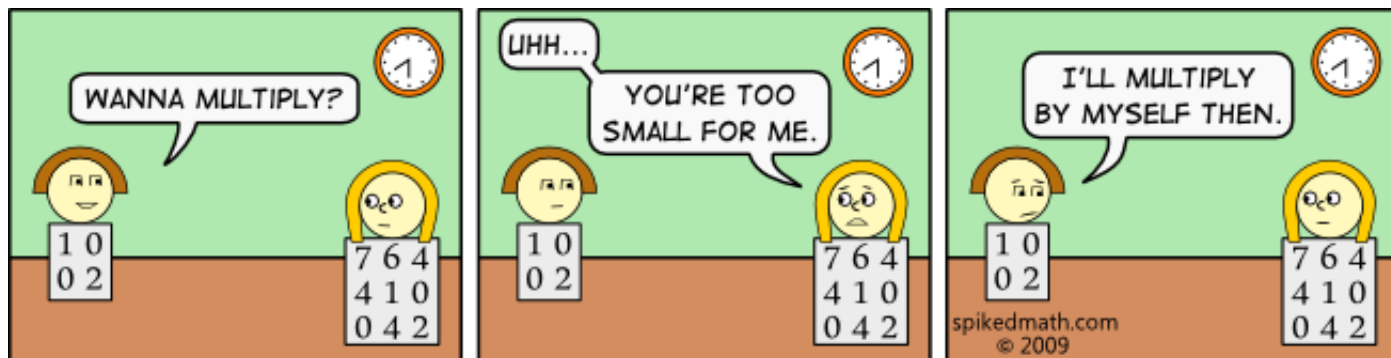


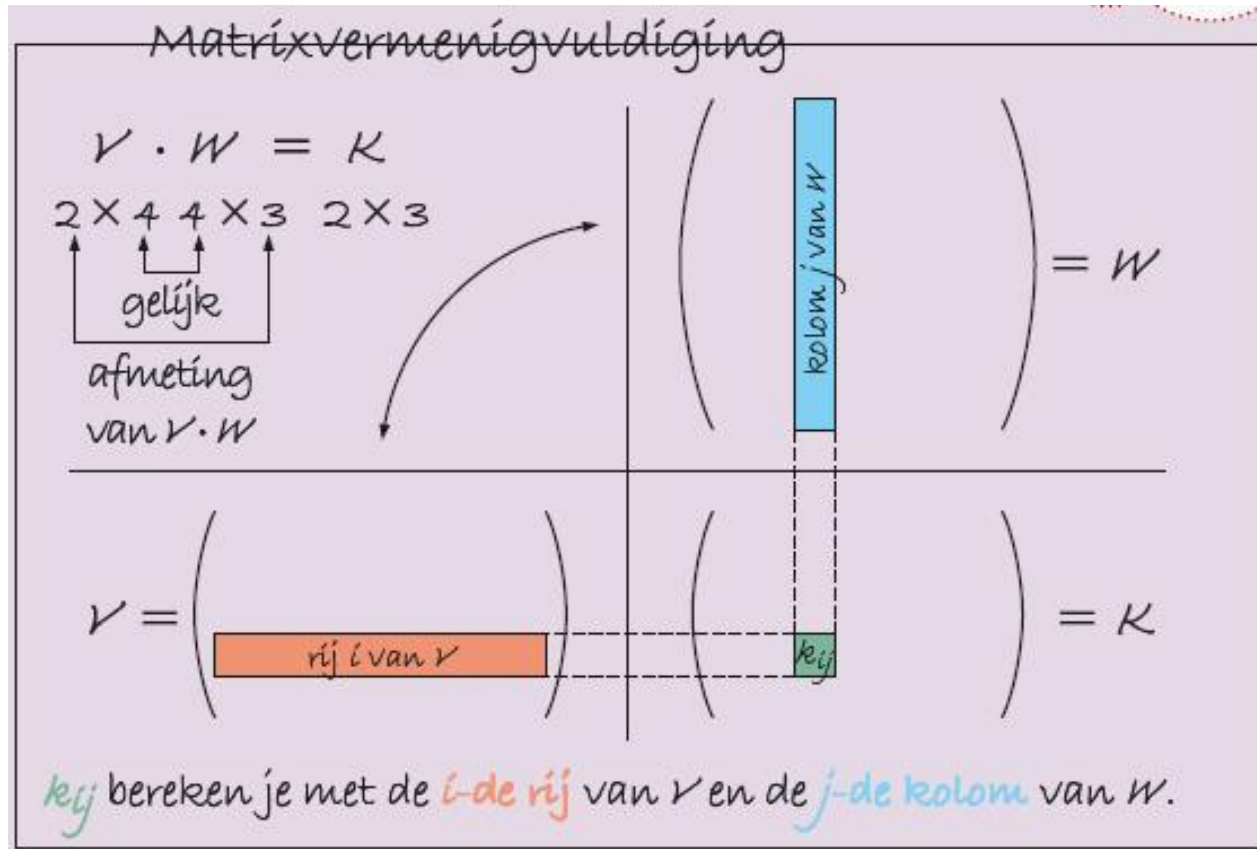
11.0 Voorkennis

$$V = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 3 \\ 20 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

V is een 2×4 matrix. W is een 4×3 matrix. Deze twee matrices kunnen met elkaar vermenigvuldigd worden. Want het aantal kolommen van matrix V is gelijk aan het aantal rijen van matrix W .

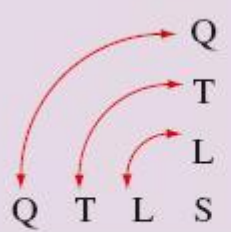


11.0 Voorkennis



Element k_{23} bereken je dus door de 2-de rij van V en de 3-de kolom van W met elkaar te vermenigvuldigen.

11.0 Voorkennis

		prijs winst software $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 3 \\ 20 & 5 & 4 \end{pmatrix} = W$
$V = \begin{matrix} A & \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix}$		$\begin{pmatrix} 260 & 51 & 38 \\ 184 & 37 & 29 \end{pmatrix} = K$

Om element k_{11} te krijgen vermenigvuldigen we de eerste rij van V met de eerste kolom van W :

$$k_{11} = 8 \cdot 8 + 6 \cdot 12 + 4 \cdot 16 + 3 \cdot 20 = 260$$

Om element k_{12} te krijgen vermenigvuldigen we de eerste rij van V met de tweede kolom van W :

$$k_{12} = 8 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 50$$

Om element k_{23} te krijgen vermenigvuldigen we de tweede rij van V met de derde kolom van W :

$$k_{23} = 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 29$$

11.0 Voorkennis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Een **eenheidsmatrix** is een vierkante matrix met op de hoofddiagonaal uitsluitend enen. Alle andere elementen zijn gelijk aan nul.

Een vierkante matrix kan met zichzelf vermenigvuldigd worden.

$$Q = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$Q^2 = Q \cdot Q = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 & 90 \\ 165 & 115 \end{pmatrix}$$

11.0 Voorkennis

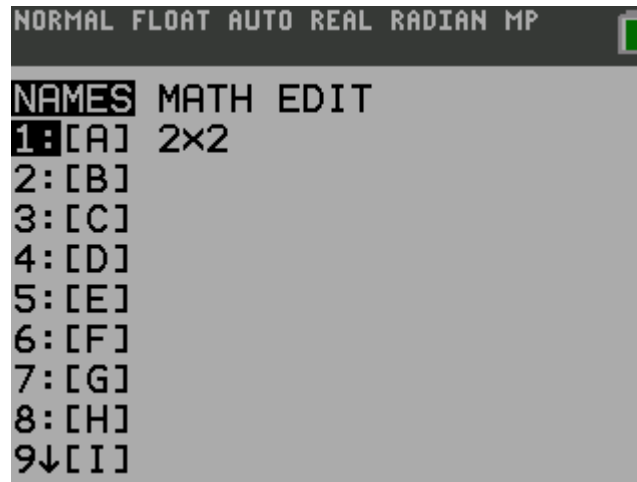
$$Q = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$Q^2 = Q \cdot Q = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 & 90 \\ 165 & 115 \end{pmatrix}$$

Matrix en GR:

Stap 1:

2ND | X⁻¹ | EDIT | ENTER



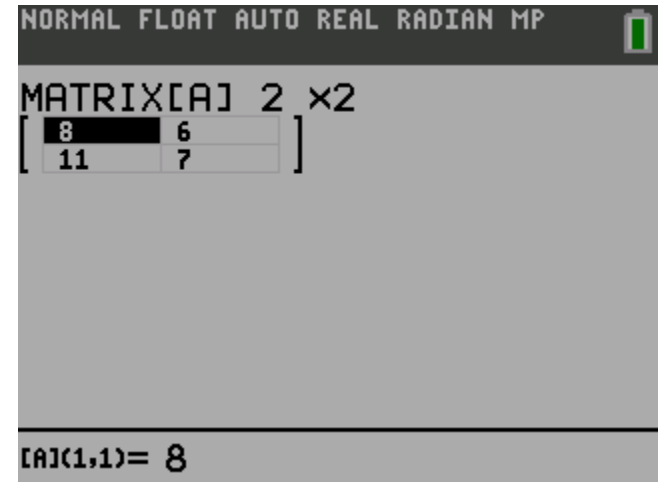
11.0 Voorkennis

Matrix en GR:

Stap 2:

Vul afmetingen Matrix in.

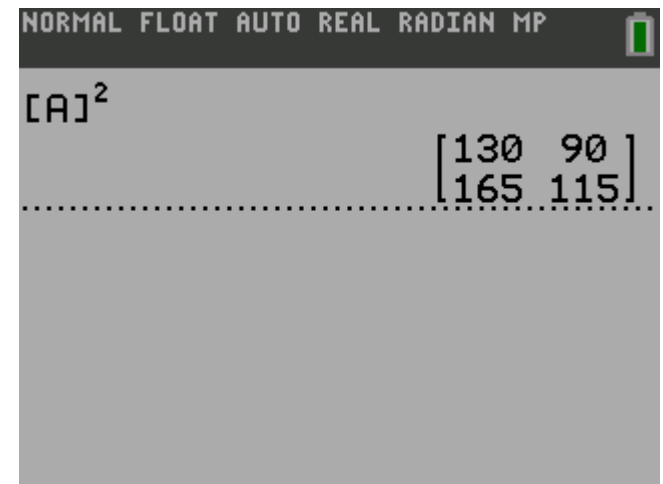
Vul getallen in Matrix in.



Stap 3:

2ND | X⁻¹ | NAMES | 1 : [A] | ENTER | ^2 | ENTER

De GR berekent nu de matrix A^2



11.0 Voorkennis

Inverse matrix:

Bij een vierkante matrix A kan precies één matrix B horen waarvoor geldt:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

I = eenheidsmatrix (een matrix met enen op de diagonaal, alle andere elementen zijn nul.

B = inverse matrix (of inverse) $B = A^{-1}$

De oplossing van het stelsel $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ is gelijk aan $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Voorwaarde is dat de inverse matrix A^{-1} van de coëfficiëntenmatrix A bestaat.

11.0 Voorkennis

Voorbeeld:

Gegeven is het stelsel

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x + 5y + 3z = -1 \end{cases}$$

Los het stelsel op door gebruik te maken van een inverse matrix.

Stap 1:

Voer de volgende matrices in:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

11.0 Voorkennis

Stap 2:

2ND | x^{-1} | 1: [A] | ENTER | x^{-1} |



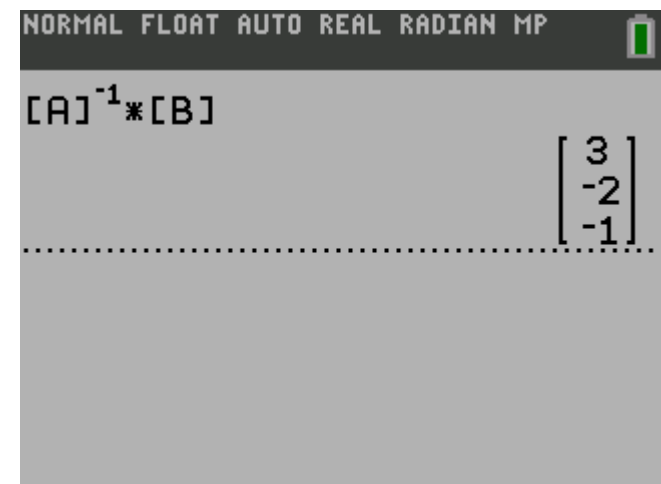
Stap 3:

•| 2ND | x^{-1} | 1: [B] | ENTER geeft als uitkomst

Schrijf over wat er op het scherm van je GR staat.

Let op:

Met behulp van de inverse matrix kun je bij overgangsmatrices terug rekenen in de tijd.



11.0 Voorkennis

Algemeen:

Gegeven is het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

De coëfficiëntenmatrix van dit stelsel is: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix}$

De term $aq - bp$ heet de **determinant** ($\det(A)$ of $|A|$) van de matrix A .

Dit stelsel heeft één oplossing als: $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ en dus $|A| \neq 0$

Dit stelsel heeft geen oplossingen als: $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ en dus $|A| = 0$

Dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen als: $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ en dus $|A| = 0$

11.0 Voorkennis

Ook voor andere vierkante matrices dan een 2 x 2 matrix valt een determinant te berekenen.

De determinant van de matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

is gelijk aan $|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

Let op:

De **onderdeterminant** van a_{11} is de determinant van de

ondermatrix $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Deze is gelijk aan: $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

De onderdeterminant van a_{12} is gelijk aan $a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$

De onderdeterminant van a_{13} is gelijk aan $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$

11.2 Lineaire afbeeldingen [1]

Voorbeeld:

Het punt $A(7, -4)$ wordt ten opzichte van de oorsprong over 45° geroteerd en vermenigvuldigd met $\sqrt{2}$.

Bereken de coördinaten van het beeld A' .

Stap 1:

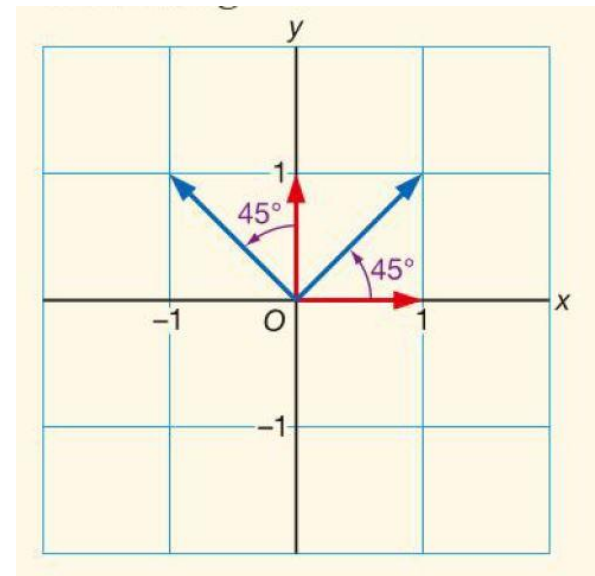
Pas de bovenstaande bewerkingen toe op de **eenheidsvectoren** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ om de beelden hiervan te vinden. Dit doe je alleen als deze beelden makkelijk te vinden zijn.

Uit het plaatje volgt dat $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ afgebeeld wordt als $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verder volgt dat $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ afgebeeld wordt als $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hieruit ontstaat de matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Met deze matrix zijn in dit geval **lineaire afbeeldingen** te bepalen.



11.2 Lineaire afbeeldingen [1]

Voorbeeld:

Het punt $A(7, -4)$ wordt ten opzichte van de oorsprong over 45° geroteerd en vermenigvuldigd met $\sqrt{2}$.

Bereken de coördinaten van het beeld A' .

Stap 2:

Bereken de coördinaten van het beeld A' .

$$M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} = A'$$

11.2 Lineaire afbeeldingen [1]

Voorbeeld:

Het punt $A(4, 0)$ wordt gespiegeld in de lijn $k: y = 3x$.

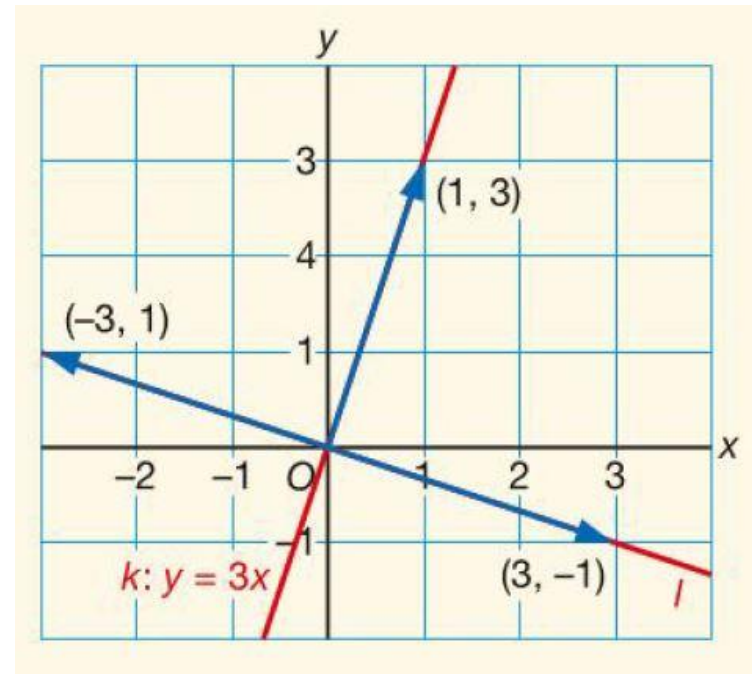
Bereken de coördinaten van het beeld A' .

Stap 1:

In dit geval is het niet eenvoudig om de beelden van de eenheidsvectoren te vinden. De beelden van twee willekeurige punten of vectoren zijn wel eenvoudig te vinden.

Het beeld van $(1, 3)$ op de lijn is $(1, 3)$.

Het beeld van $(3, -1)$ is $(-3, 1)$.



11.2 Lineaire afbeeldingen [1]

Voorbeeld:

Het punt $A(4, 0)$ wordt gespiegeld in de lijn $k: y = 3x$.
Bereken de coördinaten van het beeld A' .

Stap 2:

Er moet nu gelden:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

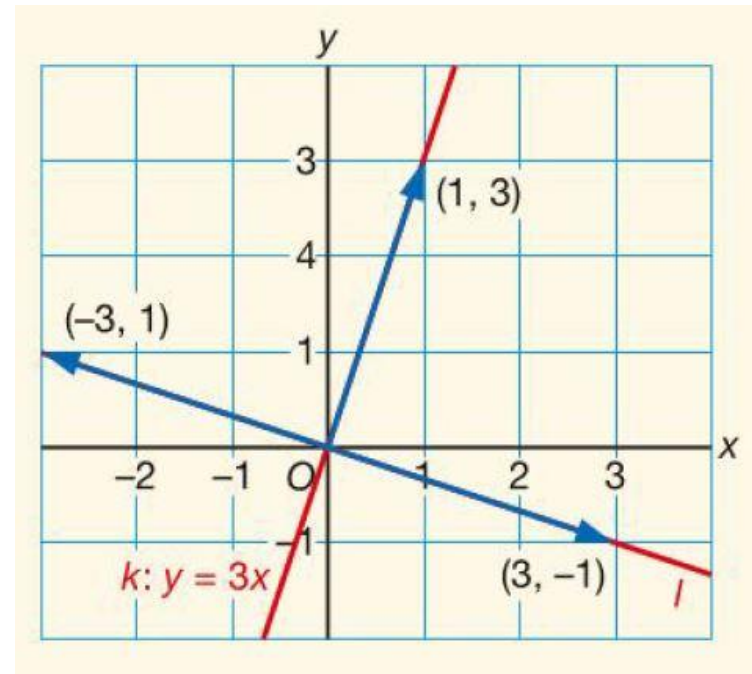
Hieruit volgen de vergelijkingen:

$$a + 3b = 1 \text{ en } c + 3d = 3$$

$$3a - b = -3 \text{ en } 3c - d = 1$$

Het oplossen van deze vergelijkingen geeft de

matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Zorg dat je een stelsel krijgt dat oplosbaar is.



11.2 Lineaire afbeeldingen [1]

Voorbeeld:

Het punt $A(4, 0)$ wordt gespiegeld in de lijn $k: y = 3x$.

Bereken de coördinaten van het beeld A' .

Stap 2:

$$\begin{cases} a + 3b = 1 & \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right| \\ 3a - b = -3 & \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right| \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ 9a - 3b = -9 \end{cases}$$

$$10a = -8$$

Hieruit volgt $a = -0,8$ en $b = 0,6$

11.2 Lineaire afbeeldingen [1]

Voorbeeld:

Het punt $A(4, 0)$ wordt gespiegeld in de lijn $k: y = 3x$.

Bereken de coördinaten van het beeld A' .

Stap 2:

$$\begin{cases} c + 3d = 3 \\ 3c - d = 1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 3c + 9d = 9 \\ 3c - d = 1 \end{cases}$$

$$10d = 8$$

Hieruit volgt $d = 0,8$ en $c = 0,6$

11.2 Lineaire afbeeldingen [1]

Voorbeeld:

Het punt $A(4, 0)$ wordt gespiegeld in de lijn $k: y = 3x$.

Bereken de coördinaten van het beeld A' .

Stap 3:

Bereken de coördinaten van het beeld A' .

$$M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,2 \\ 2,4 \end{pmatrix} = A'$$

11.2 Lineaire afbeeldingen [2]

Voorbeeld:

Het punt $A(10, 2, -5)$ wordt over 45° geroteerd om de z -as.
Bereken de coördinaten van het beeld A' .

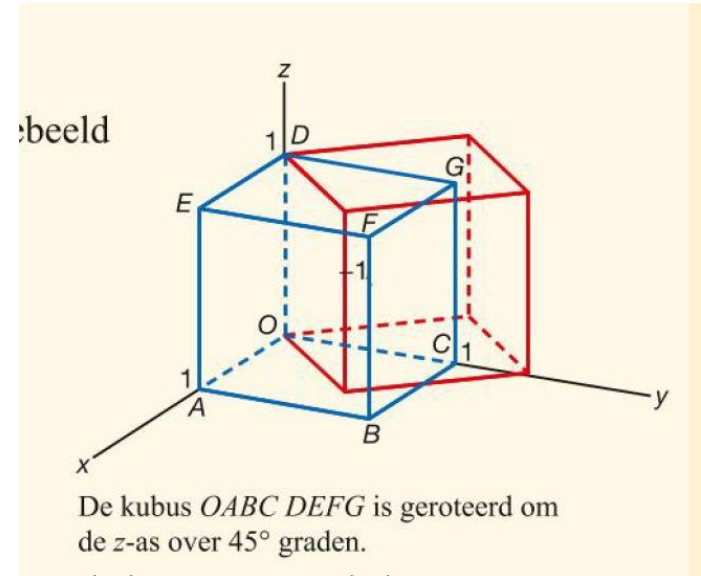
Stap 1:

Pas de bovenstaande bewerkingen toe op de

eenheidsvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

om de beelden hiervan te vinden.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



11.2 Lineaire afbeeldingen [2]

Voorbeeld:

Het punt $A(10, 2, -5)$ wordt over 45° geroteerd om de z -as.
Bereken de coördinaten van het beeld A' .

Stap 1:

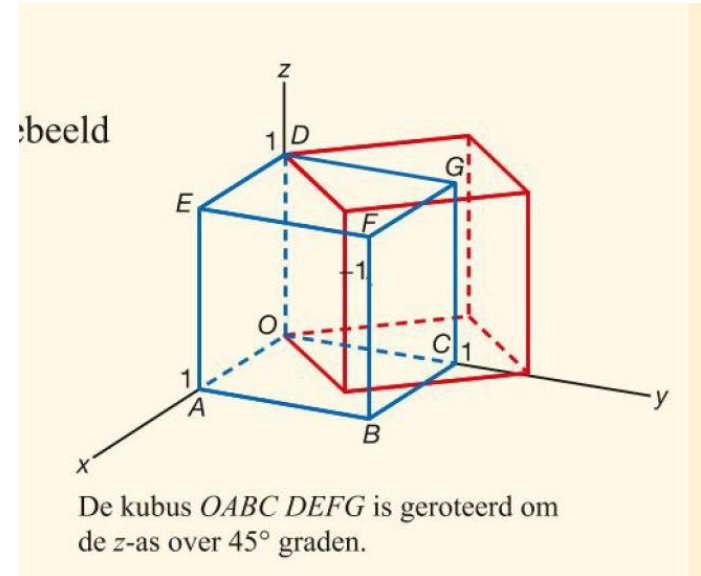
Hieruit ontstaat de matrix

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stap 2:

Bereken het beeld van A' :

$$M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \\ -5 \end{pmatrix}$$



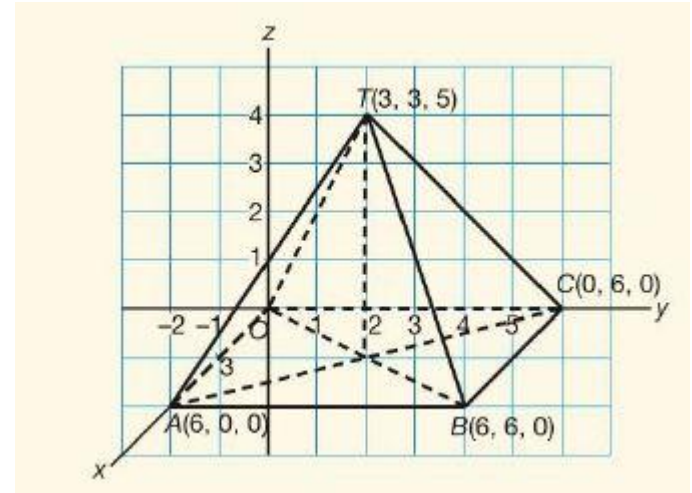
11.2 Lineaire afbeeldingen [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $TOABC$ met $A(6, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $T(3, 3, 5)$.
Stel de matrix M op die het gegeven ruimtelijk assenstelsel afbeeldt op het Oxy -vlak

Stap 1:

Merk op dat het beeld van $A(6, 0, 0)$ gelijk is aan $A'(-2, -2)$.



Er moet nu gelden:
$$M \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

M is nu van de vorm:
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

11.2 Lineaire afbeeldingen [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $T OABC$ met $A(6, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $T(3, 3, 5)$.
Stel de matrix M op die het gegeven ruimtelijk assenstelsel afbeeldt op het Oxy -vlak

Stap 2:

$$M \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a \\ 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

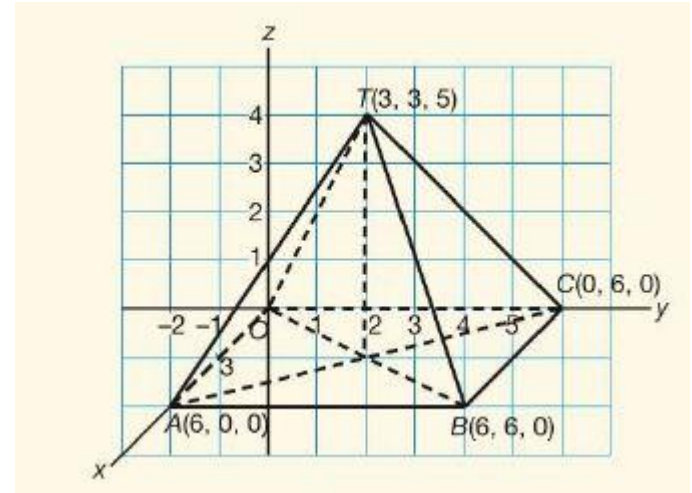
Oplossen hiervan geeft: $a = -1/3$ en $d = -1/3$.

Stap 3:

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt: $b = 1$, $e = 0$, $c = 0$ en $f = 1$ en dus

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [1]

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ en de lijnen $k: 2x - 3y = 0$ en $l: x - y = 0$.

Het punt $(3, 2)$ ligt op de lijn $k: 2x - 3y = 0$.

$$M \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Merk op dat het beeld van het punt $(3, 2)$ ook op de lijn k ligt. (Alles vectoren die op de lijn liggen worden vermenigvuldigd met 2)

Het punt $(1, 1)$ ligt op de lijn $l: x - y = 0$.

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Merk op dat het beeld van het punt $(-1, -1)$ ook op de lijn l ligt. (Alles vectoren die op de lijn liggen worden vermenigvuldigd met -1)

De getallen 2 en -1 heten de **eigenwaarden** (λ) van M .

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [1]

De getallen 2 en -1 heten de **eigenwaarden** (λ) van M .

Alle vectoren die op de lijn $\mathbf{k}$ liggen heten de eigenvectoren van M die horen bij de eigenwaarde 2.

Alle vectoren die op de lijn $\mathbf{l}$ liggen heten de eigenvectoren van M die horen bij de eigenwaarde -1.

Merk op dat bij elke waarde van λ oneindig veel **eigenvectoren** horen.

In het algemeen geldt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dit laatste wordt aangetoond in opgave 40.

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [1]

Omdat er bij elke waarde van λ oneindig veel eigenvectoren horen heeft

het stelsel $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oneindig veel oplossingen.

Dit betekent dat de determinant van $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ gelijk is aan 0.
(Hoofdstuk 4)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \cdot I \end{aligned}$$

De eigenwaarden van een matrix M volgen dus uit de vergelijking $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$. Dit is de **karacteristieke vergelijking** van M .

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [1]

Voorbeeld 1:

Bereken de eigenwaarden van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -9 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

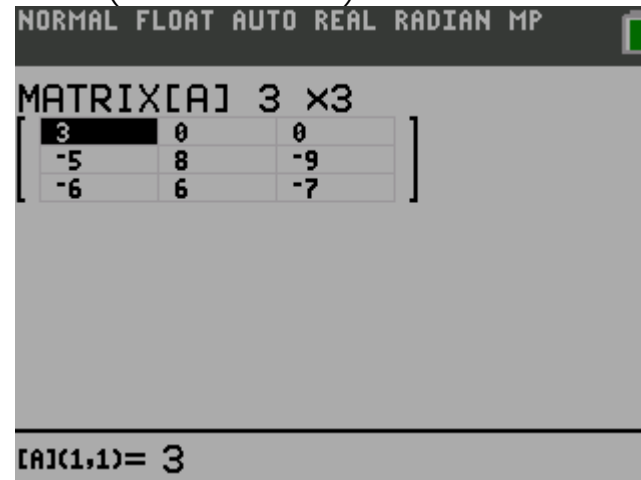
Stap 1:

Voer de matrix in, in de GR.

2ND | X⁻¹ | EDIT | ENTER

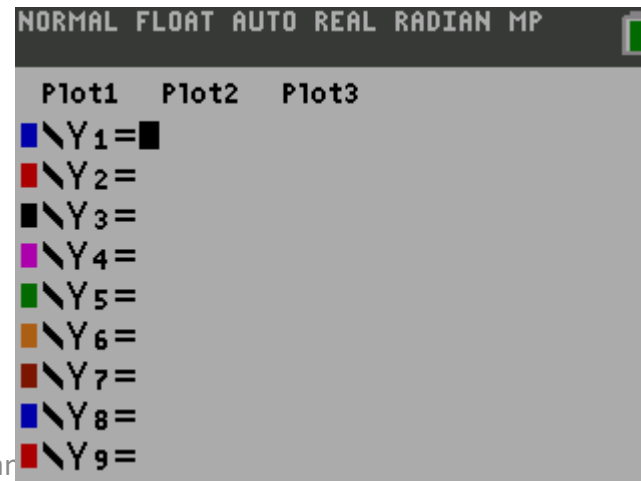
Vul afmetingen Matrix in.

Vul getallen in Matrix in.



Stap 2:

Voer de karakteristieke vergelijking in bij Y1=



11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [1]

Voorbeeld 1:

Stap 2:

2ND | X^{-1} | MATH | 1: det(

ENTER | 2ND | X^{-1} | NAMES | 1: [A]

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
NAMES MATH EDIT
1:det(
2:↑
3:dim(
4:Fill(
5:identity(
6:randM(
7:augment(
8:Matr►list(
9↓List►matr(
```

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=det([A]
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
\Y8=
\Y9=
```

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [1]

Voorbeeld 1:

Stap 2:

- X | * | 2ND | X⁻¹ | MATH | 5: identity(

ENTER | 3))

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
NAMES MATH EDIT
1:det(
2:T
3:dim(
4:Fill(
5:identity(
6:randM(
7:augment(
8:Matr►list(
9↓List►matr(
```

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
Plot1 Plot2 Plot3
■\Y1=([A]-X*identity(3))■
■\Y2=
■\Y3=
■\Y4=
■\Y5=
■\Y6=
■\Y7=
■\Y8=
■\Y9=
```

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [1]

Voorbeeld 1:

Stap 2:

- X | * | 2ND | X⁻¹ | MATH | 5: identity(

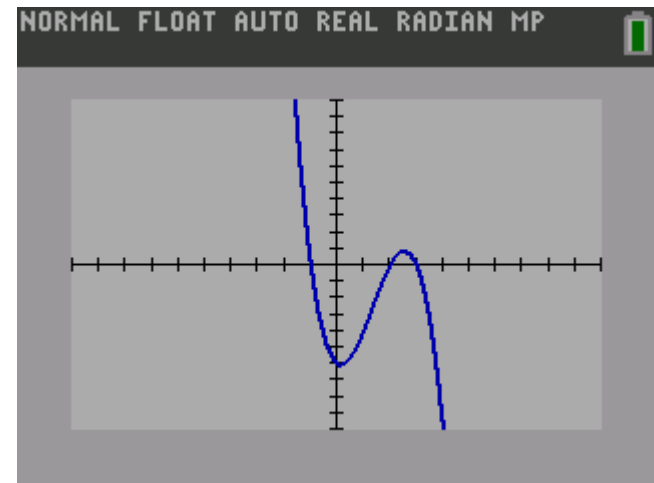
```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
NAMES MATH EDIT
1:det(
2:T
3:dim(
4:Fill(
5:identity(
6:randM(
7:augment(
8:Matr►list(
9:List►matr(
```

GRAPH geeft

Stap 3:

Oplossen van de karakteristieke vergelijking.

Invoeren van $Y2 = 0$ en gebruik maken van de optie INTERSECT geeft de eigenwaarden $\lambda = -1, \lambda = 2$ en $\lambda = 3$.



11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [1]

Voorbeeld 2:

Bereken algebraïsch de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren

van de matrix $M = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Stap 1:

Los op: $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$

$$(-2 - \lambda)(5 - \lambda) - 6 \cdot 10 = 0$$

$$-10 + 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 60 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$$

$$(\lambda + 7)(\lambda - 10) = 0$$

$$\lambda = -7 \vee \lambda = 10$$

De eigenwaarden zijn nu -7 en 10.

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [1]

Voorbeeld 2:

Bereken algebraïsch de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren

van de matrix $M = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Stap 2:

Bereken de eigenvectoren bij $\lambda = -7$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -7 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$-2x + 10y = -7x$$

$$5x + 10y = 0$$

Een eigenvector die bij deze eigenwaarde hoort is nu: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [1]

Voorbeeld 2:

Bereken algebraïsch de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren

van de matrix $M = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Stap 3:

Bereken de eigenvectoren bij $\lambda = 10$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$-2x + 10y = 10x$$

$$-12x + 10y = 0$$

Een eigenvector die bij deze eigenwaarde hoort is nu: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [2]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Eerder zijn de eigenwaarden ($\lambda_1 = -7$ en $\lambda_2 = 10$) berekend met bijbehorende eigenvectoren: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

De matrix M kan geschreven worden in de vorm $P \cdot D \cdot P^{-1}$

Met $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ (Dit zijn de beide eigenvectoren)

En $D = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ (Dit is een diagonaalmatrix met de eigenwaarden op de diagonaal)

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [2]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Eerder zijn de eigenwaarden ($\lambda_1 = -7$ en $\lambda_2 = 10$) berekend met bijbehorende eigenvectoren: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Dit is het **diagonaliseren van de matrix**. Bij een 2×2 matrix mogen de bijbehorende eigenvectoren dus niet op dezelfde lijn liggen, want dan zal deze matrix niet diagonaliseerbaar zijn.

Machten van een diagonaliseerbare matrix M zijn nu snel te berekenen met

$$M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

Hierbij is D^n een diagonaalmatrix met op de hoofddiagonaal de n^e machten van de eigenwaarden van M .

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Bereken M^n

Stap 1:

Bereken de eigenwaarden van de matrix M .

$$\det(M - \lambda \cdot I) = 0$$

$$(-1 - \lambda)(6 - \lambda) - 12 \cdot -1 = 0$$

$$-6 + \lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 2 \vee \lambda = 3$$

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Bereken M^n

Stap 2:

Bereken de eigenvectoren bij $\lambda = 2$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$-x + 12y = 2x$$

$$-3x + 12y = 0$$

Een eigenvector die bij deze eigenwaarde hoort is nu: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Bereken M^n

Stap 3:

Bereken de eigenvectoren bij $\lambda = 3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$-x + 12y = 3x$$

$$-4x + 12y = 0$$

Een eigenvector die bij deze eigenwaarde hoort is nu: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Bereken M^n

Stap 4:

Bereken de gevraagde matrix.

$$M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & -3 \cdot 2^n \\ -3^n & 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n & -12 \cdot 2^n + 12 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & -3 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren [2]

Stelling van Cauchy-Binet:

Voor de $n \times n$ matrix M met de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ geldt

$$\det(M) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Stelling van Cayley-Hamilton:

Elke vierkante matrix voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking.

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen [1]

Er geldt: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Voor een $n \times n$ matrix M geldt: $e^M = I + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots$

Met I als $n \times n$ -eenheidsmatrix.

Voor diagonaalmatrix $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ geldt: $e^D = I + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$

Verder geldt: $e^M = e^{P \cdot D \cdot P^{-1}} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$. Bereken e^M .

Stap 1:

Bereken de eigenwaarden van matrix M .

$$\det(M - \lambda \cdot I) = 0$$

$$(-6 - \lambda)(11 - \lambda) - 12 \cdot -6 = 0$$

$$-66 + 6\lambda - 11\lambda + \lambda^2 + 72 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 2 \vee \lambda = 3$$

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$. Bereken e^M .

Stap 2:

Bereken de eigenvectoren bij $\lambda = 2$.

$$\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$-6x + 12y = 2x$$

$$-8x + 12y = 0$$

Een eigenvector die bij deze eigenwaarde hoort is nu: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$. Bereken e^M .

Stap 3:

Bereken de eigenvectoren bij $\lambda = 3$.

$$\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$-6x + 12y = 3x$$

$$-9x + 12y = 0$$

Een eigenvector die bij deze eigenwaarde hoort is nu: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$. Bereken e^M .

Stap 4:

Bereken de gevraagde matrix.

$$e^M = P \cdot e^D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3e^2 & -4e^2 \\ -2e^3 & 3e^3 \end{pmatrix}$$

$$e^M = \begin{pmatrix} 9e^2 - 8e^3 & -12e^2 + 12e^3 \\ 6e^2 - 6e^3 & -8e^2 + 9e^3 \end{pmatrix}$$

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen [1]

Voorbeeld:

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$. Bereken e^M .

Stap 4:

Bereken de gevraagde matrix.

$$e^M = P \cdot e^D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3e^2 & -4e^2 \\ -2e^3 & 3e^3 \end{pmatrix}$$

$$e^M = \begin{pmatrix} 9e^2 - 8e^3 & -12e^2 + 12e^3 \\ 6e^2 - 6e^3 & -8e^2 + 9e^3 \end{pmatrix}$$

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de differentievergelijking $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ met $x_0 = 1$ en $x_1 = 1$.
Stel de directe formule van x_n op.

Stap 1:

Noteer de differentievergelijking met behulp van matrices:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$$

Het uitwerken van het bovenstaande geeft:

$$x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$$

$$x_{n-1} = x_{n-1}$$

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de differentievergelijking $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ met $x_0 = 1$ en $x_1 = 1$.
Stel de directe formule van x_n op.

Stap 2:

Bereken de eigenwaarden van matrix M .

$$\det(M - \lambda \cdot I) = 0$$

$$(2 - \lambda)(0 - \lambda) - 1 \cdot 3 = 0$$

$$0 - 2\lambda - 0 + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = -1 \vee \lambda = 3$$

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de differentievergelijking $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ met $x_0 = 1$ en $x_1 = 1$.
Stel de directe formule van x_n op.

Stap 3:

Bereken de eigenvectoren bij $\lambda = 3$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$2x + 3y = 3x$$

$$-x + 3y = 0$$

Een eigenvector die bij deze eigenwaarde hoort is nu: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de differentievergelijking $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ met $x_0 = 1$ en $x_1 = 1$.
Stel de directe formule van x_n op.

Stap 4:

Bereken de eigenvectoren bij $\lambda = -1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$2x + 3y = -x$$

$$3x + 3y = 0$$

Een eigenvector die bij deze eigenwaarde hoort is nu: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de differentievergelijking $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ met $x_0 = 1$ en $x_1 = 1$.
Stel de directe formule van x_n op.

Stap 5:

Er geldt nu:
$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = P \cdot D^{n-1} \cdot P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ 3^{n-1} & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n - (-1)^n \\ 3^{n-1} - (-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

De gevraagde directe formule staat nu in de laatste regel.