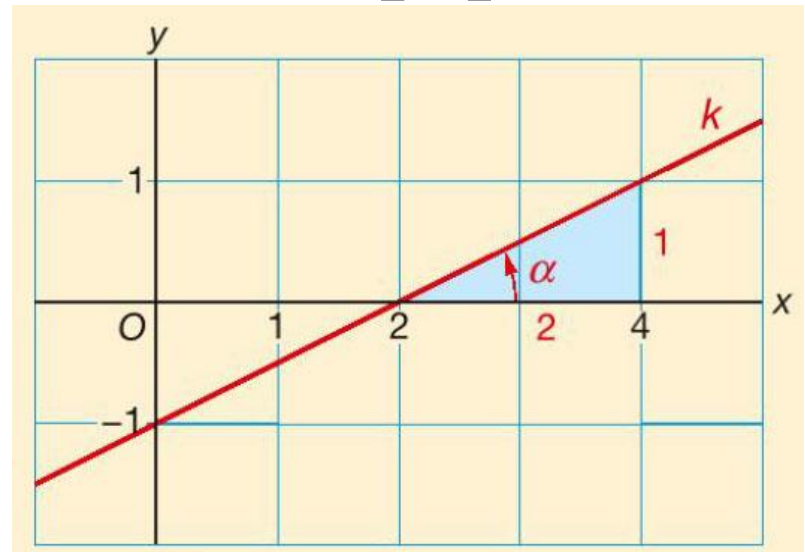
Voorbeeld 1:

Getekend is de lijn k : $y = \frac{1}{2}x - 1$.

De richtingshoek α van de lijn k is te berekenen met:

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 26,6^\circ (= \alpha)$$



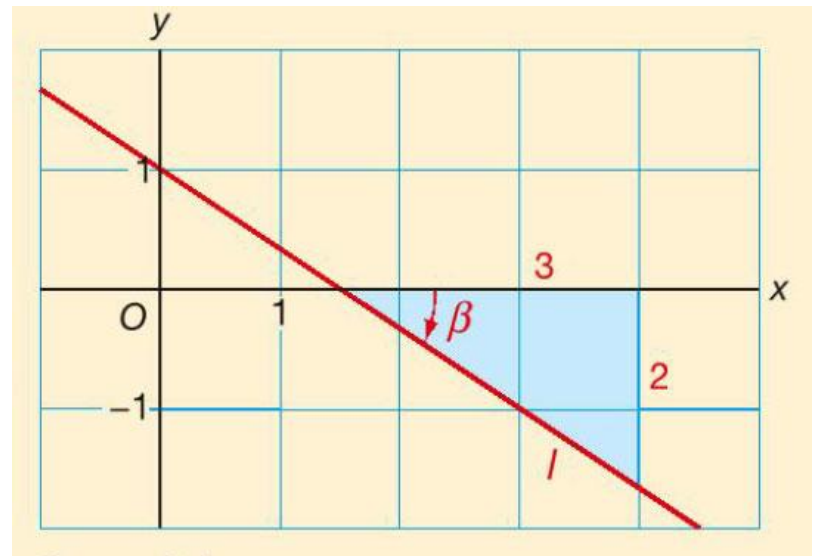
Voorbeeld 2:

Getekend is de lijn l : $y = -\frac{2}{3}x + 1$

De richtingshoek β van de lijn l is te berekenen met:

$$\tan(\beta) = -\frac{2}{3}$$

$$\tan^{-1}(-\frac{2}{3}) \approx -33,7^\circ (= \beta)$$



15.2 Raakproblemen [1]

Voorbeeld 3:

De richtingshoek φ tussen de lijnen k en l is gelijk aan $26,6^\circ - -33,7^\circ \approx 60,3^\circ$.

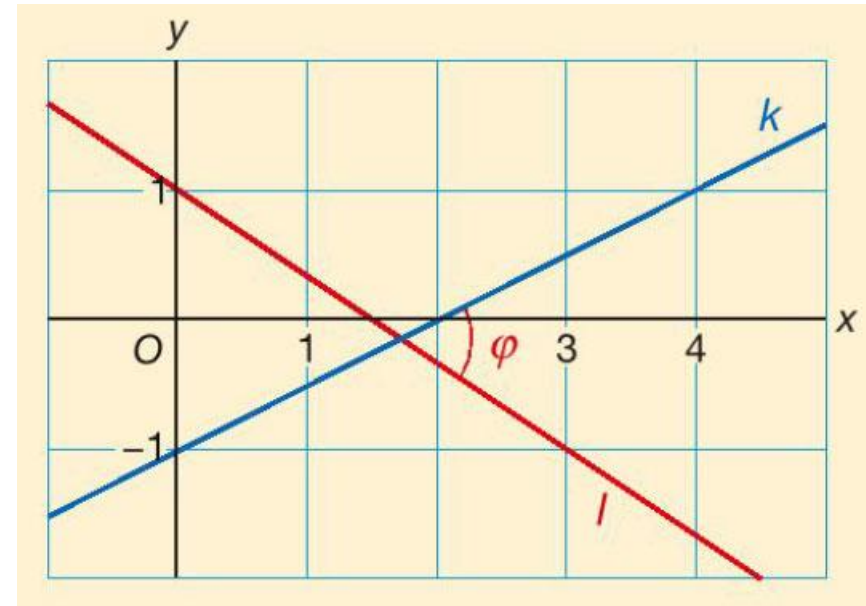
Let op:

Voor de hoek φ tussen twee lijnen, wordt altijd de hoek genomen waarvoor geldt: $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Als φ groter is dan 90° kun je de hoek tussen twee lijnen berekenen met $180^\circ - \varphi$.

Bij het berekenen van de hoek φ tussen twee lijnen moeten de vergelijkingen in de vorm $y = ax + b$ worden geschreven.

De hoek tussen twee krommen in een snijpunt A is gelijk aan de hoek tussen de raaklijnen in A .



15.2 Raakproblemen [1]

Voorbeeld 4:

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^2$
en $g(x) = \sqrt{x} + 2$.

Bereken langs algebraïsche weg de hoek
tussen de grafieken van f en g in het
snijpunt $A(4, 4)$. Rond af op één decimaal.

Stap 1:

Stel de r.c. van de raaklijn op van de grafiek
van f in A .

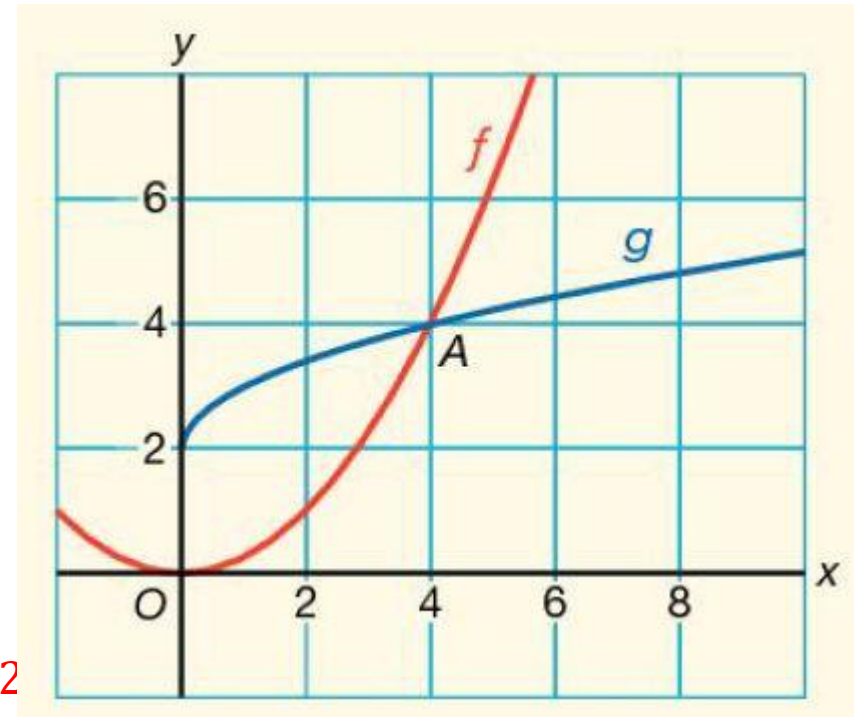
$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}x \text{ en } f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Stap 2:

Stel de r.c. van de raaklijn op van de grafiek van g in B .

$$g(x) = \sqrt{x} + 2$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(4) = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$



15.2 Raakproblemen [1]

Voorbeeld 4:

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^2$
en $g(x) = \sqrt{x} + 2$.

Bereken langs algebraïsche weg de hoek
tussen de grafieken van f en g in het
snijpunt $A(4, 4)$. Rond af op één decimaal.

Stap 3:

Bereken de gevraagde hoek.

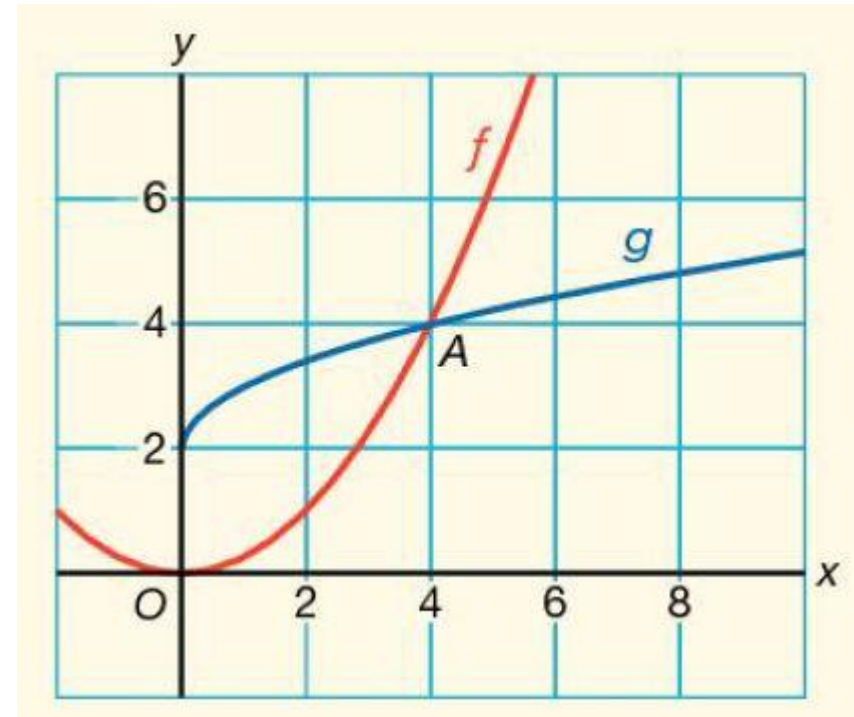
$$\tan(\alpha) = 2$$

$$\tan^{-1}(2) \approx 63,43\dots^\circ (= \alpha)$$

$$\tan(\beta) = \frac{1}{4}$$

$$\tan^{-1}(\frac{1}{4}) \approx 14,03\dots^\circ (= \beta)$$

De gevraagde hoek is $\alpha - \beta \approx 49,4^\circ$



15.2 Raakproblemen [2]

Voorbeeld 1:

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$ en $g(x) = -x^2 + 9x - 13$

De beide grafieken raken elkaar in het punt A.

Voor het punt A geldt:

$$f(x_A) = g(x_A) \text{ EN}$$

$$f'(x_A) = g'(x_A)$$

Toon aan dat de grafieken van f en g elkaar raken en bereken de coördinaten van het raakpunt.



15.2 Raakproblemen [2]

Voorbeeld 1:

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$ en $g(x) = -x^2 + 9x - 13$

Stap 1:

Bereken exact de afgeleiden van $f(x)$ en $g(x)$.

$$f'(x) = x^2 - 2x \quad \text{EN} \quad g'(x) = -2x + 9$$

Stap 2:

Los de vergelijkingen $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$ op:

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5 = -x^2 + 9x - 13 \wedge x^2 - 2x = -2x + 9$$

$$\frac{1}{3}x^3 - 9x + 18 = 0 \wedge x^2 = 9$$

$$\frac{1}{3}x^3 - 9x + 18 = 0 \wedge x = 3, \quad x = -3$$

15.2 Raakproblemen [1]

Voorbeeld 1:

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$ en $g(x) = -x^2 + 9x - 13$

Stap 3:

Controleer of de gevonden oplossingen kloppen.

$f(3) = 5$ EN $g(3) = 5$ Deze oplossing klopt
 $f(-3) = -31$ EN $g(-3) = -49$ Deze oplossing klopt niet.

Het punt (3, 5) is het raakpunt van beide grafieken.

15.2 Raakproblemen [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven zijn de functies $f(x) = x - \ln(x)$ en $g(x) = px$. Beide grafieken raken elkaar. Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van het raakpunt.

Stap 1:

Bereken de afgeleiden van $f(x)$ en $g(x)$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{EN} \quad g'(x) = p$$

Stap 2:

Stel de vergelijkingen $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$ op:

$$x - \ln(x) = px \quad \wedge \quad 1 - \frac{1}{x} = p$$

Er ontstaat nu een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

15.2 Raakproblemen [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven zijn de functies $f(x) = x - \ln(x)$ en $g(x) = px$. Beide grafieken raken elkaar. Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van het raakpunt.

Stap 3:

Invullen van $p = 1 - \frac{1}{x}$ in $x - \ln(x) = px$ geeft:

$$x - \ln(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)x$$

$$x - \ln(x) = x - 1$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

$$p = 1 - \frac{1}{e}$$

$$f(e) = e - \ln(e) = e - 1$$

Het raakpunt wordt nu $(e, e - 1)$

15.2 Raakproblemen [3]

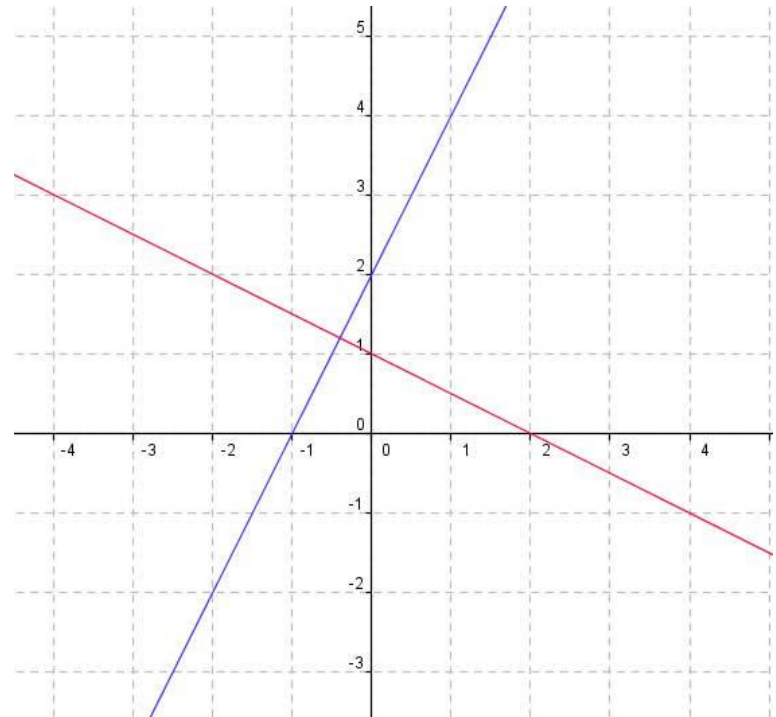
Voorbeeld 1:

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x + 2$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

De grafieken van deze twee functies snijden elkaar loodrecht. In het punt waar ze elkaar loodrecht snijden geldt het volgende:

$$f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$$

Door het oplossen van dit stelsel van vergelijkingen kun je dus nagaan of een tweetal grafieken elkaar in een punt loodrecht snijden.



15.2 Raakproblemen [2]

Voorbeeld 2:

De grafieken van $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g_p(x) = \frac{p}{x}$

Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van het punt waar de grafieken elkaar loodrecht snijden.

Stap 1:

Bereken de afgeleiden van $f(x)$ en $g_p(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{EN} \quad g'(x) = -\frac{p}{x^2}$$

15.2 Raakproblemen [2]

Voorbeeld 2:

De grafieken van $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g_p(x) = \frac{p}{x}$

Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van het punt waar de grafieken elkaar loodrecht snijden.

Stap 2:

Los de vergelijkingen $f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$ op:

$$2\sqrt{x} = \frac{p}{x}$$

$$p = 2x\sqrt{x}$$

$$2x\sqrt{x} = x^2\sqrt{x}$$

$$2x\sqrt{x} - x^2\sqrt{x} = 0$$

$$x\sqrt{x} (2 - x) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-p}{x^2} = -1$$

$$\frac{p}{x^2\sqrt{x}} = -1$$

$$p = x^2\sqrt{x}$$

15.2 Raakproblemen [2]

Voorbeeld 2:

De grafieken van $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g_p(x) = \frac{p}{x}$

Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van het punt waar de grafieken elkaar loodrecht snijden.

Stap 3:

$x = 2$ geeft $p = 4\sqrt{2}$

$f(2) = 2\sqrt{2}$, dus de grafieken snijden elkaar **loodrecht in $(2, 2\sqrt{2})$**

Let op:

Als er niet staat dat je exact of algebraïsch de oplossing moet berekenen, mag je je GR gebruiken.

15.3 Optimaliseringsproblemen [1]

Bereken:

De opgave mag berekend worden met de hand of met de GR. Geef bij GR gebruik de ingevoerde formules en gebruikte opties. Kies op een (school)examen in dit geval voor berekenen met de GR.

Bereken algebraïsch:

Bereken stap voor stap zonder gebruik van de GR. Rond antwoord indien nodig af.

Bereken exact:

Bereken stap voor stap zonder gebruik van de GR. Rond het antwoord niet af. Laat wortels, breuken etc. staan.

Bereken met behulp van afgeleide:

Bereken de formule van de afgeleide.

Bereken met behulp van differentiëren:

De rest van de berekening mag met de GR opgelost worden.

15.3 Optimaliseringsproblemen [1]

Toon aan:

Geef een redenering en/of een berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.

Bewijs:

Geef een redenering en/of een exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.

Let op:

Bij het aantonen of bewijzen dat een formule juist is leid je stap voor stap de formule af.

Je mag je niet beperken tot het geven van een aantal getallenvoorbeelden.

15.3 Optimaliseringsproblemen [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{5-2x}$

Van rechthoek $OPQR$ ligt P op de positieve x -as, Q op de grafiek van f en R op de y -as.
Bereken exact de maximale oppervlakte van rechthoek $OPQR$.

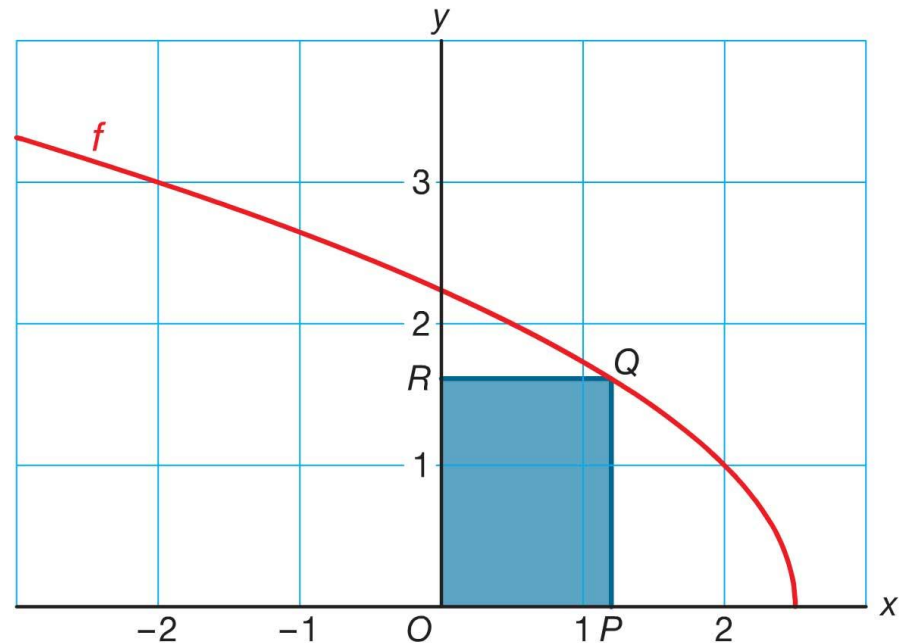
Stap 1:

Stel: $x_p = p$

De oppervlakte van rechthoek

$$\begin{aligned} OPQR &= OP \cdot PQ \\ &= p \cdot f(p) \\ &= p \sqrt{5-2p} \end{aligned}$$

De maximale oppervlakte van rechthoek $OPQR$ is te berekenen door het maximum van $p \sqrt{5-2p}$ te berekenen.



15.3 Optimaliseringsproblemen [1]

Stap 2:

Differentieer de functie $y = p \sqrt{5-2p}$

$$\begin{aligned} y' &= [p]' \sqrt{5-2p} + p[\sqrt{5-2p}]' \\ &= 1 \cdot \sqrt{5-2p} + p \cdot -\frac{1}{\sqrt{5-2p}} \\ &= \sqrt{5-2p} - \frac{p}{\sqrt{5-2p}} \\ &= \frac{5-2p}{\sqrt{5-2p}} - \frac{p}{\sqrt{5-2p}} \\ &= \frac{5-3p}{\sqrt{5-2p}} \end{aligned}$$

15.3 Optimaliseringsproblemen [1]

Stap 3:

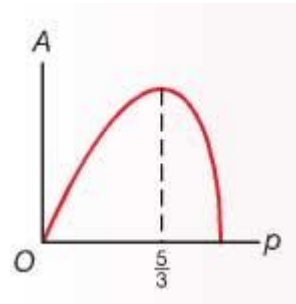
Stel de afgeleide gelijk aan nul en controleer of de oplossing een maximum is.

$$\frac{5-3p}{\sqrt{5-2p}} = 0$$

$$5-3p=0$$

$$-3p=-5$$

$$p=\frac{5}{3}$$



Uit de schets blijkt dat er hier sprake is van een maximum.

Stap 4:

Bereken de maximale oppervlakte van rechthoek OPQR.

$$O(OPQR) = p\sqrt{5-2p} = \frac{5}{3}\sqrt{5-2\cdot\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{15}}{9} = \frac{5}{9}\sqrt{15}$$

15.3 Optimaliseringsproblemen [2]

Voorbeeld:

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(2x) - 1$ en $g(x) = 2\cos^2(x)$ met het domein $[0, \pi]$. De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B . Bereken exact voor welke p de lengte L van het lijnstuk AB maximaal is.

Stap 1:

Stel een formule op voor de lengte L van lijnstuk AB .

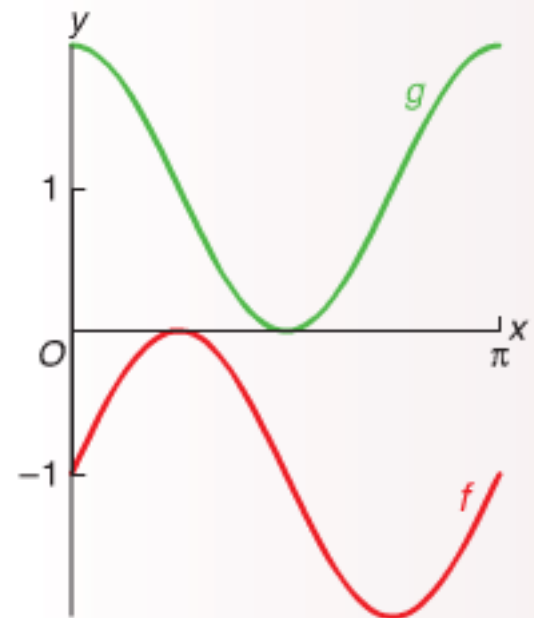
$$\begin{aligned} L &= g(p) - f(p) \\ &= 2\cos^2(p) - (\sin(2p) - 1) \\ &= 2\cos^2(p) - \sin(2p) + 1 \end{aligned}$$

Stap 2:

Differentieer de gevonden functie L .

$$\begin{aligned} L' &= 4\cos(p) \cdot -\sin(p) - 2\cos(2p) \\ &= -4\sin(p)\cos(p) - 2\cos(2p) \end{aligned}$$

Uitwerking



15.3 Optimaliseringsproblemen [2]

Stap 3:

Stel de afgeleide gelijk aan nul en controleer of de gevonden oplossing een maximum is.

$$-4\sin(p)\cos(p) - 2\cos(2p) = 0$$

$$2\sin(p)\cos(p) = -\cos(2p)$$

$$\sin(2p) = -\cos(2p)$$

$$\cos(2p - \frac{1}{2}\pi) = \cos(2p + \pi)$$

$$[2\sin(A)\cos(A) = \sin(2A)]$$

$$[\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)]$$

$$[-\cos(A) = \cos(A + \pi)]$$

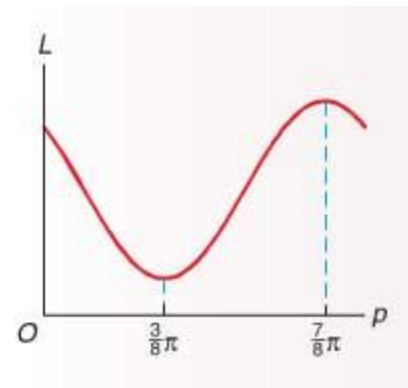
$$2p - \frac{1}{2}\pi = -2p - \pi + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad 2p - \frac{1}{2}\pi = 2p + \pi + k \cdot 2\pi$$

$$4p = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad \text{geen oplossing}$$

$$p = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$p = \frac{3}{8}\pi \vee p = \frac{7}{8}\pi$$

Uit de **schets** volgt dat er bij $p = \frac{7}{8}\pi$ een maximum is.



15.3 Optimaliseringsproblemen [3]

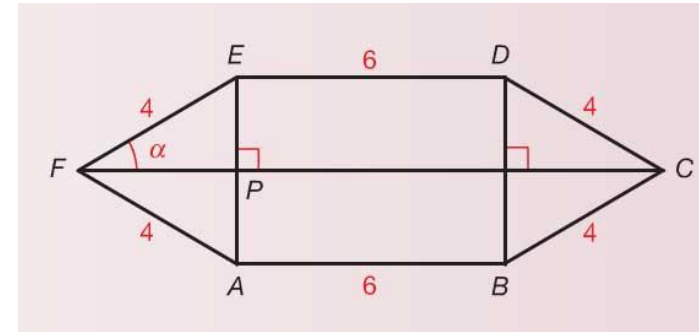
Voorbeeld 1:

Van zeshoek $ABCDEF$ is gegeven:

$AB = DE = 6$, $BC = CD = EF = FA = 4$, $AB \parallel DE$

en $\angle CFE = \alpha$.

Toon aan dat voor de oppervlakte O van de zeshoek geldt: $O = 16 \sin(2\alpha) + 48 \sin(\alpha)$



$$\begin{aligned} O(\text{zeshoek}) &= O(\triangle AEF) + O(ABDE) + O(\triangle BDC) \\ &= 2 \cdot O(\triangle AEF) + O(ABDE) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AE \cdot FP + AB \cdot AE \end{aligned}$$

$$\text{In } \triangle FPE \text{ geldt: } \sin(\alpha) = \frac{EP}{EF} = \frac{EP}{4} \text{ dus } EP = 4 \sin(\alpha)$$

$$[AE = 2 \cdot EP = 8 \sin(\alpha)]$$

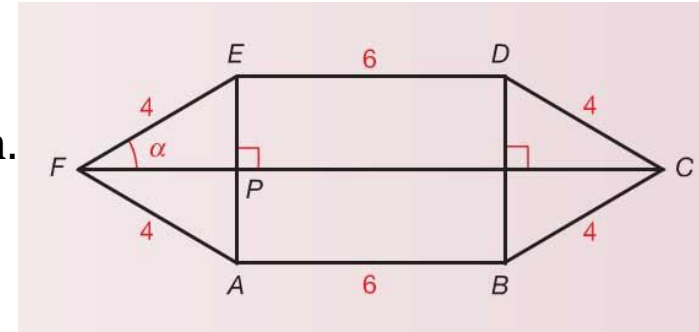
$$\text{In } \triangle FPE \text{ geldt: } \cos(\alpha) = \frac{FP}{EF} = \frac{FP}{4} \text{ dus } FP = 4 \cos(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{Hieruit volgt: } O(\text{zeshoek}) &= 8 \sin(\alpha) \cdot 4 \cos(\alpha) + 6 \cdot 8 \sin(\alpha) \\ &= 32 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + 48 \sin(\alpha) \\ &= 16 \sin(2\alpha) + 48 \sin(\alpha) \end{aligned}$$

15.3 Optimaliseringsproblemen [3]

Voorbeeld 2:

De oppervlakte O van de zeshoek is gelijk aan:
 $16 \sin(2x) + 48 \sin(x)$. x is hierbij gegeven in radialen.
Bereken algebraïsch bij welke hoek de oppervlakte van de zeshoek maximaal is.



Stap 1:

Bereken de afgeleide van de formule van de oppervlakte O .

$$\frac{dO}{dx} = 32\cos(2x) + 48\cos(x)$$

Stap 2:

Stel de afgeleide gelijk aan nul en los de ontstane vergelijking op.

$$32 \cos(2x) + 48\cos(x) = 0$$

$$2 \cos(2x) + 3 \cos(x) = 0$$

$$2(2 \cos^2(x) - 1) + 3 \cos(x) = 0$$

$$4 \cos^2(x) + 3 \cos(x) - 2 = 0$$

15.3 Optimaliseringsproblemen [3]

Stap 2:

$$4 \cos^2(x) + 3 \cos(x) - 2 = 0$$

$$[\cos(x) = p]$$

$$4p^2 + 3p - 2 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot -2 = 41$$

$$p = \frac{-3 - \sqrt{41}}{8} \text{ of } p = \frac{-3 + \sqrt{41}}{8}$$

$$\cos(x) \approx -1,175 \text{ of } \cos(x) \approx 0,425$$

$$\text{Geen oplossing } x \approx 1,131 + k \cdot 2\pi \text{ of } x \approx -1,131 + k \cdot 2\pi$$

Stap 3:

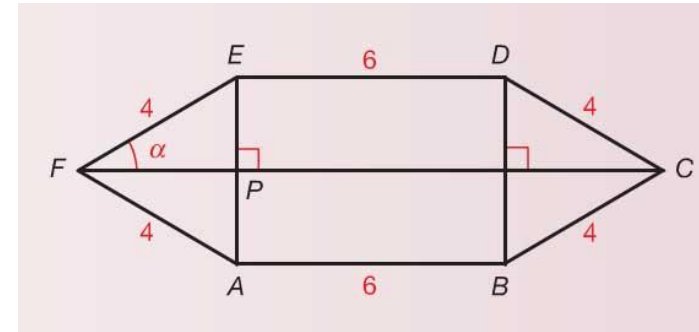
Controleer of de gevonden oplossing een maximum is .

Uit een schets van de formule volgt dat er bij 1,131 een maximum is.

Stap 4:

Bereken de hoek waarbij de oppervlakte maximaal is.

$$\text{De oppervlakte is maximaal bij een hoek van } 1,131 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 65^\circ$$



15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud [1]

Voorbeeld:

Voor elke $a > 0$ is gegeven de functie $f_a(x) = \frac{ax}{x+1}$

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_a , de x -as en de lijn $x = 4$.

Bereken exact voor welke a de oppervlakte van V gelijk is aan 10.

$$f_a(x) = \frac{ax}{x+1} = \frac{a(x+1) - a}{x+1} = a - \frac{a}{x+1}$$

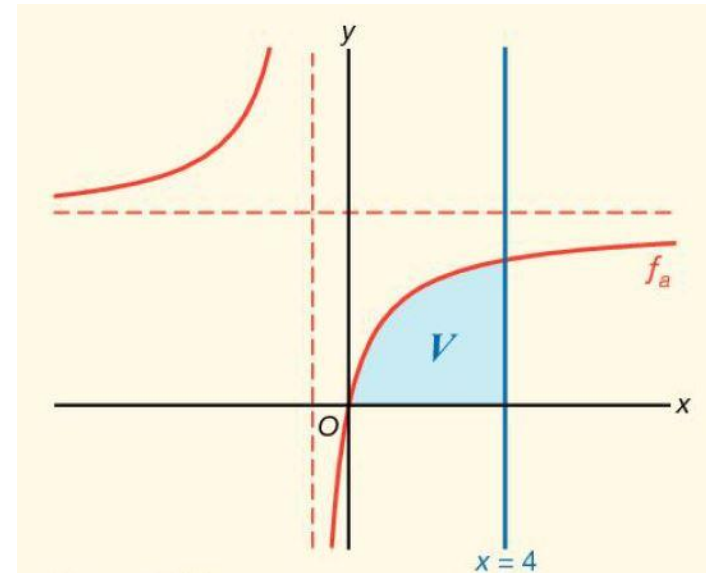
$$\begin{aligned} O(V) &= \int_0^4 f_a(x) dx = \int_0^4 \left(a - \frac{a}{x+1} \right) dx \\ &= \left[ax - a \ln |x+1| \right]_0^4 = 4a - a \ln(5) \end{aligned}$$

$$O(V) = 10$$

$$4a - a \ln(5) = 10$$

$$a(4 - \ln(5)) = 10$$

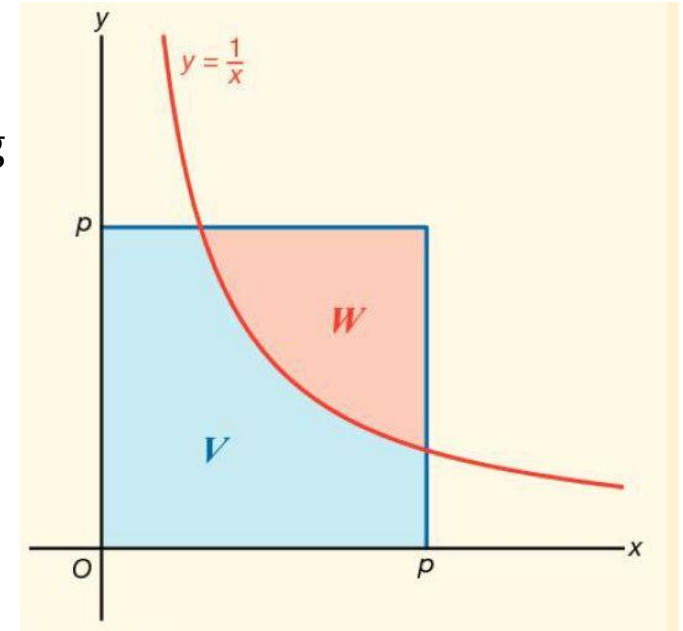
$$a = \frac{10}{4 - \ln(5)}$$



15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud [2]

Voorbeeld:

Gegeven is een vierkant met zijde p , met $p > 1$ getekend waarvan een hoekpunt in de oorsprong ligt en twee zijden langs de assen vallen. De grafiek van $y = 1/x$ verdeelt het vierkant in de vlakdelen V en W . Bereken met behulp van primitiveren de waarde van p zo dat $O(W) : O(V) = 1 : 2$. Rond af op twee decimalen.



Stap 1:

Bereken de oppervlakte van $O(V)$

$$\begin{aligned} O(V) &= \frac{1}{p} \cdot p + \int_{\frac{1}{p}}^p \frac{1}{x} dx = 1 + \left[\ln |x| \right]_{\frac{1}{p}}^p \\ &= 1 + \ln(p) - \ln\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= 1 + \ln(p) - \ln(p^{-1}) \\ &= 1 + \ln(p) + \ln(p) = 1 + 2\ln(p) \end{aligned}$$

15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud [2]

Stap 2:

Bereken de oppervlakte van $O(V + W)$

$$O(V + W) = p^2$$

Stap 3:

Bereken de waarde van p .

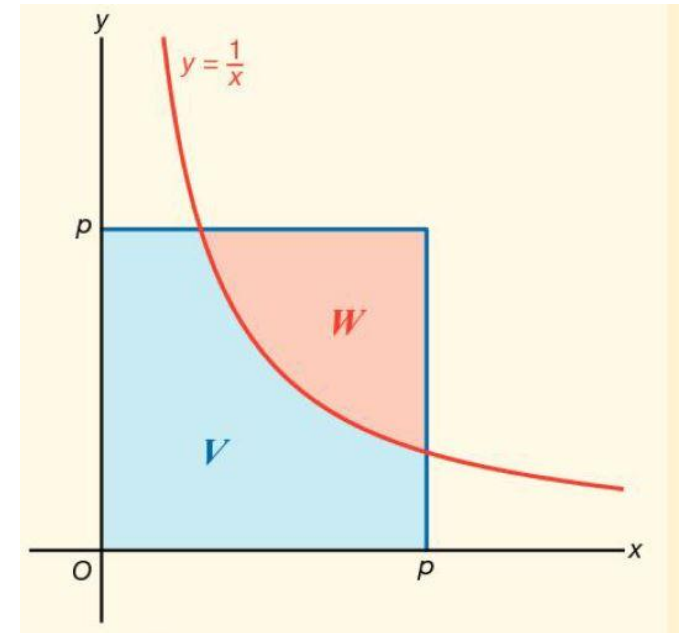
$$O(W) : O(V) = 1 : 2$$

$$O(V) = \frac{2}{3}O(V + W)$$

Hieruit volgt $1 + 2 \ln(p) = \frac{2}{3}p^2$.

Invullen in de GR en oplossen met **INTERSECT** geeft

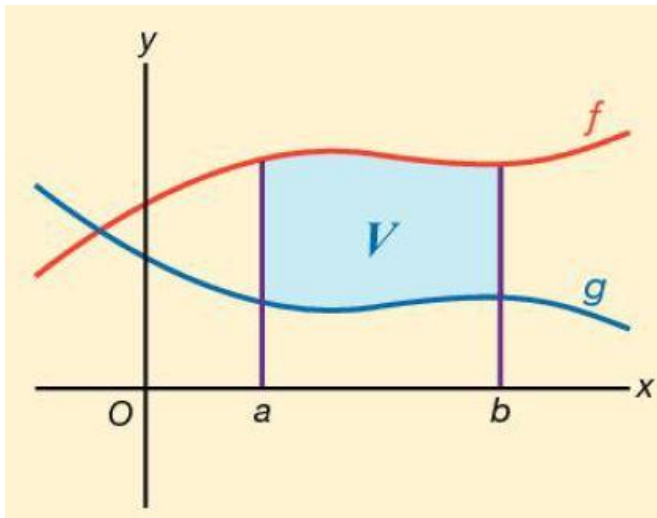
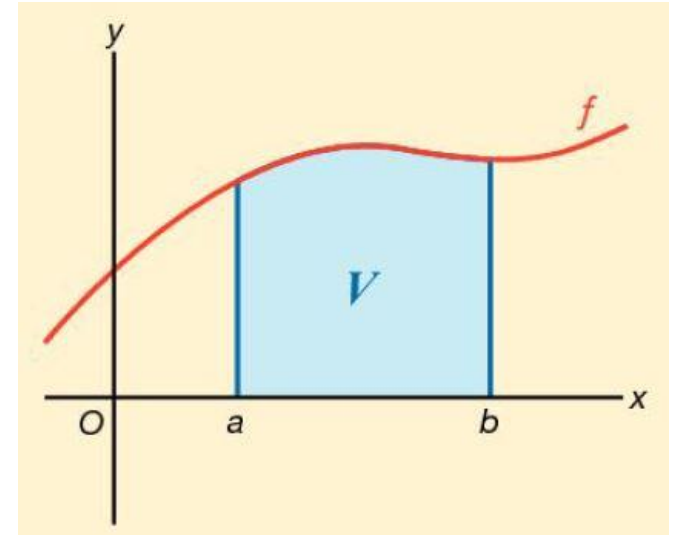
$p \approx 0,72$ (voldoet niet) en $p \approx 1,81$ (voldoet)



15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud [3]

Inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V om de x -as wentelt.

$$I(L) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$



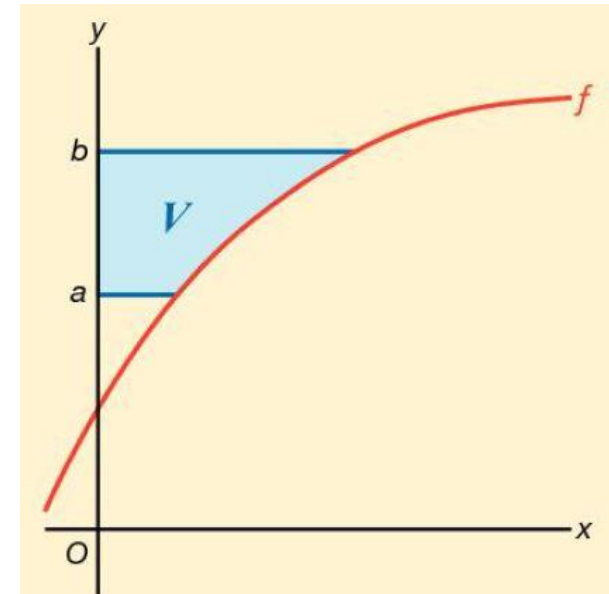
Inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V om de x -as wentelt.

$$I(L) = \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2 \right) dx$$

15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud [3]

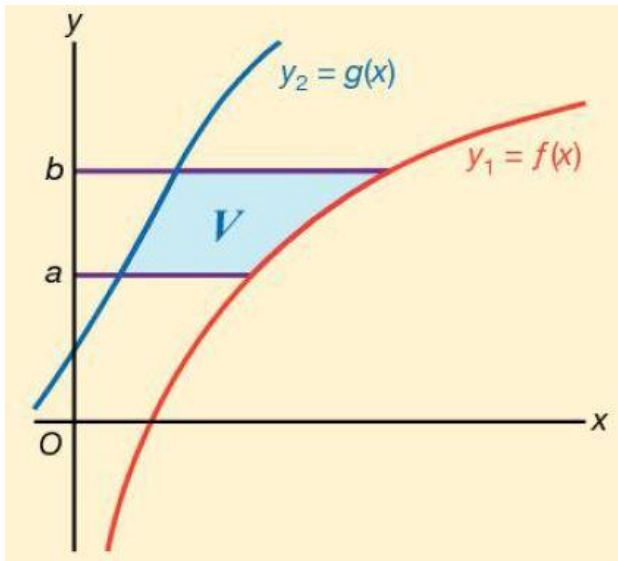
Inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V om de y -as wentelt.

$$I(L) = \pi \int_a^b x^2 dy$$



Inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V om de y -as wentelt.

$$I(L) = \pi \int_a^b \left((x_1)^2 - (x_2)^2 \right) dy$$



15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud [3]

Voorbeeld:

Gegeven zijn de lijnen $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$ en $y = ax$ met $a > 1$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de lijnen $y = x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = 1$ en $x = 4$.

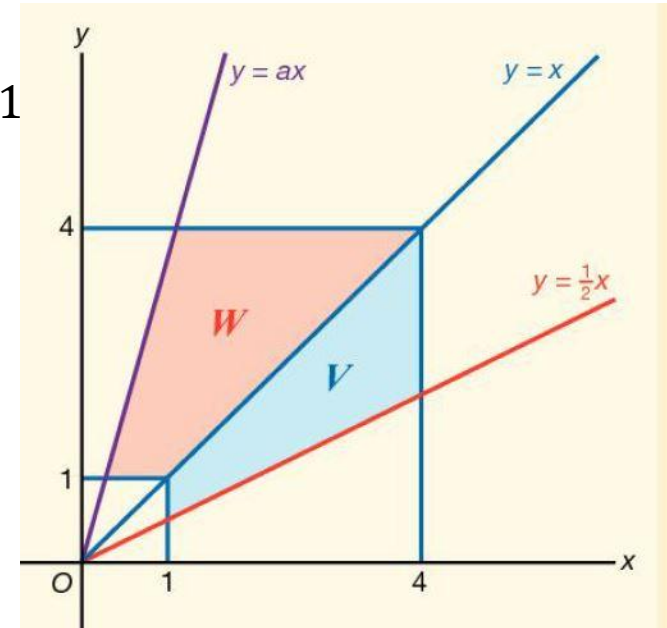
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de lijnen $y = x$, $y = ax$ en $y = 1$ en $y = 4$.

Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x -as.

Het lichaam M ontstaat als W wentelt om de y -as.

Bereken exact voor welke waarde van a geldt

$$I(M) = 1\frac{1}{5} I(L)$$



Stap 1:

Bereken $I(L)$

$$\begin{aligned} I(L) &= \pi \int_1^4 \left(x^2 - \left(\frac{1}{2}x \right)^2 \right) dx = \pi \int_1^4 \left(x^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx \\ &= \pi \int_1^4 \frac{3}{4}x^2 dx = \pi \left[\frac{1}{4}x^3 \right]_1^4 = \pi \left(\frac{1}{4} \cdot 4^3 - \frac{1}{4} \cdot 1^3 \right) \\ &= \pi \left(16 - \frac{1}{4} \right) = 15\frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud [3]

Voorbeeld:

Stap 2:

Bereken $I(M)$

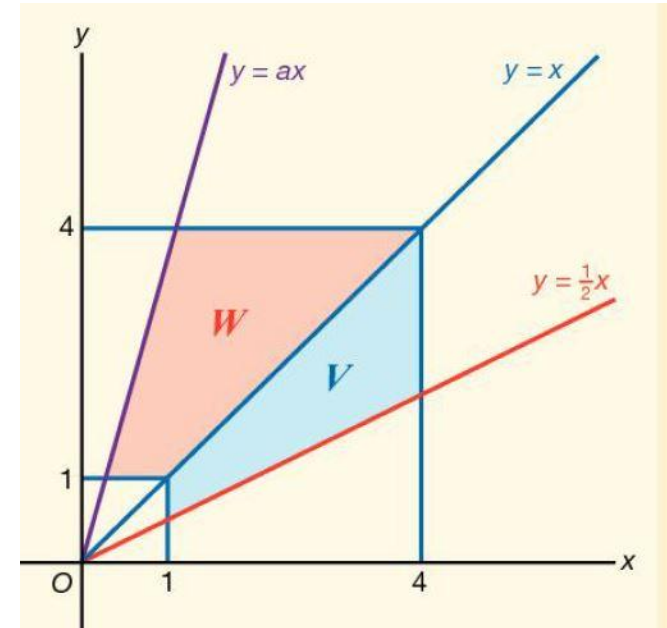
$$y = x \text{ geeft } x^2 = y^2$$

$$y = ax \text{ geeft } x = \frac{y}{a} \Leftrightarrow x^2 = \frac{y^2}{a^2}$$

$$I(M) = \pi \int_1^4 \left(y^2 - \left(\frac{y^2}{a^2} \right)^2 \right) dy = \pi \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{y^3}{3a^2} \right]_1^4$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{4^3}{3a^2} - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1^3}{3a^2} \right) \right)$$

$$= \pi \left(\frac{64}{3} - \frac{64}{3a^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3a^2} \right) = \pi \left(\frac{63}{3} - \frac{63}{3a^2} \right) = \left(21 - \frac{21}{a^2} \right) \pi$$



15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud [3]

Voorbeeld:

Stap 3:

Bereken de gevraagde waarden van a .

$$I(M) = 1\frac{1}{5} I(L)$$

$$\left(21 - \frac{21}{a^2}\right)\pi = 1\frac{1}{5} \cdot 15\frac{3}{4}\pi$$

$$21 - \frac{21}{a^2} = 18\frac{9}{10}$$

$$\frac{21}{a^2} = 2\frac{1}{10}$$

$$a^2 = 10$$

$$a = \sqrt{10} \vee a = -\sqrt{10}$$

Omdat moet gelden $a > 1$ is de juiste oplossing $a = \sqrt{10}$.

