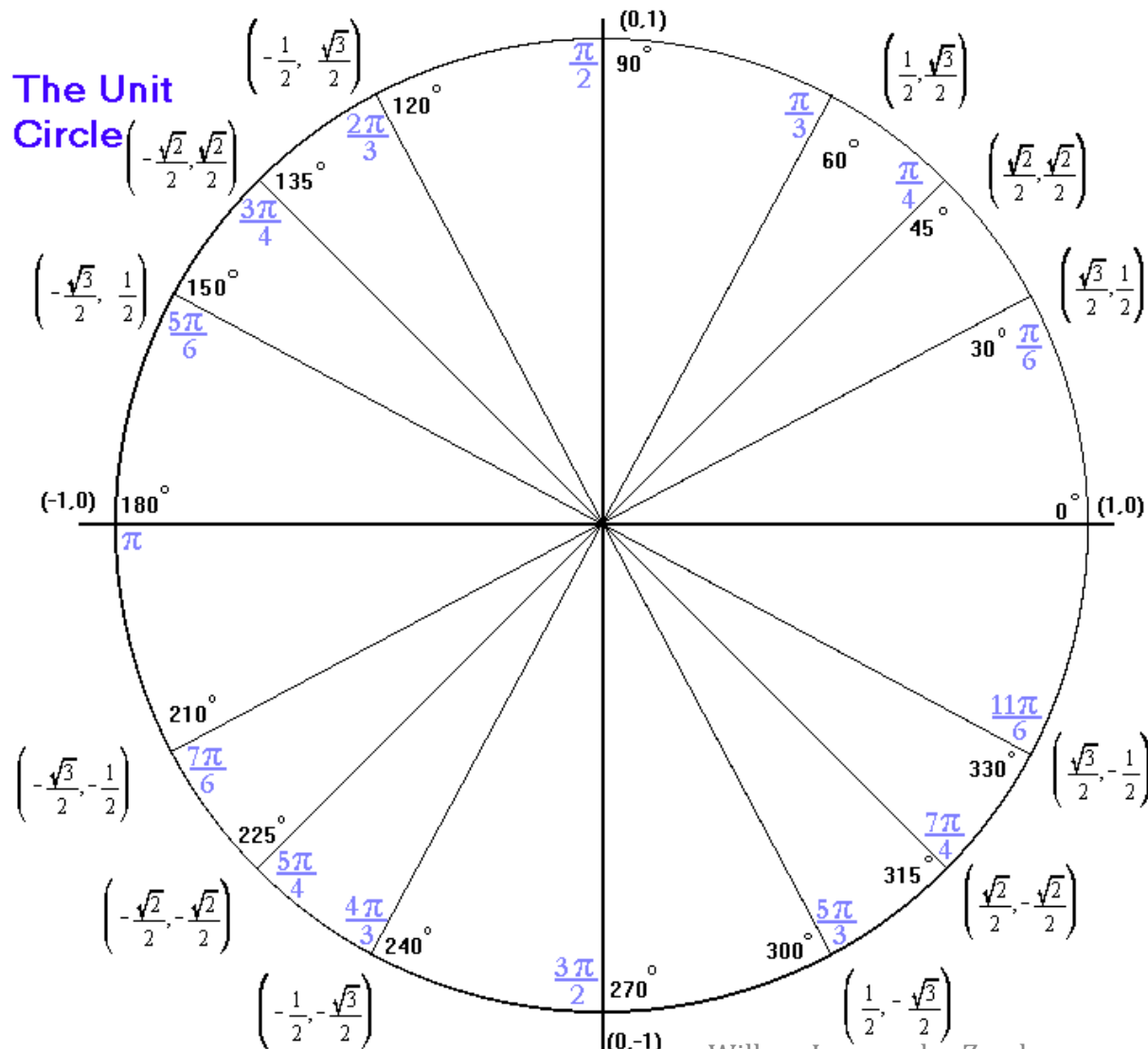


10.0 Voorkennis



$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

[cos is x-coördinaat]

$$\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

[sin is y-coördinaat]

10.0 Voorkennis

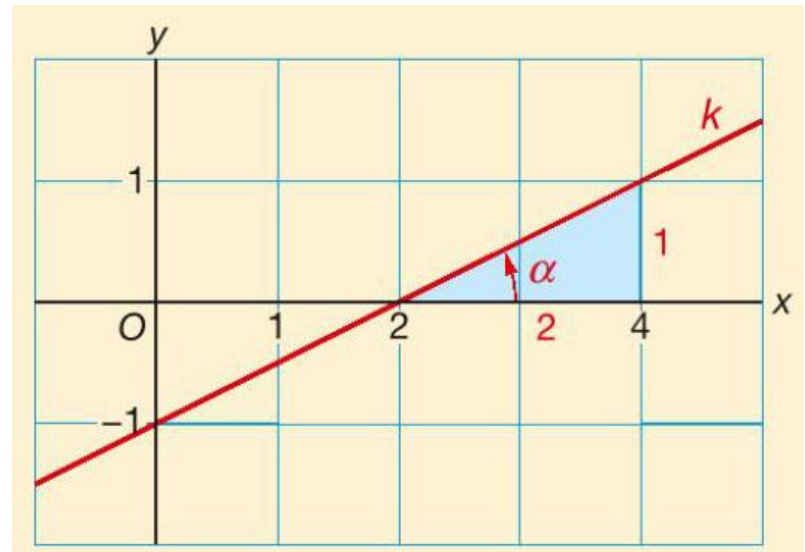
Voorbeeld 1:

Getekend is de lijn k : $y = \frac{1}{2}x - 1$.

De richtingshoek α van de lijn k is te berekenen met:

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 0,464 (= \alpha)$$



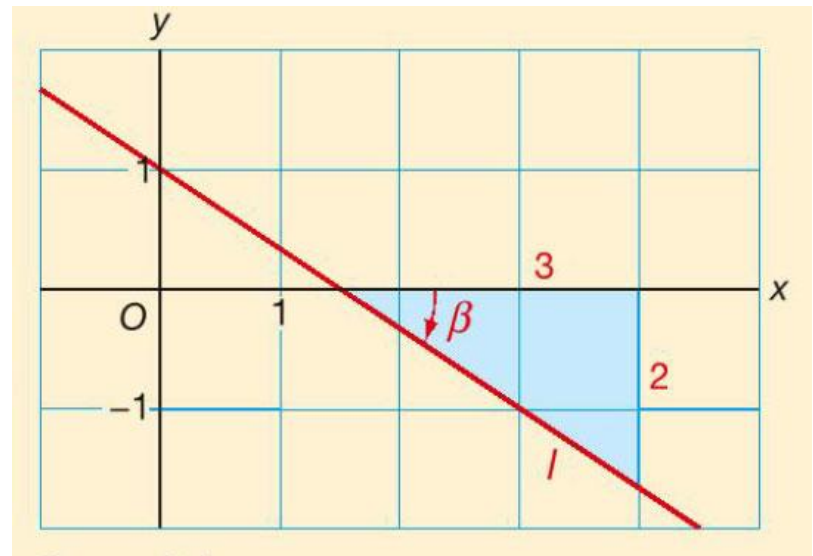
Voorbeeld 2:

Getekend is de lijn l : $y = -\frac{2}{3}x + 1$

De richtingshoek β van de lijn l is te berekenen met:

$$\tan(\beta) = -\frac{2}{3}$$

$$\tan^{-1}(-\frac{2}{3}) \approx -0,588 (= \beta)$$



10.1 Rekenen met complexe getallen [1]

Natuurlijke getallen:

Dit zijn alle positieve gehele getallen en nul.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

Het symbool voor de natuurlijke getallen is

$\mathbb{N}$

Gehele getallen:

Dit zijn alle gehele getallen.

....., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

Het symbool voor de gehele getallen is

$\mathbb{Z}$

10.1 Rekenen met complexe getallen [1]

Rationale getallen:

Dit zijn alle gehele getallen en alle breuken.



Er zijn twee soorten breuken:

1. Breuken met een eindig aantal decimalen:

$$\frac{1}{4} = 0,25 \quad \frac{1}{8} = 0,125 \quad \frac{1}{32} = 0,03125$$

2. Breuken met een oneindig aantal decimalen, die zich steeds herhalen:

$$\frac{1}{3} = 0,3333..... = 0,\overline{3}$$

$$\frac{9}{11} = 0,81818181.... = 0,\overline{81}$$

$$\frac{5}{7} = 0,714285714285..... = 0,\overline{714285}$$

10.1 Rekenen met complexe getallen [1]

Irrationale getallen:

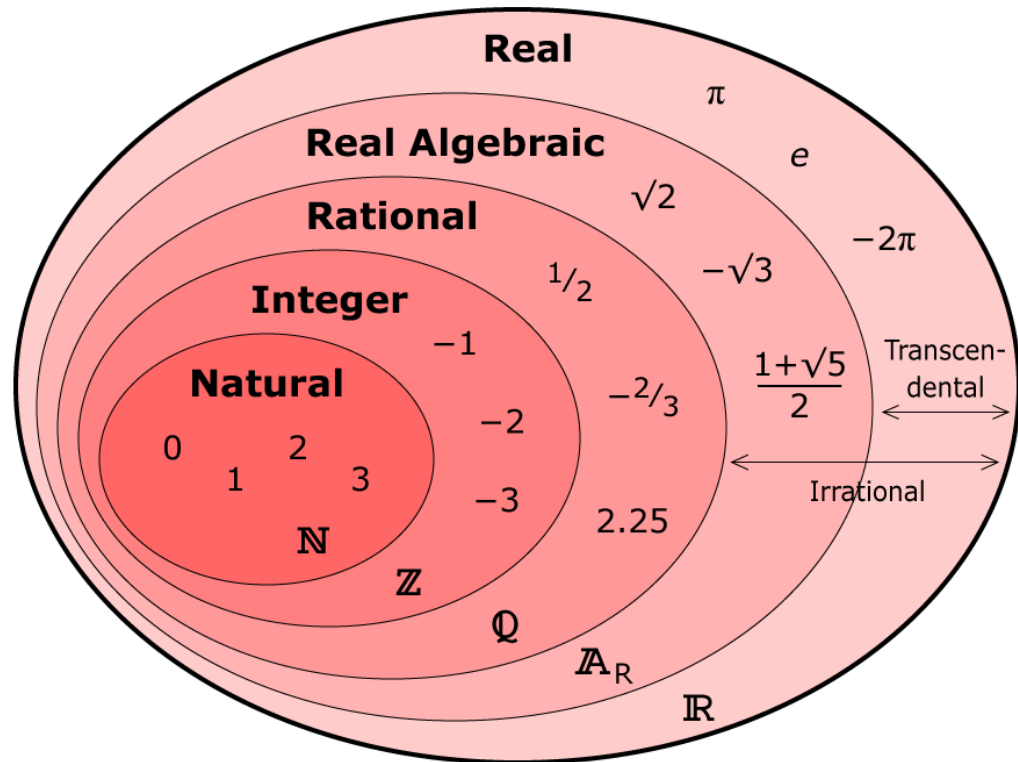
Dit zijn alle getallen met oneindig veel decimalen, waarbij de decimalen zich niet herhalen. Een irrationaal getal is dus niet te schrijven als een breuk.

Getallen zoals $\sqrt{2}$ en π zijn irrationale getallen.

Reële getallen:

Dit zijn alle rationale en irrationale getallen bij elkaar.

Dit is de verzameling van alle getallen die bestaan en op de getallenlijn liggen.



10.1 Rekenen met complexe getallen [2]

Voorbeeld 1:

De vergelijking $x^2 = -1$ heeft geen oplossing in IR.

Er wordt afgesproken dat vanaf nu geldt: $i^2 = -1$.

$$x^2 = -1$$

$$x^2 = i^2$$

$$x = i \text{ of } x = -i$$

Voorbeeld 2:

$(2x - 4)^2 = -5$ heeft geen oplossing in IR.

Met behulp van $i^2 = -1$ is deze vergelijking wel op te lossen.

$$(2x - 4)^2 = -5$$

$$(2x - 4)^2 = 5 \cdot i^2$$

$$2x - 4 = \sqrt{5} \cdot i \quad \text{of} \quad 2x - 4 = -\sqrt{5} \cdot i$$

$$2x = 4 + i\sqrt{5} \quad \text{of} \quad 2x = 4 - i\sqrt{5}$$

$$x = 2 + \frac{1}{2}i\sqrt{5} \quad \text{of} \quad x = 2 - \frac{1}{2}i\sqrt{5}$$

De twee uitkomsten zijn voorbeelden van **complexe getallen**.

10.1 Rekenen met complexe getallen [2]

Algemeen:

Een getal van de vorm $a + bi$ met a en b reële getallen en met $i^2 = -1$ heet een complex getal.

De twee uitkomsten zijn voorbeelden van **complexe getallen**.

a is het **reële deel** van het complexe getal.

b is het **imaginaire deel** van het complexe getal.

Een complex getal van de vorm bi is een zuiver imaginair getal.

Je gebruikt bij het rekenen met complexe getallen dezelfde rekenregels als je tot nu toe gebruikt hebt bij het rekenen met reële getallen.

De verzameling van de complexe getallen wordt aangegeven met $\mathbb{C}$.

De reële getallen zijn een deelverzameling van de complexe getallen.

10.1 Rekenen met complexe getallen [2]

Voorbeeld 3:

Los op in $\mathbb{C}$

$$2x + 3i = 5x + 6i$$

$$-3x = 3i$$

$$x = -i$$

Voorbeeld 4:

Los op in $\mathbb{C}$

$$4x^2 + 12x + 15 = 0$$

$$4x^2 + 12x + 9 + 6 = 0$$

$$(2x + 3)^2 + 6 = 0$$

$$(2x + 3)^2 = -6$$

$$(2x + 3)^2 = 6i^2$$

$$2x + 3 = i\sqrt{6} \quad \text{of}$$

$$2x + 3 = -i\sqrt{6}$$

$$2x = -3 + i\sqrt{6} \quad \text{of}$$

$$2x = -3 - i\sqrt{6}$$

$$x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{6} \quad \text{of}$$

$$x = -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{6}$$

10.1 Rekenen met complexe getallen [3]

Voorbeeld 1:

Herleid tot de vorm $a + bi$

$$\begin{aligned}(2 + 4i) - (1 + i) &= \\ 2 + 4i - 1 - i &= \\ 1 - 3i &\end{aligned}$$

Voorbeeld 2:

Herleid tot de vorm $a + bi$

$$\begin{aligned}(2 + 4i) \cdot (1 + i) &= \\ 2 + 2i + 4i + i^2 &= \\ 2 + 6i - 4 &= \\ -2 + 6i &\end{aligned}$$

10.1 Rekenen met complexe getallen [3]

Voorbeeld 3:

Herleid tot de vorm $a + bi$

$$\frac{2 + 4i}{3 + 4i} =$$

$$\frac{2 + 4i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} =$$

$$\frac{6 - 8i + 12i - 16i^2}{9 - 16i^2}$$

$$\frac{6 + 4i + 16}{9 + 16} =$$

$$\frac{22 + 4i}{25} = \frac{22}{25} + \frac{4}{25}i$$

10.1 Rekenen met complexe getallen [4]

Gegeven is het complexe getal $z = a + bi$

Het reële deel a van dit complexe getal wordt genoteerd met $\text{Re}(z)$

Het imaginaire deel b van dit complexe getal wordt genoteerd met $\text{Im}(z)$

De geconjugeerde van dit complexe getal is $a - bi$ (of $\bar{z} = \overline{a + bi}$)

Voorbeeld:

$$z \cdot \bar{z}$$

$$(a + bi) \cdot \overline{(a + bi)} =$$

$$(a + bi) \cdot (a - bi) =$$

$$a^2 - abi + abi - b^2 i^2 =$$

$$a^2 + b^2 =$$

$$(\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$$

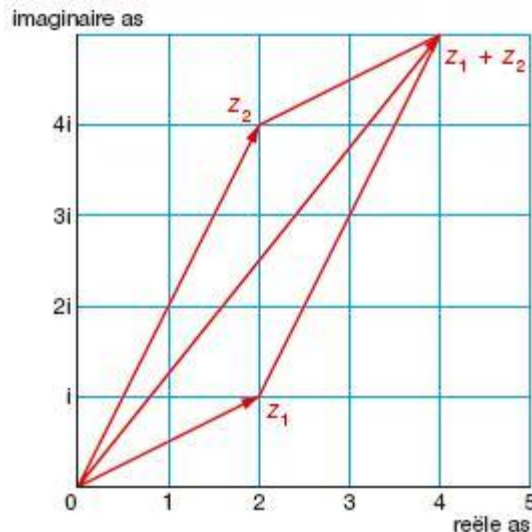
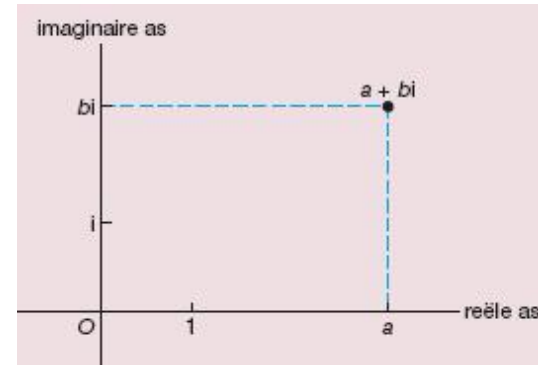
10.2 Het complexe vlak [1]

Hiernaast is het complexe getal $a + bi$ getekend in een assenstelsel.

De horizontale as is de **reële as**.

De verticale as is de **imaginaire as**.

Dit **complexe vlak** wordt ook wel het **vlak van Gauss** of een **Argand-diagram** genoemd.



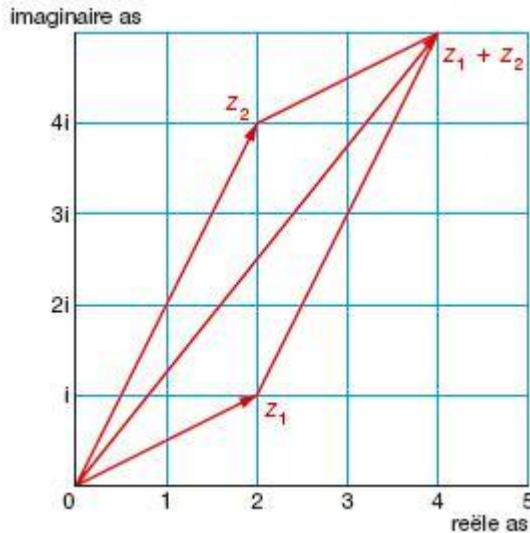
Hiernaast worden **vectoren** gebruikt om twee complexe getallen bij elkaar op te tellen.

$$z_1 = 2 + i \quad z_2 = 2 + 4i$$

$$z_1 + z_2 = 2 + i + 2 + 4i = 4 + 5i (= z)$$

Er ontstaat nu een **parallellogram-constructie**

10.2 Het complexe vlak [1]



De lengte van de vector (ook **modulus** of **absolute waarde**) die bij het complexe getal z hoort, is te berekenen met de stelling van Pythagoras:

$$|z| = |4 + 5i| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$|z_1| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$|z_2| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Let op 1: Er geldt nu: $|z| \neq |z_1 + z_2|$

(Dit is over het algemeen zo)

Let op 2: Er geldt nu: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(Te bewijzen in opgave 20)

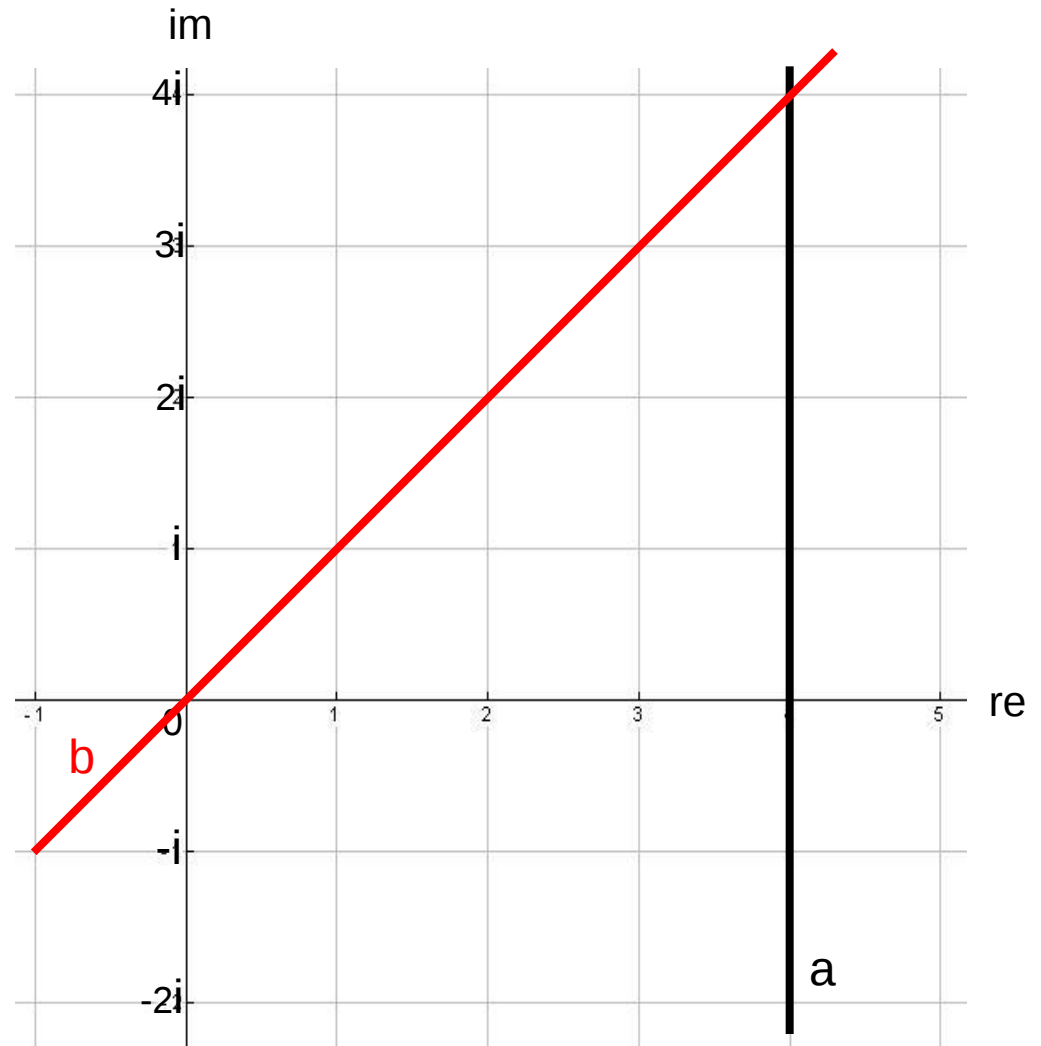
Let op 3: Er geldt nu: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(Te bewijzen in opgave 21)

10.2 Het complexe vlak [1]

De lijn a beschrijft alle
getallen z waarvoor geldt:
 $\operatorname{Re}(z) = 4$

De lijn b beschrijft alle
getallen z waarvoor geldt:
 $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$



10.2 Het complexe vlak [2]

In het assenstelsel is het complexe getal $z_1 = 1 + i$ getekend.

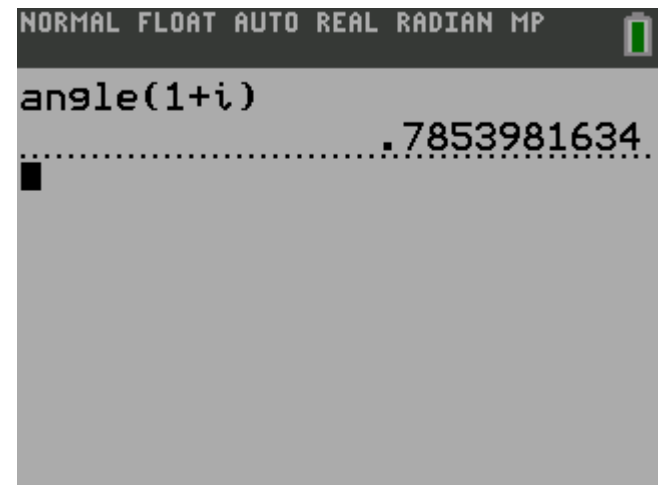
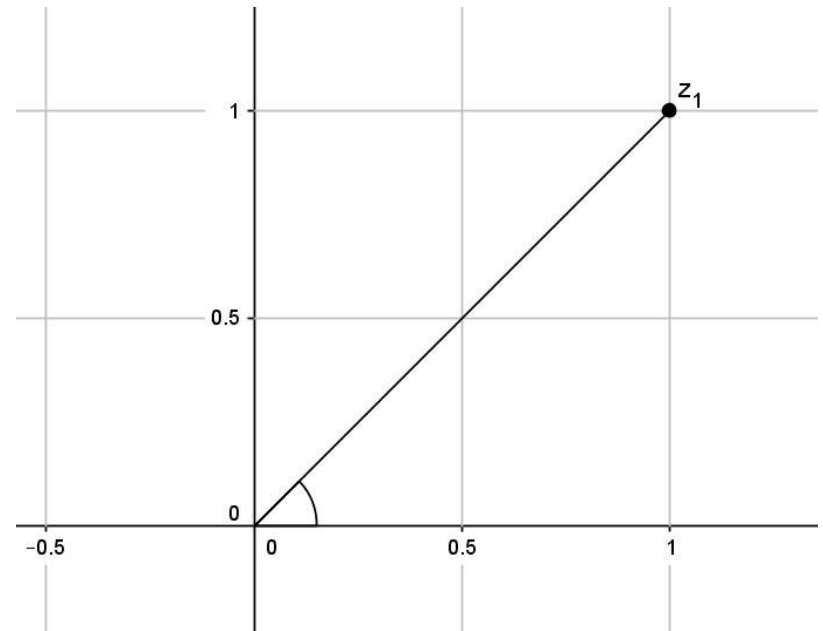
Hierbij hoort een **draaiingshoek** (φ) of **argument** ($\text{Arg}(z_1)$) van $\frac{1}{4}\pi$.

Het argument tussen $-\pi$ en π is de **hoofdwaarde van het argument**.

Alle waarden voor het argument van het complexe getal z_1 zijn: $\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ waarbij k een geheel getal is.

Op de GR kun het argument berekenen via
MATH | CMPLX | 4: ANGLE

De letter i krijg je met 2ND | $\cdot$



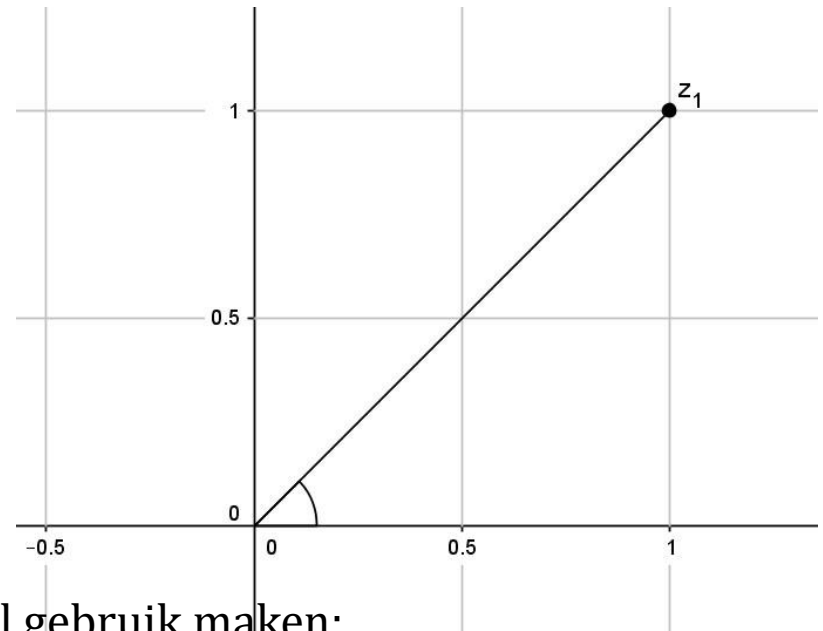
10.2 Het complexe vlak [2]

In het assenstelsel is het complexe getal $z_1 = 1 + i$ getekend.

In bepaalde gevallen kun je het argument ook exact berekenen.

Zo geldt voor het complexe getal wat hier naast getekend is:

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}\pi$$



Hiervoor kun je van de onderstaande tabel gebruik maken:

hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

In dit geval is de modulus gelijk aan: $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

10.2 Het complexe vlak [2]

Voorbeeld:

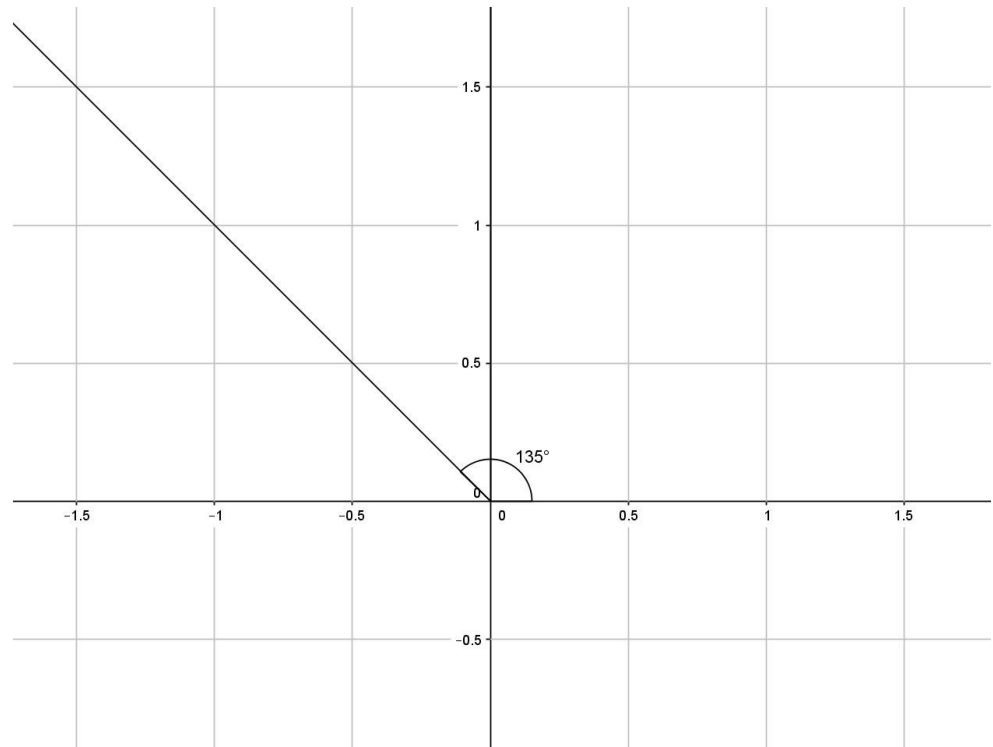
Teken de getallen z waarvoor geldt:

$$\frac{1}{2}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3}{4}\pi \wedge 1 \leq |z| \leq 1,5$$

Stap 1:

Teken één lijnstuk dat begint in de oorsprong met een hoek van $\frac{1}{2}\pi$ radialen t.o.v. de reële as.

Teken één lijnstuk dat begint in de oorsprong met een hoek van $\frac{3}{4}\pi$ radialen t.o.v. de reële as.



10.2 Het complexe vlak [2]

Voorbeeld:

Teken de getallen z waarvoor geldt:

$$\frac{1}{2}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3}{4}\pi \wedge 1 \leq |z| \leq 1,5$$

Stap 2:

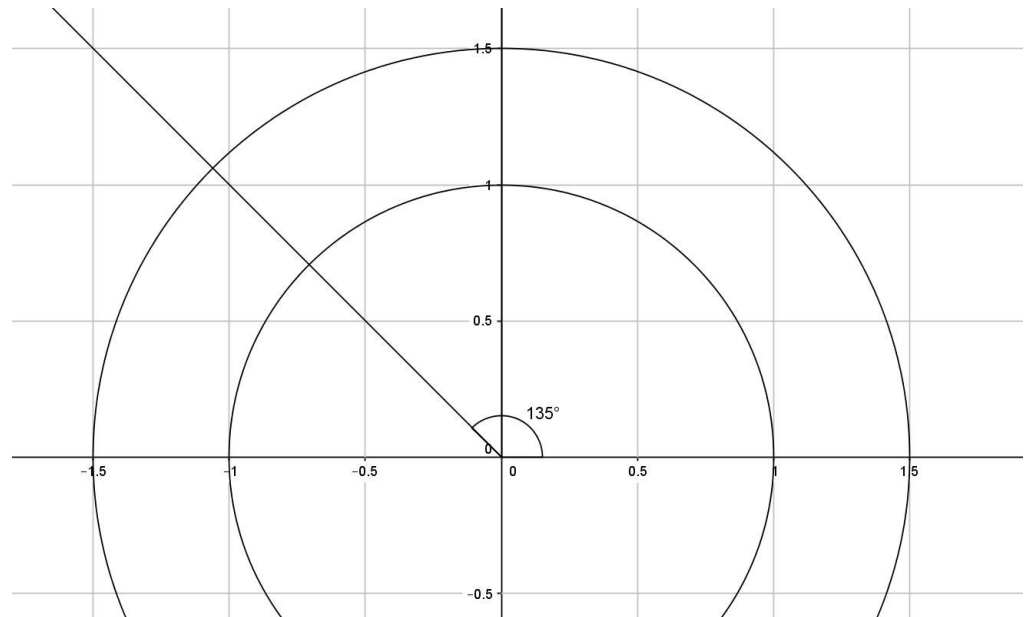
Alle punten die voldoen aan $|z| = 1$ liggen op een afstand 1 van de oorsprong.

Teken een cirkel met middelpunt O en straal 1.

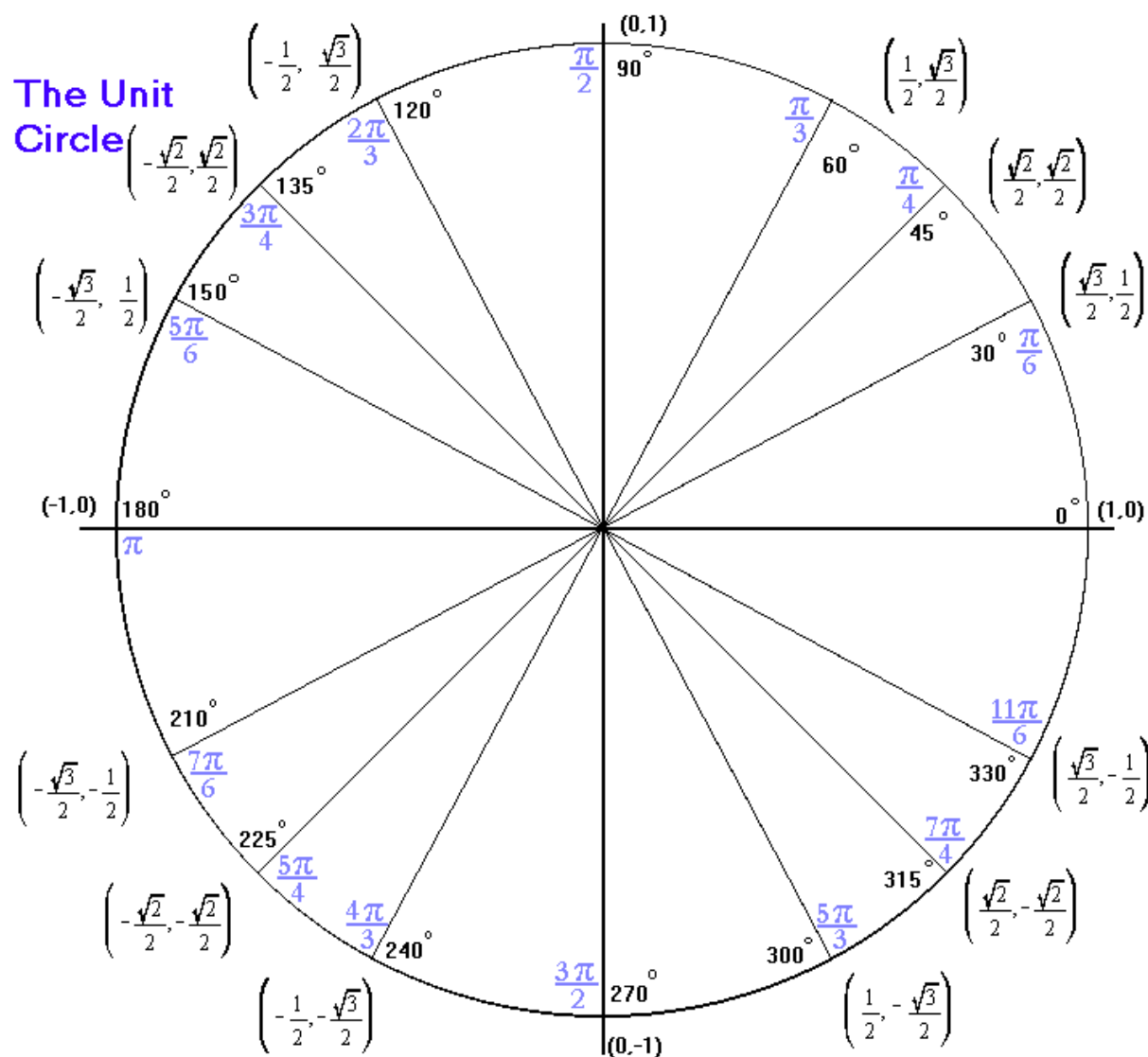
Teken een cirkel met middelpunt O en straal 2.

Stap 3:

Markeer het gezochte gebied.



10.2 Het complexe vlak [2]



10.3 Poolcoördinaten en de formule van Euler [1]

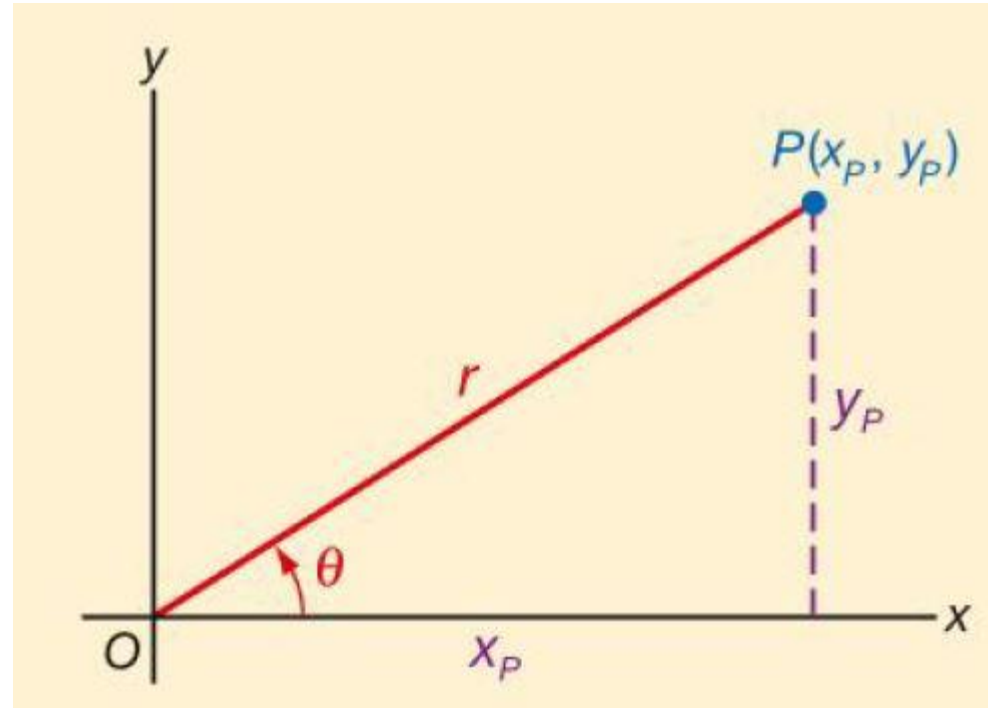
In het plaatje hiernaast is een rechthoekige driehoek te zien. Hieruit volgen:

$$\cos(\theta) = \frac{x_p}{r} \Leftrightarrow x_p = r \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_p}{r} \Leftrightarrow y_p = r \sin(\theta)$$

r is de afstand van het punt

tot de oorsprong. $r = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$



De **poolcoördinaten** (r, θ) van het punt P zijn:

- de afstand r van O tot P .
- de draaiingshoek θ van het lijnstuk OP met $-\pi < \theta < \pi$.

De “normale” x - en y -coördinaten worden de **cartesische coördinaten** genoemd.

10.3 Poolcoördinaten en de formules van Euler [1]

Voorbeeld 1:

Gegeven is het punt A met poolcoördinaten $(2, -\frac{1}{3}\pi)$

Bereken exact de cartesische coördinaten van A .

$$x_A = r \cos(\theta) = 2 \cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y_A = r \sin(\theta) = 2 \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Voorbeeld 2:

Gegeven is het punt B met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$

Bereken exact de poolcoördinaten van B .

$$r = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y_p}{x_p} = \frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{3}$$

Hieruit volgt $\theta = \frac{2}{3}\pi$

10.3 Poolcoördinaten en de formules van Euler [2]

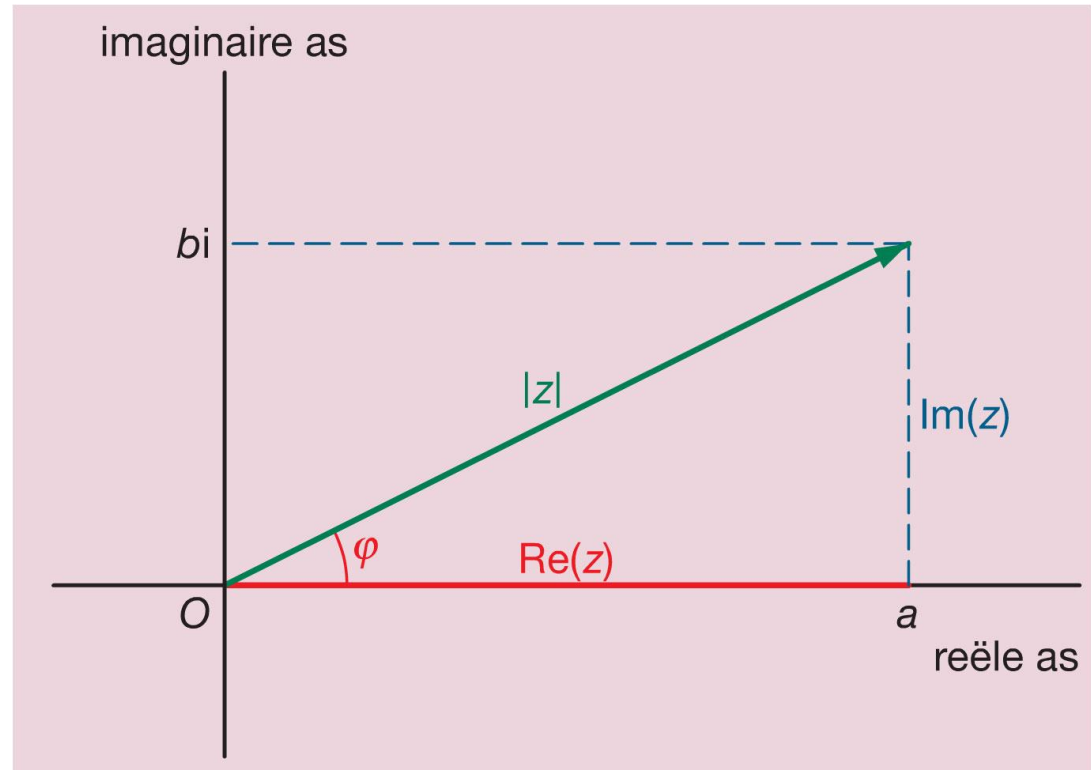
In het plaatje hiernaast
is een rechthoekige
driehoek te zien.
Hieruit volgen:

$$\sin(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\varphi)$$

$|z|$ is de afstand van het punt
tot de Oorsprong.

We noemen deze afstand nu r .



Het reële en imaginaire deel van het complexe getal z zijn nu te schrijven als:

$$\operatorname{Re}(z) = r \cos(\varphi) \text{ en } \operatorname{Im}(z) = r \sin(\varphi).$$

r ($= |z|$) en φ ($= \arg(z)$) zijn de **poolcoördinaten** van het complexe getal z .

10.3 Poolcoördinaten en de formule van Euler [2]

Het complexe getal $z = a + bi$ kan genoteerd worden m.b.v. poolcoördinaten:

$$z = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi) = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Voorbeeld:

Schrijf $z = 3 - 4i$ met poolcoördinaten. Rond het argument zo nodig af op 2 decimalen.

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\varphi = \arg(z) = \arg(3 - 4i) \approx -0,93$$

(Gebruik de GR!!!)

Hieruit volgt: $z = 5(\cos(-0,93) + i \sin(-0,93))$

10.3 Poolcoördinaten en de formule van Euler [3]

Formule van Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + f'''(0) \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!} + R_n$$

In deze **reeksontwikkeling** is R_n de **restterm**.

Nu wordt alleen gekeken naar situaties waarin de restterm nadert tot nul voor grote waarden van n .

Voorbeeld:

Stel met behulp van de formule van Maclaurin de reeksontwikkeling op van

$$f(x) = e^x$$

[Voor bv. $\sin(x)$ en $\cos(x)$ kun je dit ook doen]

$$f(x) = e^x, \text{ dus } f(0) = e^0 = 1$$

$$f(x) = e^x, \text{ dus } f'(x) = e^x \text{ en } f'(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x, \text{ dus } f''(x) = e^x \text{ en } f''(0) = e^0 = 1$$

$$e^x = 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

10.3 Poolcoördinaten en de formules van Euler [3]

Notatie 1 Complex getal:

Een getal van de vorm $z = a + bi$ met a en b reële getallen en met $i^2 = -1$ heet een complex getal.

De twee uitkomsten zijn voorbeelden van **complexe getallen**.

a is het **reële deel** van het complexe getal ($\text{Re}(z)$).

b is het **imaginaire deel** van het complexe getal ($\text{Im}(z)$)

Een complex getal van de vorm bi is een zuiver imaginair getal.

Je gebruikt bij het rekenen met complexe getallen dezelfde rekenregels als je tot nu toe gebruikt hebt bij het rekenen met reële getallen.

10.3 Poolcoördinaten en de formules van Euler [3]

Notatie 2 Complex getal:

Het complexe getal $z = a + bi$ kan genoteerd worden m.b.v. poolcoördinaten:

$$z = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi) = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \text{ met } r = |z| \text{ en } \varphi = \arg(z)$$

Voorbeeld 1:

Schrijf $z = 3 - 4i$ met poolcoördinaten. Rond het argument zo nodig af op 1 decimaal.

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\varphi = \arg(z) = \arg(3 - 4i) \approx -0,93$$

(Gebruik de GR!!!)

Hieruit volgt: $z = 5(\cos(-0,93) + i \sin(-0,93))$

10.3 Poolcoördinaten en de formule van Euler [3]

Notatie 3 Complex getal:

Het complexe getal z met $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$ kan ook genoteerd worden als:

$$z = r e^{i\varphi}$$

De formule van Euler is: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$

Voorbeeld 2:

Schrijf het getal $z = 3e^{2i}$ in de vorm $z = a + bi$. Rond a en b af op twee decimalen.

$$z = 3e^{2i} = 3(\cos(2) + i \sin(2)) = 3 \cos(2) + 3i \sin(2) \approx -1,25 + 2,73i$$

10.3 Poolcoördinaten en de formule van Euler [3]

Notatie 3 Complex getal:

Het complexe getal z met $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$ kan ook genoteerd worden als:

$$z = r e^{i\varphi}$$

De formule van Euler geldt: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$

Voorbeeld 3:

Schrijf het getal $z = 2 - i$ in de vorm $z = r e^{i\varphi}$. Rond φ af op twee decimalen.

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\arg(2 - i) \approx -0,46$$

Hieruit volgt: $z \approx \sqrt{5} e^{-0,46i}$

10.4 Complexe e-machten en complexe wortels[1]

Algemeen:

De rekenregels voor e-machten gelden ook voor complexe e-machten.

Voorbeeld 1:

Schrijf in de vorm $r e^{i\varphi}$ en geef een exact antwoord.

$$(2 + 2i)(1 - i\sqrt{3})$$

Met behulp van de GR volgt $\text{angle}(2 + 2i) = \frac{1}{4}\pi \text{ rad}$ en $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Met behulp van de GR volgt $\text{angle}(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\pi \text{ rad}$ en $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$$(2 + 2i)(1 - i\sqrt{3}) = 2\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i} \cdot 2e^{-\frac{1}{3}\pi i} = 4\sqrt{2}e^{-\frac{1}{12}\pi i}$$

10.4 Complexe e-machten en complexe wortels[1]

Algemeen:

De rekenregels voor e-machten gelden ook voor complexe e-machten.

Voorbeeld 2:

Schrijf in de vorm $r e^{i\varphi}$ en geef een exact antwoord.

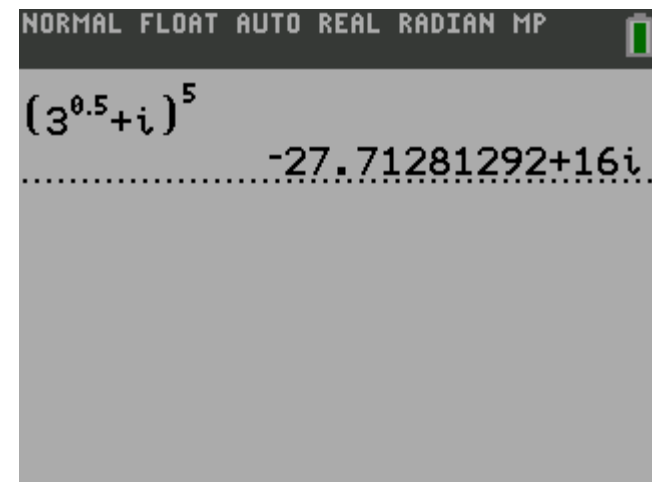
$$(\sqrt{3} + i)^5$$

Met behulp van de GR volgt $\text{angle}(\sqrt{3} + i) = \frac{1}{6}\pi$ rad en $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$$(\sqrt{3} + i)^5 = (2e^{\frac{1}{6}\pi i})^5 = 32e^{\frac{5}{6}\pi i}$$

Let op:

Als je $(\sqrt{3} + i)^5$ uitreken met de GR krijg je als antwoord $-27,71 + 16i$. Wanneer om een niet exact antwoord gevraagd wordt, is dit het antwoord.



10.4 Complexe e-machten en complexe wortels[2]

Voorbeeld 1:

Stel de directe formule op bij de rij $u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 4$

Stap 1:

Substitueer $u_n = g^n$ en herleid de vergelijking tot de vorm $g^2 - ag - b = 0$.

$$g^n = g^{n-1} + 2g^{n-2}$$

$$g^2 = g + 2$$

$$g^2 - g - 2 = 0$$

Stap 2:

Los de nu ontstane vergelijking op:

$$(g - 2)(g + 1) = 0$$

$$g = 2 \vee g = -1$$

Let op:

Dit is een vergelijking met **twee reële** oplossingen. Bij gebruik van de discriminantmethode krijg je $D > 0$.

10.4 Complexe e-machten en complexe wortels[2]

Voorbeeld 1:

Stel de directe formule op bij de rij $u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 4$

Stap 3:

Stel nu $u_n = A \cdot (g_1)^n + B \cdot (g_2)^n$ en bereken A en B door de startwaarden u_0 en u_1 te gebruiken. g_1 en g_2 zijn de gevonden oplossingen uit stap 2.

[Bij één oplossing bij stap 2 ($D = 0$) geldt: $u_n = (A + Bn) \cdot g^n$]

$$u_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$$

$$u_0 = 5 \text{ geeft } A \cdot 2^0 + B \cdot (-1)^0 = 5, \text{ dus } A + B = 5$$

$$u_1 = 4 \text{ geeft } A \cdot 2^1 + B \cdot (-1)^1 = 4, \text{ dus } 2A - B = 4$$

$$A + B = 5 \Leftrightarrow B = 5 - A$$

Invullen in de andere vergelijking geeft:

$$2A - B = 4 \Leftrightarrow$$

$$2A - (5 - A) = 4$$

$$2A - 5 + A = 4$$

$$3A = 9$$

$$A = 3 \text{ (invullen geeft } B = 2)$$

$$u_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n$$

10.4 Complexe e-machten en complexe wortels[2]

Voorbeeld 2:

Stel de directe formule op bij de rij $u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}$ met $u_0 = 2$ en $u_1 = 5$

Stap 1:

Substitueer $u_n = g^n$ en herleid de vergelijking tot de vorm $g^2 - ag - b = 0$.

$$g^n = 2g^{n-1} - 2g^{n-2}$$

$$g^2 = 2g - 2$$

$$g^2 - 2g + 2 = 0$$

Stap 2:

Los de nu ontstane vergelijking op:

$$(g - 1)^2 - 1 = -2$$

$$(g - 1)^2 = -1$$

$$(g - 1)^2 = i^2$$

$$g - 1 = i \vee g - 1 = -i$$

$$g = 1 + i \vee g = 1 - i$$

Let op:

Dit is een vergelijking met **nul reële** oplossingen. Bij gebruik van de discriminantmethode krijg je $D < 0$.

10.4 Complexe e-machten en complexe wortels[2]

Voorbeeld 2:

Stel de directe formule op bij de rij $u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}$ met $u_0 = 2$ en $u_1 = 5$

Stap 3:

De directe formule is nu van de vorm $u_n = (A \cos(\varphi n) + B \sin(\varphi n)) \cdot g^n$.

Hierbij is φ het argument van g_1 (of van g_2) en g de modulus van g_1 .

g_1 en g_2 zijn de gevonden (complexe) oplossingen.

$$|1 + i| = \sqrt{2} \text{ en } \arg(1 + i) = \frac{1}{4}\pi$$

$$u_n = (A \cos(\frac{1}{4}\pi n) + B \sin(\frac{1}{4}\pi n)) \cdot (\sqrt{2})^n.$$

$$u_0 = 2 \text{ geeft } 2 = (A \cos(0) + B \sin(0)) \cdot (\sqrt{2})^0 \Leftrightarrow A = 2$$

$$u_1 = 5 \text{ geeft } 5 = (A \cos(\frac{1}{2}\pi) + B \sin(\frac{1}{2}\pi)) \cdot (\sqrt{2})^1 =$$

$$5 = (A \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + B \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2})^1 =$$

$$5 = A + B$$

Als $A = 2$ dan volgt hieruit $B = 3$.

$$u_n = (2 \cos(\frac{1}{4}\pi n) + 3 \sin(\frac{1}{4}\pi n)) \cdot (\sqrt{2})^n.$$

10.4 Complexe e-machten en complexe wortels[3]

De vergelijking $z^3 = 8i$ heeft drie oplossingen:

$$z^3 = 8i$$

$$z^3 = 8e^{\frac{1}{2}\pi i + k \cdot 2\pi i}$$

$$z = \left(8e^{\frac{1}{2}\pi i + k \cdot 2\pi i}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z = 2e^{\frac{1}{6}\pi i + k \cdot \frac{2}{3}\pi i}$$

Let op:

De vector $8i$ maakt een hoek van 90 graden naar links met de horizontale as. Dit is een hoek van $\frac{1}{2}\pi$ radialen.

Oplossing 1:

$$k = 0 \text{ geeft } z = 2e^{\frac{1}{6}\pi i} = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

Oplossing 2:

$$k = 1 \text{ geeft } z = 2e^{\frac{5}{6}\pi i} = 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

Oplossing 3:

$$k = 2 \text{ geeft } z = 2e^{\frac{1}{2}\pi i} = 2 \cdot -i = -2i$$

10.4 Complexe e-machten en complexe wortels[3]

Er is aangetoond dat de vergelijking $z^3 = 8i$ drie oplossingen heeft.
Deze wortel is driewaardig.

Elke **complexe wortel** is **meerwaardig**.

De vergelijking $z^n = c$ met $c \neq 0$, heeft n oplossingen in $\mathbb{C}$
Deze oplossingen zijn de uitkomsten van de n -demachtswortel van c .

Je kunt dit soort vergelijkingen oplossen op de manier zoals op de vorige pagina
of door één oplossing op te sporen, deze te tekenen op een cirkel en gebruik
te maken van draaisymmetrie.

10.4 Complexe e-machten en complexe wortels[3]

Voorbeeld:

Los exact op in $\mathbb{C}$: $(z - 2i)^2 = -i$

$$(z - 2i)^2 = e^{-\frac{1}{2}\pi i + k \cdot 2\pi i}$$

$$z - 2i = e^{-\frac{1}{4}\pi i + k \cdot \pi i}$$

$$z - 2i = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \vee z - 2i = e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

$$z - 2i = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$$

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2i - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$$

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + (2 - \frac{1}{2}\sqrt{2})i$$

$$\vee z - 2i = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$$

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2i + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$$

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + (2 + \frac{1}{2}\sqrt{2})i$$

10.5 Krachten en snelheden met complexe getallen [1]

Voorbeeld:

Op een voorwerp werken drie krachten. Bereken de grootte en de richting van de resultante van deze krachten.

Noteer de complexe getallen die bij de krachten horen.

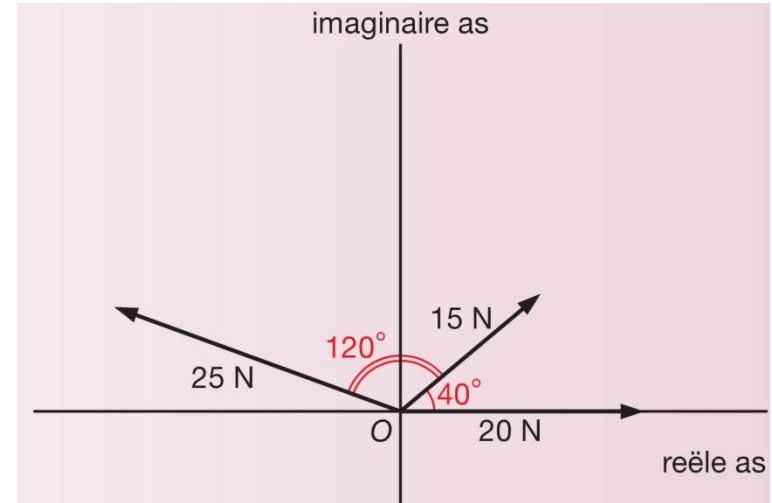
$$z_1 = 20$$

$$z_2 = 15(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$$

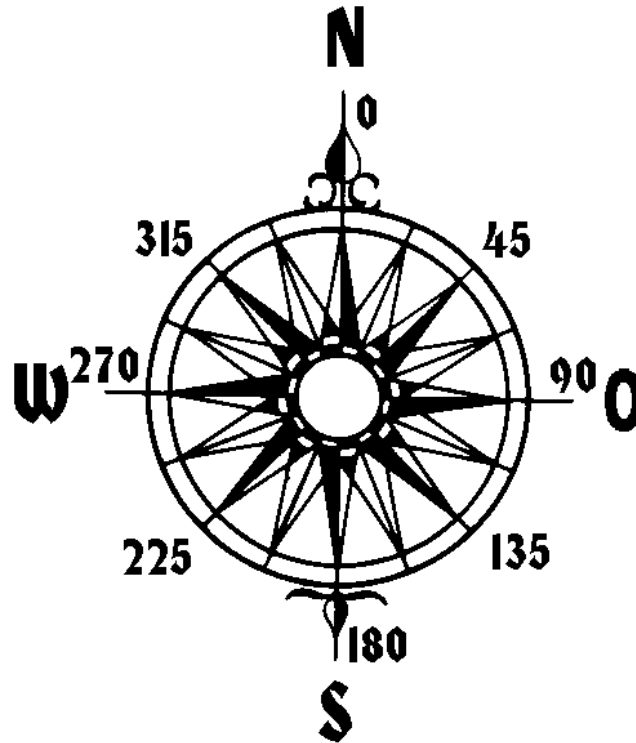
$$z_3 = 25(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ)$$

De grootte van de resultante is de absolute waarde van de som van de drie complexe getallen: $|z_1 + z_2 + z_3| \approx 19,9$.

De richting van de resultante is het argument van de som van de drie complexe getallen: $\arg(z_1 + z_2 + z_3) \approx 66,3^\circ$.



10.5 Krachten en snelheden met complexe getallen [2]



- In de luchtvaart en scheepvaart wordt vaak met een kompas gewerkt;
- Als je naar het zuiden vaart, vaar je met een koers van 180° ;
- Als je naar het noordwesten vaart, vaar je met een koers van 315° .

10.5 Krachten en snelheden met complexe getallen [2]

Een ijsschots drijft met een snelheid van 3 km/uur naar het zuidoosten. Op de ijsschots loopt een persoon op zijn kompas pal naar het zuiden met een snelheid van 4 km/uur. Bereken in één decimaal nauwkeurig de resulterende snelheid van deze persoon en in graden nauwkeurig zijn koers.

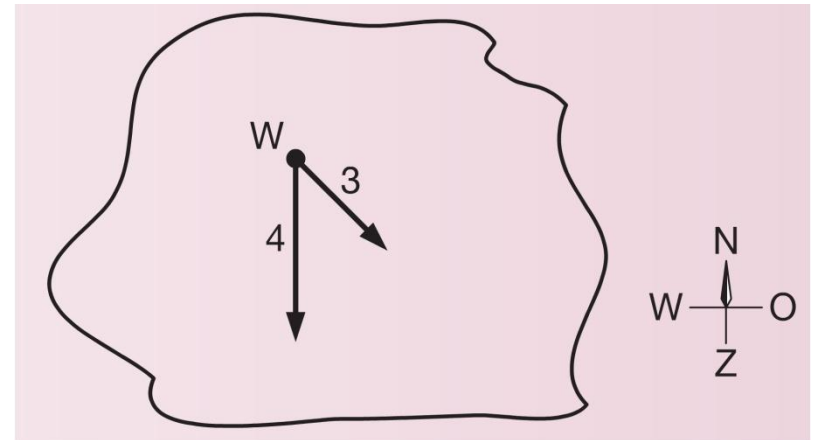
Bij de snelheden horen de complexe getallen:

$$z_1 = 3(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ))$$

$$z_2 = 4(\cos(-90^\circ) + i \sin(-90^\circ))$$

$$|z_1 + z_2| \approx 6,48$$

$$\arg(z_1 + z_2) \approx -70,9^\circ$$



De resulterende snelheid van de persoon is 6,5 km/uur.

De koers van de persoon is $90^\circ + 71^\circ = 161^\circ$.

(Gebruik hiervoor het plaatje op de vorige pagina)