

K.0 Voorkennis

Herhaling rekenregels voor differentiëren:

$$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x) \quad (\text{som} - \text{regel})$$

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (\text{product} - \text{regel})$$

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \Rightarrow q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2} \quad (\text{quotiënt} - \text{regel})$$

$$f(x) = u(v(x)) \text{ geeft } f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad (\text{kettingregel})$$

$$f(x) = \sin(x) \text{ geeft } f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \text{ geeft } f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \tan(x) \text{ geeft } f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f(x) = e^x \text{ geeft } f'(x) = e^x$$

$$f(x) = g^x \text{ geeft } f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = {}^g\log(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x \ln(g)}$$

K.0 Voorkennis

Opdracht:

Geef de primitieven van de volgende functies:

$$f(x) = ax^n \Rightarrow F(x) =$$

$$f(x) = g^x \Rightarrow F(x) =$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) =$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) =$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow F(x) =$$

$$f(x) = {}^g \log(x) \Rightarrow F(x) =$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) =$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) =$$

K.0 Voorkennis

Herhaling rekenregels voor primitiveren:

$$f(x) = ax^n \Rightarrow F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c \text{ met } n \neq -1$$

$$f(x) = g^x \Rightarrow F(x) = \frac{g^x}{\ln(g)} + c$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln|x| + c$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow F(x) = x \ln(x) - x + c$$

$$f(x) = {}^g\log(x) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(g)}(x \ln(x) - x) + c$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x) + c$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x) + c$$

De primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\frac{1}{a}F(ax + b) + c$

K.1 De substitutiemethode [1]

Substitutiemethode primitiveren: $\int (f(u) \cdot u') dx = \int f(u) du = F(u) + c$

Voorbeeld 1:

Primitiveer de functie $f(x) = 5(x^2 + x)^4 \cdot (2x + 1)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int 5(x^2 + x)^4 \cdot (2x + 1) dx = \int 5(x^2 + x)^4 d(x^2 + x) && [\text{Neem } x^2 + x = u(x)] \\ &= \int 5(u(x))^4 d(u(x)) = \\ &= (u(x))^5 + c = (x^2 + x)^5 + c \end{aligned}$$

Let op:

Door het “handig” toepassen van de substitutiemethode krijgt je een functie, die je kunt primitiveren met de regels, die je eerder geleerd hebt.

Er wordt een integraalteken zonder grenzen gebruikt. Dit is een **onbepaalde integraal**. Als er wel grenzen bij het integraalteken staan is het een **bepaalde integraal**.

Merk op dat in het voorbeeld $2x + 1$ de afgeleide is van $x^2 + x$.

K.1 De substitutiemethode [1]

Substitutiemethode primitiveren: $\int (f(u) \cdot u') dx = \int f(u) du = F(u) + c$

Voorbeeld 2:

Primitiveer de functie $f(x) = \frac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 7}}$

$$F(x) = \int \frac{10x^3}{\sqrt{x^4 + 7}} dx = \int 2\frac{1}{2} \cdot (x^4 + 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x^3 dx \quad [\text{Herschrijven zodat je de functie en de afgeleide ziet .}]$$

$$\int 2\frac{1}{2} (x^4 + 7)^{-\frac{1}{2}} d(x^4) =$$

$$\int 2\frac{1}{2} (x^4 + 7)^{-\frac{1}{2}} d(x^4 + 7) =$$

$[x^4$ mag je in $x^4 + 7$ veranderen. De afgeleiden hiervan zijn aan elkaar gelijk.]

$$\int 2\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = 5u^{\frac{1}{2}} + c =$$

[Schrijf $x^4 + 7$ als u]

$$5\sqrt{u} + c = 5\sqrt{x^4 + 7} + c$$

K.1 De substitutiemethode [1]

Opgave 4D:

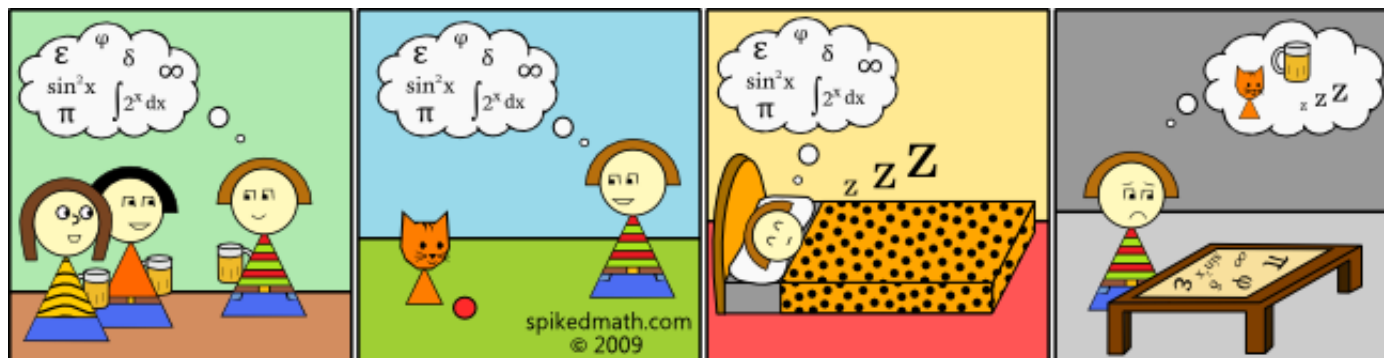
$$J(x) = \int 3x^2 \sin(x^3 - 1) dx =$$

$$\int \sin(x^3 - 1) d(x^3) =$$

$$\int \sin(x^3 - 1) d(x^3 - 1) =$$

$$\int \sin u du =$$

$$-\cos u + c = -\cos(x^3 - 1) + c$$



K.1 De substitutiemethode [2]

Substitutiemethode integreren: $\int (f(u) \cdot u') dx = \int f(u) du = F(u) + c$

Voorbeeld 1:

Primitiveer de functie $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$F(x) = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx =$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)} d(-\cos(x)) =$$

$$\int -\frac{1}{\cos(x)} \cdot d(\cos(x)) =$$

[Het minteken mag je voor de d zetten]

$$\int -\frac{1}{u} du =$$

[Schrijf $\cos(x)$ als u]

$$-\ln|u| + c = -\ln|\cos(x)| + c$$

K.1 De substitutiemethode [2]

Substitutiemethode integreren: $\int (f(u) \cdot u') dx = \int f(u) du = F(u) + c$

Voorbeeld 2:

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^3(x) dx =$$

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^2(x) \cdot \cos(x) dx = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} (1 - \sin^2(x)) \cdot \cos(x) dx =$$

$$\int_{x=\frac{1}{6}\pi}^{x=\frac{1}{4}\pi} (1 - \sin^2(x)) d\sin(x) =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} (1 - u^2) du = \left[u - \frac{1}{3}u^3 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} =$$

$$\frac{5}{12}\sqrt{2} - \frac{11}{24}$$

Herschrijven zodat je de functie en de afgeleide ziet.

De variabele was x en wordt nu $u = \sin(x)$. Hierdoor veranderen de grenzen van de integraal.

$$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

K.1 De substitutiemethode [2]

Opgave 11C:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e^{2x^3}} dx =$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-2x^3} dx =$$

$$\int_0^1 e^{-2x^3} d\left(\frac{1}{3}x^3\right) =$$

$$\int_0^1 -\frac{1}{6}e^{-2x^3} d(-2x^3) =$$

$$\int_0^{-2} -\frac{1}{6}e^u du = \left[-\frac{1}{6}e^u\right]_0^{-2} =$$

$$= -\frac{1}{6}e^{-2} + \frac{1}{6}e^0 = -\frac{1}{6e^2} + \frac{1}{6} = \frac{e^2 - 1}{6e^2}$$

Herschrijven zodat je de functie en de afgeleide ziet .

De variabele was x en wordt nu $u = -2x^3$. Hierdoor veranderen de grenzen van de integraal.

K.2 Partieel integreren [1]

Voor partieel integreren geldt de volgende regel:

$$\int (f \cdot g') dx = \int f dg = f \cdot g - \int g df = f \cdot g - \int g \cdot f' dx$$

Voorbeeld 1:

Primitiveer de functie $h(x) = x \ln(x)$

$$\int x \ln(x) dx = \int \ln(x) d(\tfrac{1}{2} x^2)$$

[Deze stap is hetzelfde als bij partieel integreren. Je krijgt nu niet een functie en de afgeleide.]

$$= \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \int \tfrac{1}{2} x^2 \cdot d(\ln(x)) \quad [\int f dg = f \cdot g - \int g df]$$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \int \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \quad [f \cdot g - \int g \cdot f' dx]$$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \int \tfrac{1}{2} x dx$$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \tfrac{1}{4} x^2 + c$$

K.2 Partieel integreren [1]

Algemeen:

$$\int (f \cdot g') dx = \int f dg = f \cdot g - \int g df = f \cdot g - \int g \cdot f' dx$$

Bij het primitiveren van een functie, die het product van twee functies is, noem je het ene deel f en het andere deel g' . Met behulp van de bovenstaande formule bereken je dan de primitieve. Dit heet **partieel primitiveren**. Als je vastloopt, moet je de f en g' andersom kiezen.

Voorbeeld 2:

$$h(x) = x \sin(x)$$

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= \int x d(-\cos(x)) \\ &= -x \cos(x) - \int -\cos(x) dx \\ &= -x \cos(x) + \sin(x) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\int (f \cdot g') dx &= \int f dg] \\ [f(x) = x \text{ en } g'(x) &= \sin(x)] \end{aligned}$$

K.2 Partieel integreren [1]

Voorbeeld 3:

$$\int x \ln^3(x) dx =$$

$$\int \ln^3(x) d\left(\frac{1}{2}x^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln^3(x) - \int \frac{1}{2}x^2 d(\ln^3(x)) =$$

$$\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln^3(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot 3\ln^2(x) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln^3(x) - \int 1 \frac{1}{2}x \ln^2(x) dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln^3(x) - \int \ln^2(x) d\left(\frac{3}{4}x^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln^3(x) - \frac{3}{4}x^2 \ln^2(x) + \int \frac{3}{4}x^2 d(\ln^2(x)) =$$

$$\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln^3(x) - \frac{3}{4}x^2 \ln^2(x) + \int \frac{3}{4}x^2 \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln^3(x) - \frac{3}{4}x^2 \ln^2(x) + \int 1 \frac{1}{2}x \ln(x) dx =$$

Nog een keer partieel integreren geeft de oplossing.

K.2 Partieel integreren [2]

Voorbeeld 1:

$$\begin{aligned} & \int x^2 \sin(x) dx \\ &= \int x^2 d(-\cos(x)) \\ &= -\cos(x) \cdot x^2 - \int -\cos(x) dx^2 \\ &= -x^2 \cdot \cos(x) + \int 2x \cos(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\int (f \cdot g) dx = \int f dg] \\ & [g'(x) = \sin(x) \text{ en } f(x) = x^2] \\ & \text{partieel integreren} \end{aligned}$$

De functie $x^2 \sin(x)$ kon niet op de normale manier geïntegreerd worden. Na toepassen van partiële integratie kan de functie $2x \cos(x)$ niet op de normale manier geïntegreerd worden. In plaats van een x^2 staat er nu wel een $2x$. Wanneer we de functie $2x \cos(x)$ nu nogmaals partiël integreren, zal deze $2x$ dus een los getal worden. Een functie van de vorm $a \cdot \sin(x)$ kan op de normale manier geïntegreerd worden.

$$\begin{aligned} & -x^2 \cdot \cos(x) + \int 2x \cos(x) dx \\ &= -x^2 \cdot \cos(x) + \int 2x d \sin(x) \\ &= -x^2 \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot 2x - \int \sin(x) d 2x \\ &= -x^2 \cdot \cos(x) + 2x \sin(x) - \int 2 \sin(x) dx \\ &= -x^2 \cdot \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + c \end{aligned}$$

K.2 Partieel integreren [2]

Voorbeeld 2:

$$\begin{aligned} & \int e^x \sin(x) dx \\ &= \int e^x d(-\cos(x)) \\ &= -\cos(x) \cdot e^x + \int \cos(x) de^x \\ &= -e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\int (f \cdot g) dx = \int f dg] \\ & [g'(x) = \sin(x) \text{ en } f(x) = e^x] \\ & \text{partieel integreren} \end{aligned}$$

De functie $e^x \sin(x)$ kon niet op de normale manier geïntegreerd worden. Na toepassen van partiële integratie kan de functie $e^x \cos(x)$ ook niet op de normale manier geïntegreerd worden. We passen nu nogmaals partiële integratie toe.

$$\begin{aligned} &= -e^x \cdot \cos(x) + \int e^x d \sin(x) \\ &= -e^x \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot e^x - \int \sin(x) d e^x \\ &= -e^x \cdot \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^x \sin(x) dx &= -e^x \cdot \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx & [\text{herschrijven}] \\ \int 2e^x \sin(x) dx &= -e^x \cdot \cos(x) + e^x \sin(x) \\ \int e^x \sin(x) dx &= -\frac{1}{2}e^x \cdot \cos(x) + \frac{1}{2}e^x \sin(x) + c \end{aligned}$$

K.2 Partieel integreren [2]

Opgave 27A:

$$\int (x^2 - x)e^x dx =$$

$$\int (x^2 - x)de^x =$$

$$(x^2 - x)e^x - \int e^x d(x^2 - x) =$$

$$(x^2 - x)e^x - \int (2x - 1)e^x dx =$$

$$(x^2 - x)e^x - \int (2x - 1)de^x =$$

$$(x^2 - x)e^x - (2x - 1)e^x + \int e^x d(2x - 1) =$$

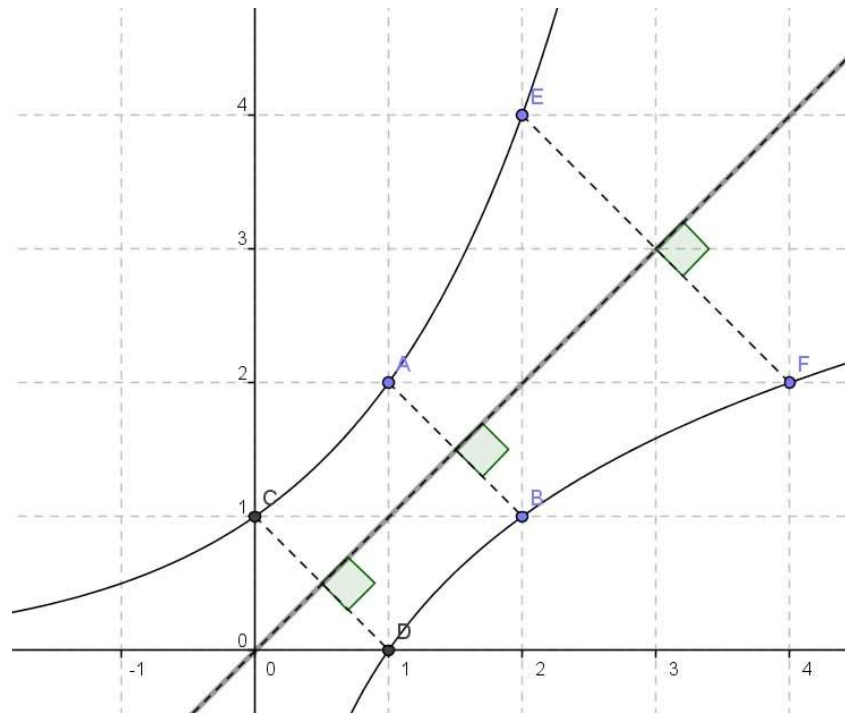
$$(x^2 - x)e^x - (2x - 1)e^x + \int 2e^x dx =$$

$$(x^2 - x)e^x - (2x - 1)e^x + 2e^x + c$$

$$\int_1^3 (x^2 - x)e^x dx = [(x^2 - x)e^x - (2x - 1)e^x + 2e^x]_1^3 = 3e^3 - e$$

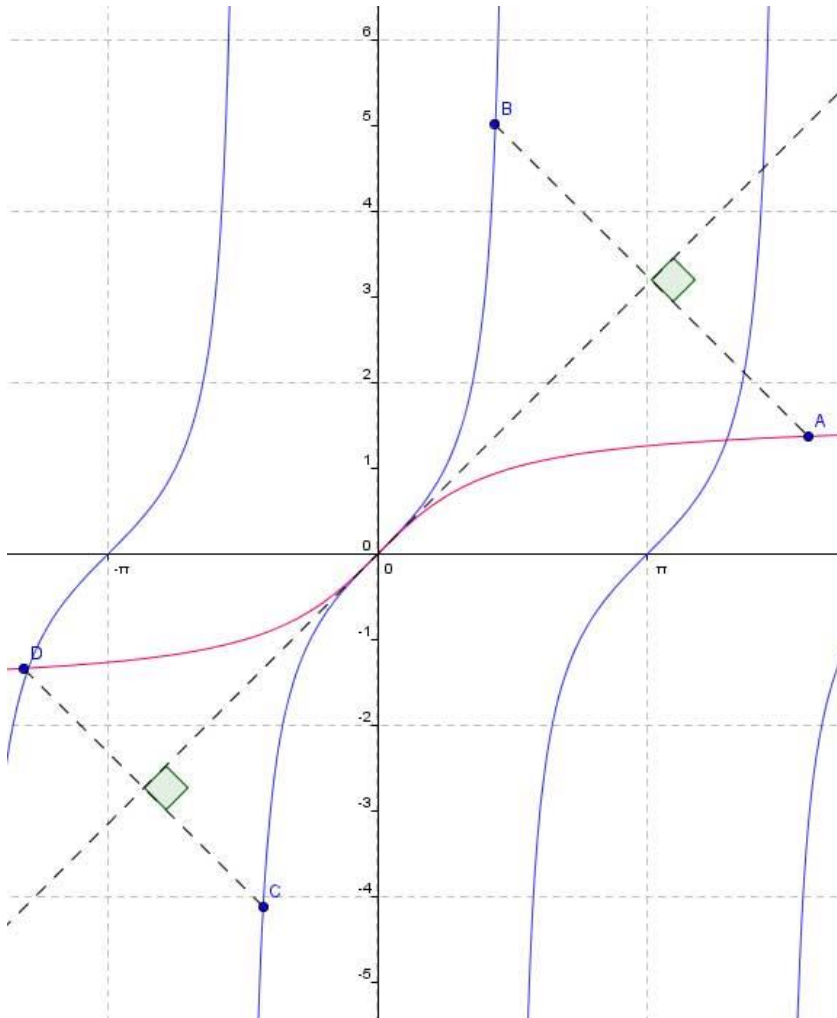
K.3 Cyclometrische functies [1]

Herhaling: In het algemeen geldt: Uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$
Er bestaat dus een verband tussen een machtsfunctie en een logaritmische functie.



De grafieken van $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$ spiegelen in de lijn $y = x$.
We noemen f en g nu **inverse functies**.

K.3 Cyclometrische functies [1]



In het plaatje hiernaast is de blauwe functie $f(x) = \tan(x)$ op het interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ gespiegeld in de lijn $y = x$.

Hierdoor ontstaat de rode **inverse functie** $g(x) = f^{inv}(x) = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ met $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

De inverse functie van een goniometrische formule heet een **cyclometrische** functie.

Let op:

De inverse functie van $\tan(x)$ is dus

$$\text{niet } \frac{1}{\tan(x)} = (\tan(x))^{-1}$$

K.3 Cyclometrische functies [1]

Er geldt:

De functie $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ heeft als primitieve: $F(x) = \arctan(x) + c$

De functie $g(x) = \arctan(x)$ heeft als afgeleide: $g'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Wanneer je een exacte oplossing moet geven bij een goniometrische functie kun je onderstaande tabel gebruiken:

hoek	30°	45°	60°
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tangens	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

Let op:

Op de GR is de arctan te vinden via 2ND | tan

K.3 Cyclometrische functies [1]

Voorbeeld 1:

$$\arctan(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{1}{6}\pi \text{ (of } 30^\circ)$$

$$\text{want } \tan(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\arctan(1) = \frac{1}{4}\pi \text{ (of } 45^\circ)$$

$$\text{want } \tan(\frac{1}{4}\pi) = 1$$

$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi \text{ (of } 60^\circ)$$

$$\text{want } \tan(\frac{1}{3}\pi) = \sqrt{3}$$

Voorbeeld 2:

Los algebraïsch op $\arctan(x) = 1$. Rond het antwoord af op drie decimalen.

$$\arctan(x) = 1$$

$$x = \tan(1)$$

$$x \approx 1,557$$

[$\arctan(x)$ is de inverse functie van $\tan(x)$]

K.3 Cyclometrische functies [1]

Voorbeeld 3:

Differentieer $f(x) = \arctan(x^2 + 1)$

$$f(x) = \arctan(x^2 + 1) = \arctan(u) \text{ met } u = x^2 + 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{u^2 + 1} \cdot 2x = \\ &= \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1} = \\ &= \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2} \end{aligned}$$

[Gebruik de kettingregel]

Voorbeeld 4:

Bereken exact $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{1}{4}\pi - 0 = \frac{1}{4}\pi$$

K.3 Cyclometrische functies [2]

Voorbeeld 1:

Primitiveer de functie $f(x) = \frac{12}{9x^2 + 4}$

Stap 1:

Schrijf de functie in de vorm $\frac{1}{x^2 + 1}$

$$f(x) = \frac{12}{9x^2 + 4} = \frac{3}{\frac{9}{4}x^2 + 1} = \frac{3}{\left(1\frac{1}{2}x\right)^2 + 1} = 3 \cdot \frac{1}{u^2 + 1} \quad \text{met } u = 1\frac{1}{2}x$$

Stap 2:

Primitiveer nu de functie.

$$F(x) = 3 \cdot \arctan(u) \cdot \frac{1}{1\frac{1}{2}} = 2 \cdot \arctan(1\frac{1}{2}x)$$

Let op: Vermenigvuldig de primitieve met $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$ vanwege $u = 1\frac{1}{2}x$

K.3 Cyclometrische functies [2]

Voorbeeld 2:

Primitiveer de functie $f(x) = \arctan(x)$

Gebruik partieel primitiveren

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \arctan(x) dx &= x \cdot \arctan(x) - \int x d \arctan(x) \\&= x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} dx \\&= x \cdot \arctan(x) - \int \frac{1}{x^2 + 1} d(\tfrac{1}{2}x^2) \\&= x \cdot \arctan(x) - \int \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) \quad \text{Neem } x^2 + 1 = u \\&= x \cdot \arctan(x) - \int \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} du \\&= x \cdot \arctan(x) - \tfrac{1}{2} \cdot \ln|u| \\&= x \cdot \arctan(x) - \tfrac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1)\end{aligned}$$

K.3 Cyclometrische functies [2]

Voorbeeld 3:

Bereken exact $\int_0^2 \frac{6}{x^2 - 4x + 8} dx$

Stap 1:

Schrijf de functie in de vorm $\frac{1}{x^2 + 1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{6}{x^2 - 4x + 8} = \frac{6}{x^2 - 4x + 4 + 4} = \frac{6}{(x-2)^2 + 4} = \\ &= \frac{1^{\frac{1}{2}}}{\frac{(x-2)^2}{4} + 1} = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1} = 1^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{u^2 + 1} \end{aligned} \quad \text{met } u = \frac{1}{2}x - 1$$

K.3 Cyclometrische functies [2]

Voorbeeld 3:

Bereken exact $\int_0^2 \frac{6}{x^2 - 4x + 8} dx$

Stap 2:

Primitiveer nu de functie.

$$f(x) = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2 + 1}$$

$$F(x) = 1\frac{1}{2} \cdot \arctan(u) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3 \arctan\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$$

Let op:

Vermenigvuldig de primitieve met $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ vanwege $u = \frac{1}{2}x - 1$

K.3 Cyclometrische functies [2]

Voorbeeld 3:

Bereken exact $\int_0^2 \frac{6}{x^2 - 4x + 8} dx$

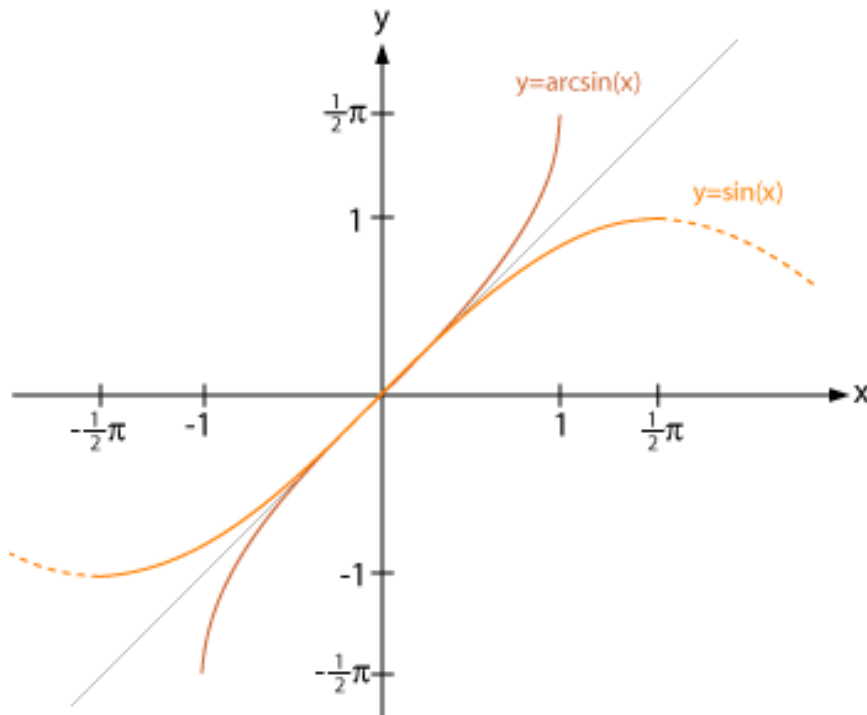
Stap 3:

Bereken nu het gevraagde:

$$\int_0^2 \frac{6}{x^2 - 4x + 8} dx = [3 \arctan(\tfrac{1}{2}x - 1)]_0^2 =$$

$$3 \arctan(0) - 3 \arctan(-1) = 3 \cdot 0 - 3 \cdot -\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{3}{4}\pi$$

K.3 Cyclometrische functies [3]



De inverse van $f(x) = \sin(x)$ met het domein $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ is de functie $g(x) = \arcsin(x)$

$g(x) = \arcsin(x)$ heeft domein $[-1, 1]$ en bereik $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

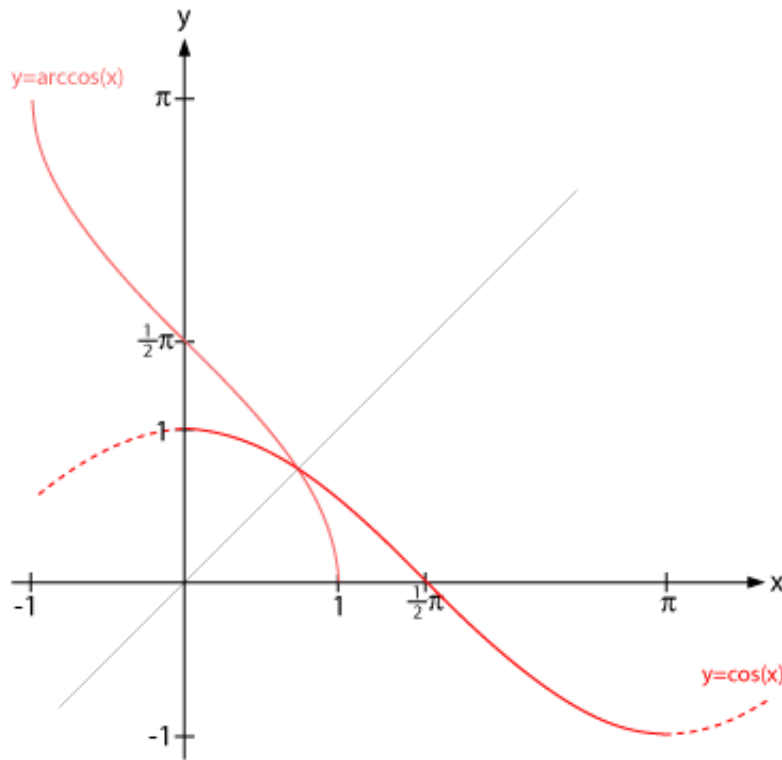
De functie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ heeft als

primitieve: $F(x) = \arcsin(x) + c$

De functie $g(x) = \arcsin(x)$ heeft als

afgeleide: $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

K.3 Cyclometrische functies [3]



De inverse van $f(x) = \cos(x)$
met het domein $[0, \pi]$
is de functie $g(x) = \arccos(x)$

$g(x) = \arcsin(x)$ heeft
Domein $[-1, 1]$ en bereik $[0, \pi]$

De functie $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ heeft als
primitieve: $F(x) = \arccos(x) + C$

De functie $g(x) = \arccos(x)$ heeft als
afgeleide: $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

K.3 Cyclometrische functies [3]

Voorbeeld:

Bereken exact $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4(1-\frac{1}{4}x^2)}} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}} dx =$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}x)^2}} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \arcsin\left(\frac{1}{2}x\right) \right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi$$

K.4 Breuksplitsen [1]

Voorbeeld 1:

De functie $f(x) = 2 + \frac{3}{x+1}$ heeft als integraal $F(x) = 2x + 3\ln|x+1| + c$

De functie $f(x)$ is te schrijven als één breuk door middel van **breuksplitsen**.

$$2 + \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2x+5}{x+1}$$

De functie $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$ valt niet te integreren. Wanneer deze breuk gesplitst wordt, kan wel een integraal berekend worden.

K.4 Breuksplitsen [1]

Voorbeeld 2:

Primitiveer de functie $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$

Stap 1:

Gebruik staartdelen om een functie te krijgen die je kunt primitiveren:

$$\begin{array}{r} x + 1 \ / \quad 2x + 5 \ \backslash \textcolor{blue}{2} \\ \quad \quad 2x + 2 \\ \hline \quad \quad \quad \textcolor{green}{3} \end{array}$$

$$2 \text{ maal } x + 1 = 2(x + 1) = 2x + 2$$

Let op: hierdoor valt de $2x$ weg!!!

De functie $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$ is nu te schrijven als $\textcolor{blue}{2} + \frac{\textcolor{green}{3}}{x+1}$

Stap 2:

Bereken de primitieven van de functie $f(x)$:

$$F(x) = 2x + 3\ln|x + 1| + c$$

K.4 Breuksplitsen [1]

Voorbeeld 3:
Bereken exact $\int_1^4 \frac{2x^2 + 5x + 1}{x + 1} dx$

Stap 1:

Gebruik staartdelen om een functie te krijgen die je kunt primitiveren:

$$\begin{array}{r} x + 1 \ / \quad 2x^2 + 5x + 1 \ \backslash \text{ 2x} \\ \quad \quad 2x^2 + 2x \\ \hline \quad \quad 3x + 1 \end{array}$$

$$2x \text{ maal } x + 1 = 2x(x + 1) = 2x^2 + 2x$$

Let op: Hierdoor valt de $2x^2$ weg.

$$\begin{array}{r} x + 1 \ / \quad 2x^2 + 5x + 1 \ \backslash \text{ 2x + 3} \\ \quad \quad 2x^2 + 2x \\ \hline \quad \quad 3x + 1 \\ \quad \quad 3x + 3 \\ \hline \quad \quad -2 \end{array}$$

$$3 \text{ maal } x + 1 = 3(x + 1) = 3x + 3$$

Let op: Hierdoor valt de $3x$ weg.

K.4 Breuksplitsen [1]

Voorbeeld 3:
Bereken exact $\int_1^4 \frac{2x^2 + 5x + 1}{x + 1} dx$

Stap 1:

Gebruik staartdelen om een functie te krijgen die je kunt primitiveren:

De functie $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x + 1}$ kan dus geschreven worden als:

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{-2}{x + 1}$$

Stap 2:

De primitieven van de functie $f(x) = 2x + 3 - \frac{2}{x + 1}$ zijn:

$$F(x) = x^2 + 3x - 2\ln|x + 1| + c$$

Let op: Staartdelen kan alleen als de graad van de teller groter of gelijk is
Dan de graad van de noemer.

K.4 Breuksplitsen [1]

Voorbeeld 3:
Bereken exact $\int_1^4 \frac{2x^2 + 5x + 1}{x + 1} dx$

Stap 3:

Bereken nu de gevraagde integraal:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{2x^2 + 5x + 1}{x + 1} dx &= \int_1^4 2x + 3 - \frac{2}{x + 1} dx = \\ & \left[x^2 + 3x - 2\ln|x + 1| \right]_1^4 = \\ & (4^2 + 3 \cdot 4 - 2\ln|4 + 1|) - (1^2 + 3 \cdot 1 - 2\ln|1 + 1|) = \\ & 28 - 2\ln|5| - 5 + 2\ln|2| = \\ & 23 - 2\ln|5| + 2\ln|2| \end{aligned}$$

K.4 Breuksplitsen [2]

Voorbeeld 1:

Primitiveer de functie $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+4x+5}$

Let op:

- 1) De discriminant van de noemer ($x^2 + 4x + 5$) is **kleiner dan 0** ($4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$).
Je kunt de noemer niet ontbinden in factoren;
- 1) De afgeleide van $x^2 + 4x + 5$ is $2x + 4$;
- 2) Staartdelen is niet mogelijk.

$$\int \frac{2x-1}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{2x+4-5}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{5}{x^2+4x+5} dx$$

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5} d(x^2+4x+5) =$$

$$\int \frac{1}{u} du = [\ln |u|]$$

$$[\ln |x^2+4x+5|]$$

Door het herschrijven van de functie ontstaan twee breuken die je kunt primitiveren:

- 1) Gebruik de substitutiemethode (breuk 1);
- 2) Primitieve is de natuurlijke log. (breuk 2).

K.4 Breuksplitsen [2]

Voorbeeld 1:

Primitiveer de functie $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+4x+5}$

$$\int -\frac{5}{x^2+4x+5} dx =$$

$$\int -\frac{5}{(x+2)^2+1} dx =$$

$$[-5 \arctan(x+2)]$$

Herleiden van de breuk zorgt dat je de tweede breuk kunt primitiveren.

De primitieve van de functie $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+4x+5}$ wordt nu:

$$F(x) = \ln|x^2+4x+5| - 5 \arctan(x+2) + c$$

K.4 Breuksplitsen [2]

Voorbeeld 2:

Primitiveer de functie $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+4x+4}$

Let op:

- 1) De discriminant van de noemer ($x^2 + 4x + 4$) is **gelijk aan 0** ($4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$);
- 2) De noemer is te schrijven als $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$;
- 3) De teller is te schrijven als $2x - 1 = 2x + 4 - 5 = 2(x + 2) - 5$;
- 4) Staartdelen is niet mogelijk.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^2+4x+4} dx &= \int \frac{2(x+2)-5}{(x+2)^2} dx = \\ \int \frac{2}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2} dx &= \int \frac{2}{x+2} - 5(x+2)^{-2} dx = \\ 2\ln|x+2| + 5(x+2)^{-1} + c\end{aligned}$$

Door het herschrijven van de functie ontstaan twee breuken die je kunt primitiveren.

K.4 Breuksplitsen [3]

Voorbeeld:

Bereken de primitieven van $f(x) = \frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{x+8}{(x-1)(x+2)}$

Let op:

- 1) De discriminant van de noemer ($x^2 + x - 2$) is **groter dan 0** ($1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -2 = 9$).
De noemer kan in factoren ontbonden worden;
- 1) De noemer geschreven worden als $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$;
- 2) Staartdelen is niet mogelijk.

Stap 1:

Merk op dat je deze functie niet kunt primitiveren op de manieren zoals geleerd.

Dit is op te lossen door de functie f als volgt te schrijven: $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

K.4 Breuksplitsen [3]

Stap 1:

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} &= \\ \frac{a(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{b(x-1)}{(x-1)(x+2)} &= \\ \frac{a(x+2) + b(x-1)}{(x-1)(x+2)} &= \\ \frac{ax + 2a + bx - b}{(x-1)(x+2)} &= \\ \frac{(a+b)x + 2a - b}{(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

We kiezen a en b nu zodanig dat $(a+b)x + 2a - b$ gelijk is aan $x + 8$

Er geldt nu: $a + b = 1$ en $2a - b = 8$

K.4 Breuksplitsen [3]

Stap 2:

Los het nu ontstane stelsel van vergelijkingen op:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a - b = 8 \end{cases}$$

----- +

$$3a = 9$$

$$a = 3$$

Invullen van $a = 3$ in $a + b = 1$ geeft $b = -2$.

De vergelijking $f(x) = \frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{x+8}{(x-1)(x+2)}$ kan dus geschreven worden als:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} \text{ met } a = 3 \text{ en } b = -2. \text{ Dit geeft: } f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{-2}{x+2}$$

K.4 Breuksplitsen [3]

Stap 3:

Primitiveer de functie $f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{-2}{x+2}$

$$F(x) = 3 \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + c$$

K.5 Integralen bij parameterkrommen [1]

Bij het rekenen met integralen kun je de volgende regels gebruiken:

$$\int_a^b y dx = - \int_b^a y dx$$

$$\int_a^b y dx + \int_b^c y dx = \int_a^c y dx$$

Bij $\int y dx$ werk je van links naar rechts.

Bij $\int x dy$ werk je van beneden naar boven.

De integraal $\int y dx$ is dan positief als $y \geq 0$ en negatief als $y \leq 0$.

De integraal $\int x dy$ is dan positief als $x \geq 0$ en negatief als $x \leq 0$.

K.5 Integralen bij parameterkrommen [1]

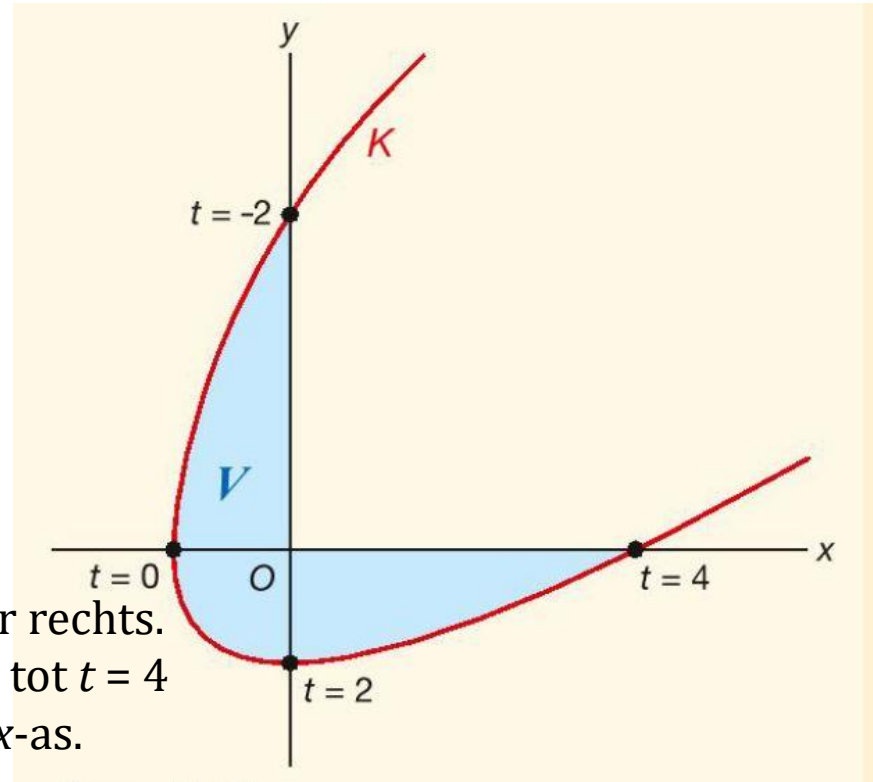
Voorbeeld:

De kromme K is gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2 \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t \end{cases}$$

Het vlakdeel V wordt ingesloten door K , de positieve x -as en de positieve y -as.

Bereken exact de oppervlakte van V .



$$O(V) = \int_{t=0}^{t=-2} y dx - \int_{t=0}^{t=4} y dx$$

$$O(V) = - \int_{t=-2}^{t=0} y dx - \int_{t=0}^{t=4} y dx$$

$$O(V) = - \int_{t=-2}^{t=4} y dx =$$

$$O(V) = \int_{t=4}^{t=-2} y dx =$$

- Van links naar rechts.
Deel van $t = 0$ tot $t = 4$
ligt onder de x -as.

- Omdraaien van de grenzen

- Samenvoegen

- Omdraaien van de grenzen

K.5 Integralen bij parameterkrommen [1]

Voorbeeld:

$$O(V) = \int_{t=4}^{t=-2} y dx = \int_{t=4}^{t=-2} \left(\frac{1}{2} t^2 - 2t \right) d\left(\frac{1}{2} t^2 - 2 \right)$$

$$= \int_{t=4}^{t=-2} \left(\frac{1}{2} t^2 - 2t \right) \cdot t dt$$

$$= \int_{t=4}^{t=-2} \left(\frac{1}{2} t^3 - 2t^2 \right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{8} t^4 - \frac{2}{3} t^3 \right]_4^{-2}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot (-2)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - \left(\frac{1}{8} \cdot 4^4 - \frac{2}{3} \cdot 4^3 \right) =$$

$$2 + \frac{16}{3} - 32 + \frac{128}{3} = 18$$

K.5 Integralen bij parameterkrommen [2]

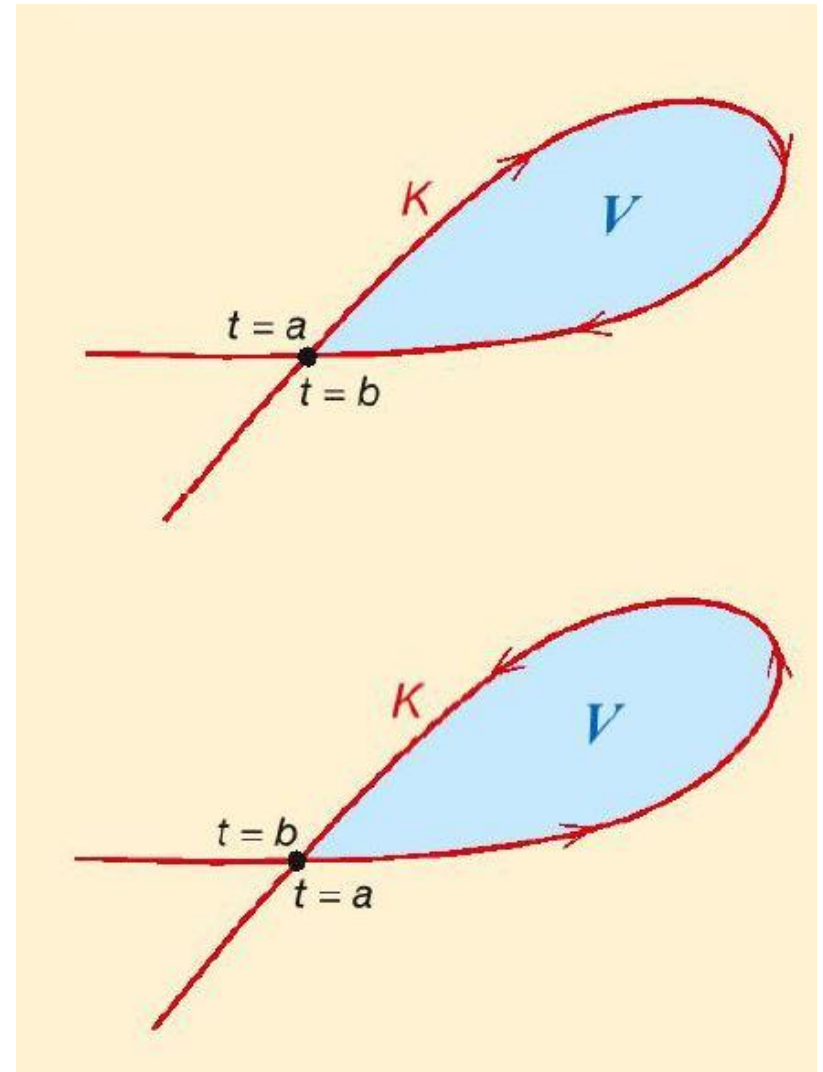
In het bovenste plaatje doorloop t de kromme met de klok mee. De kromme wordt nu in negatieve richting doorlopen.

$$O(V) = \int_{t=a}^{t=b} y dx \quad \text{of} \quad O(V) = \int_{t=b}^{t=a} x dy$$

In het onderste plaatje doorloop t de kromme tegen de klok in. De kromme wordt nu in positieve richting doorlopen.

$$O(V) = \int_{t=b}^{t=a} y dx \quad \text{of} \quad O(V) = \int_{t=a}^{t=b} x dy$$

Kies steeds de integraal die het eenvoudigst te berekenen is.



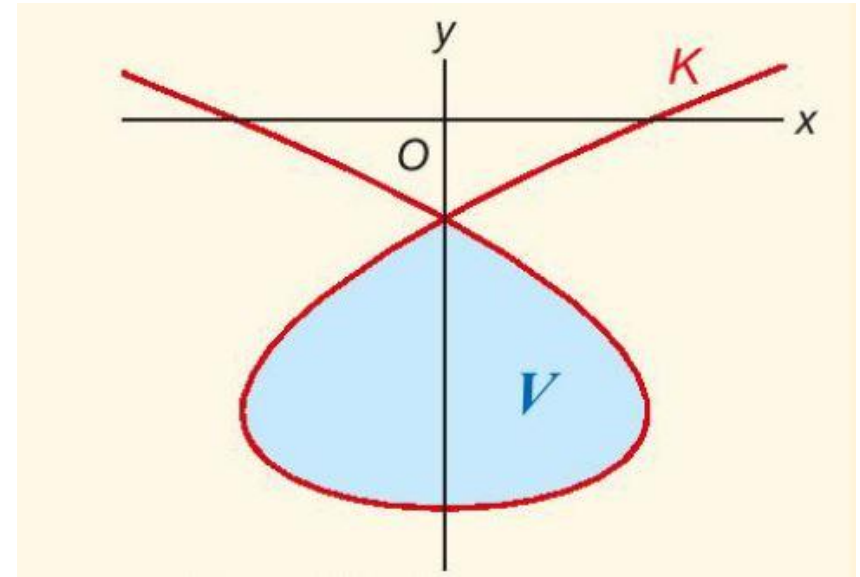
K.5 Integralen bij parameterkrommen [2]

De kromme K die gegeven is door

$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$$

Sluit het vlakdeel V in.

Bereken exact de oppervlakte van V .



Stap 1:

Bepaal welke integraal het eenvoudigst is om uit te rekenen:

$$\int x dy = \int (3t - t^3) d(t^2 - 4) = \int (3t - t^3) \cdot 2t dt = \int (6t^2 - 2t^4) dt$$

$$\int y dx = \int (t^2 - 4) d(3t - t^3) = \int (t^2 - 4) \cdot (3 - 3t^2) dt = \int (15t^2 - 3t^4 - 12) dt$$

Hieruit volgt dat de bovenste integraal het eenvoudigst is om uit te rekenen.

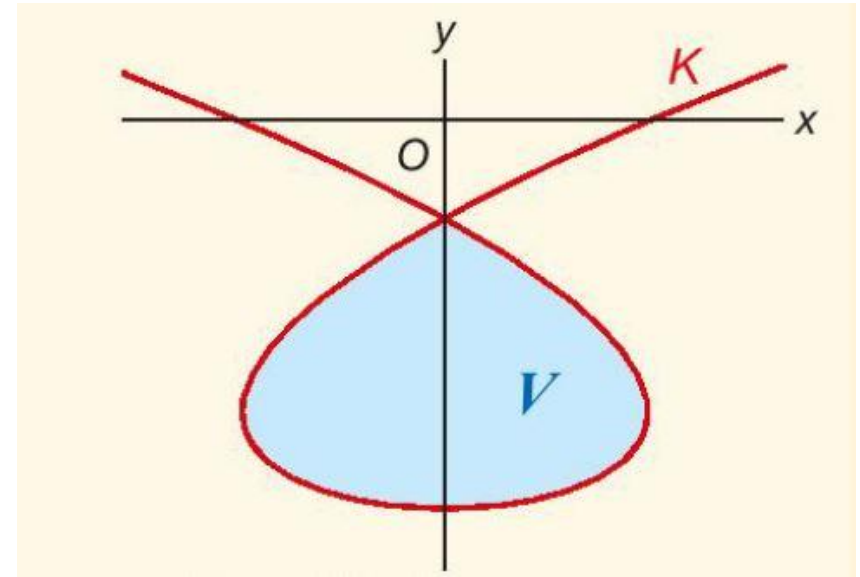
K.5 Integralen bij parameterkrommen [2]

De kromme K die gegeven is door

$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$$

Sluit het vlakdeel V in.

Bereken exact de oppervlakte van V .



Stap 2:

Bereken de grenzen van de integraal en onderzoek de richting:

$$3t - t^3 = 0$$

$$t(3 - t^2) = 0$$

$$t = 0 \vee t^2 = 3$$

$$t = 0 \vee t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3}$$

Invullen van $t = 1$ geeft het **punt (2, -3)**, dus V wordt in positieve richting doorlopen.

K.5 Integralen bij parameterkrommen [2]

De kromme K die gegeven is door

$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$$

Sluit het vlakdeel V in.

Bereken exact de oppervlakte van V .

Stap 3:

Bereken de integraal:

$$\begin{aligned} \int_{t=-\sqrt{3}}^{t=\sqrt{3}} (6t^2 - 2t^4) dt &= \left[2t^3 - \frac{2}{5}t^5 \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\ 2 \cdot 3\sqrt{3} - \frac{2}{5} \cdot 9\sqrt{3} - (2 \cdot -3\sqrt{3} - \frac{2}{5} \cdot 9\sqrt{3}) &= \\ 6\sqrt{3} - \frac{18}{5}\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \frac{18}{5}\sqrt{3} &= 4\frac{4}{5}\sqrt{3} \end{aligned}$$

