

12.0 Voorkennis

Voorbeeld 1:

Yvette pakt vier knikkers uit een vaas waar er 20 inzitten. 9 van de knikkers zijn rood en 11 van de knikkers zijn blauw.

X = het aantal rode knikkers dat Yvette pakt.

Er zijn nu een vijftal mogelijk uitkomsten:

- 0 rode knikkers pakken ($X = 0$);
- 1 rode knikker pakken ($X = 1$);
- 2 rode knikkers pakken ($X = 2$);
- 3 rode knikkers pakken ($X = 3$);
- 4 rode knikkers pakken ($X = 4$).

Het overzicht van alle mogelijke waarden van de toevalsvariabele met bijbehorende kansen is een **kansverdeling**.

In het voorbeeld kan X alleen losse waarden aannemen. X is een **discrete stochast** en de bijbehorende kansverdeling is een **discrete kansverdeling**.

12.0 Voorkennis

Voorbeeld 2:

Een loterij heeft 1000 loten. Er is één hoofdprijs van 100 euro. Er zijn 100 troostprijzen van 5 euro. Elk lot kost één euro.

Wat is de verwachte winst van iemand die meedoet aan deze loterij?

Stap 1:

Maak een tabel met alle mogelijke winsten en hun kans.

w	99	4	-1
$P(W = w)$	0,001	0,1	0,899

- Als je de hoofdprijs wint (Kans is $1/1000 = 0,001$), krijg je 100 euro. Het lot wat je gekocht hebt, kostte 1 euro. Dus de winst is $100 - 1 = 99$ euro;
- Als je de troostprijs wint (Kans is $100/1000 = 0,1$) krijg je 5 euro. Het lot wat je gekocht hebt, kostte 1 euro. Dus de winst is $5 - 1 = 4$ euro.
- Als je niets wint (Kans is $899/1000 = 0,899$) krijg je 0 euro. Het lot wat je gekocht hebt, kostte 1 euro. Dus de winst is $0 - 1 = -1$ euro.

12.0 Voorkennis

Voorbeeld 2:

Een loterij heeft 1000 loten. Er is één hoofdprijs van 100 euro. Er zijn 100 troostprijzen van 5 euro. Elk lot kost één euro.

Wat is de verwachte winst van iemand die meedoet aan deze loterij?

Stap 2:

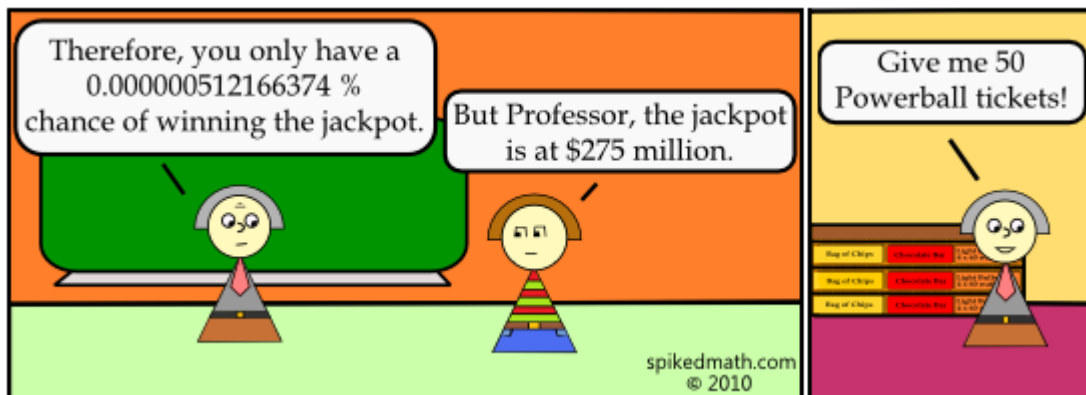
Vermenigvuldig elke mogelijke waarde van W met zijn kans en tel de uitkomsten op. Je berekent nu de **verwachtingswaarde**:

$$E(W) = 99 \cdot 0,001 + 4 \cdot 0,1 - 1 \cdot 0,899 = -0,4$$

Conclusie:

De verwachtingswaarde van -0,4 betekent dat een deelnemer per lot gemiddeld 0,4 euro verliest.

(De organisator van de loterij maakt per lot dus gemiddeld 0,4 euro winst)



12.0 Voorkennis

Binomiaal kansexperiment = Het een aantal keer (n) achter elkaar uitvoeren van hetzelfde Bernoulli experiment.

Voorbeelden:

- 10 keer gooien met een muntstuk
(X = aantal keer munt, $n = 10$, $p = \frac{1}{2}$)
- 20 vierkeuze vragen gokken
(X = aantal vragen goed, $n = 20$, $p = \frac{1}{4}$)
- 12 keer elke maand met loterij het vorige voorbeeld meedoen
(X = aantal keer 2 prijs, $n = 12$, $p = 0,0651$)

In de bovenstaande voorbeelden is X een **binomiale toevalsvariabele**.
 X is **binomiaal verdeeld**. De stochast X geeft het aantal keer succes aan.

12.0 Voorkennis

Voorbeeld 3:

Een schijf heeft vijf sectoren (2 appel, 2 kers en 1 banaan)

Bereken de kans op twee keer banaan in acht beurten:

X = aantal keer banaan, $n = 8$, $p = 0,2$

$$P(X = 2) = \text{binompdf}(8, 0.2, 2) \approx 0,294$$

Op de GR: 2ND | VARS | A: binompdf(

Vul bij **trials** 8 in

Vul bij **p** 0.2 in

Vul bij **x value** 2 in.

Enter geeft de uitkomst.



12.0 Voorkennis

Voorbeeld 4:

Een schijf heeft vijf sectoren (2 appel, 2 kers en 1 banaan)

Bereken de kans op hoogstens drie kers in twaalf beurten:

X = aantal keer kers, $n = 12$, $p = 0,4$

$$P(X \leq 3) = \text{binomcdf}(12, 0.4, 3) \approx 0,225$$

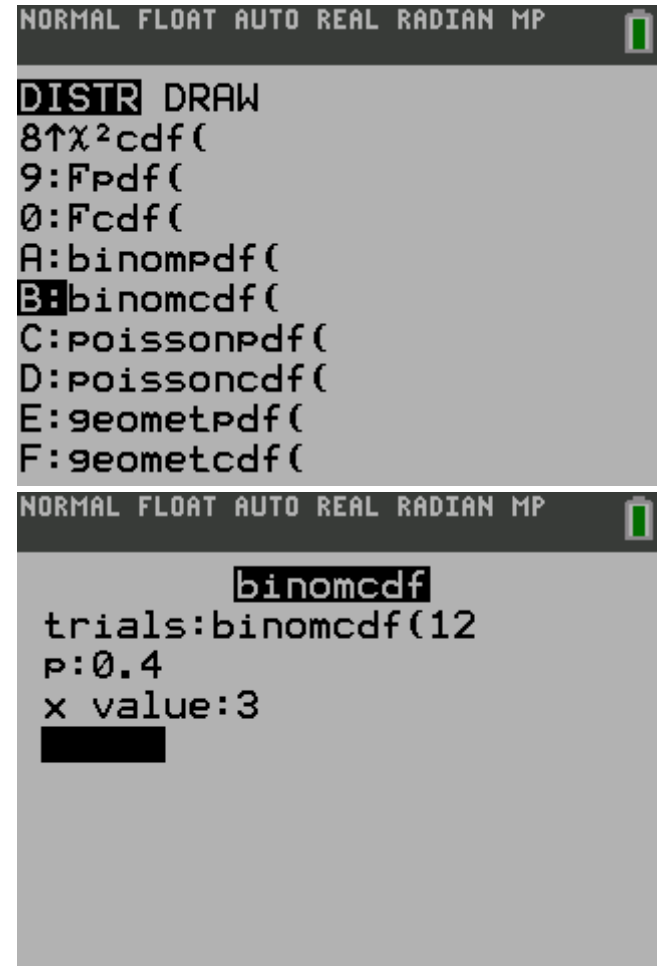
Op de GR: 2ND | VARS | B: binomcdf(

Vul bij **trials** 12 in

Vul bij **p** 0.4 in

Vul bij **x value** 3 in.

Enter geeft de uitkomst.



12.0 Voorkennis

Let op:

Cumulatieve binomiale verdeling: $P(X \leq k) = \text{binomcdf}(n, p, k)$

Wanneer je met `binomcdf` werkt, werk je dus altijd met een kans van de vorm $P(X \leq k)$

Voorbeeld 5:

Binomiaal kansexperiment met $n = 25$ en $p = 0,20$ en $X =$ aantal keer succes

$$P(X \leq 7) = \text{binomcdf}(25, 0.20, 7) \approx 0,891$$

Voorbeeld 6:

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \text{binomcdf}(25, 0.20, 7) = 1 - 0,891... \approx 0,109$$

Voorbeeld 7:

$$P(X < 8) = P(X \leq 7) = \text{binomcdf}(25, 0.20, 7) \approx 0,891$$

12.0 Voorkennis

Voorbeeld 8:

Binomiaal kansexperiment met $n = 25$ en $p = 0,20$ en $X =$ aantal keer succes

$$\begin{aligned} P(\text{tussen 5 en 10 keer succes}) &= P(5 < X < 10) = P(6, 7, 8 \text{ of } 9 \text{ keer succes}) = \\ &= P(X \leq 9) - P(X \leq 5) = \text{binomcdf}(25, 0.20, 9) - \text{binomcdf}(25, 0.20, 5) \\ &= 0,982... - 0,616... \approx 0,366 \end{aligned}$$

Voorbeeld 9:

$$\begin{aligned} P(7 \text{ of } 8 \text{ keer succes}) &= \text{binompdf}(25, 0.20, 7) + \text{binompdf}(25, 0.20, 8) \\ &= 0,110... + 0,062... \approx 0,173 \end{aligned}$$

12.0 Voorkennis

Voorbeeld 10:

Bij een helpdesk van een bedrijf komen op een ochtend tussen 8 en 9 uur gemiddeld 15 telefoontjes binnen. Wat is de kans dat er op een ochtend tussen 8 en 9 uur, minstens 20 telefoontjes binnenkomen?

Stel dat dit bedrijf 10.000 klanten heeft. De kans dat een willekeurige klant op een ochtend tussen 8 en 9 uur belt is dan $\frac{15}{10.000}$.

Er is nu sprake van een binomiale verdeling met

$X =$ aantal telefoontjes dat binnenkomt

$n = 10.000$

$p = \frac{15}{10.000}$

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - \text{binomcdf}(10.000, \frac{15}{10.000}, 19) \approx 0,125$$

Als je voor n een ander groot getal kiest (p verandert dan ook), krijg je steeds dezelfde uitkomst.

12.0 Voorkennis

In het voorbeeld weet je eigenlijk heel weinig. Je weet wel dat er sprake is van een binomiale kans met een zeer groot aantal experimenten en een zeer kleine kans op succes. In dit geval kun je gebruik maken van de **poissonverdeling**:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

e = grondtal van de natuurlijke logaritme ($e \approx 2,718$)

λ = gemiddeld aantal keren succes

λ is de parameter van een poissonverdeelde stochast.

Je gebruikt de poissonverdeling als **alleen** het gemiddelde aantal keren succes bekend is.

Voorbeeld 11:

Bij een helpdesk van een bedrijf komen op een ochtend tussen 8 en 9 uur gemiddeld 15 telefoontjes binnen. Bereken zonder GR de kans dat er op een ochtend tussen 8 en 9 uur, 20 telefoontjes binnenkomen?

$$\lambda = 15$$

$$P(X = 20) = e^{-15} \cdot \frac{15^{20}}{20!} \approx 0,042$$

12.0 Voorkennis

Voorbeeld 12:

Bij een helpdesk van een bedrijf komen op een ochtend tussen 8 en 9 uur gemiddeld 15 telefoontjes binnen. Wat is de kans dat er op een ochtend tussen 8 en 9 uur, 20 telefoontjes binnenkomen?

$\lambda = 15$ en $X =$ aantal telefoontjes

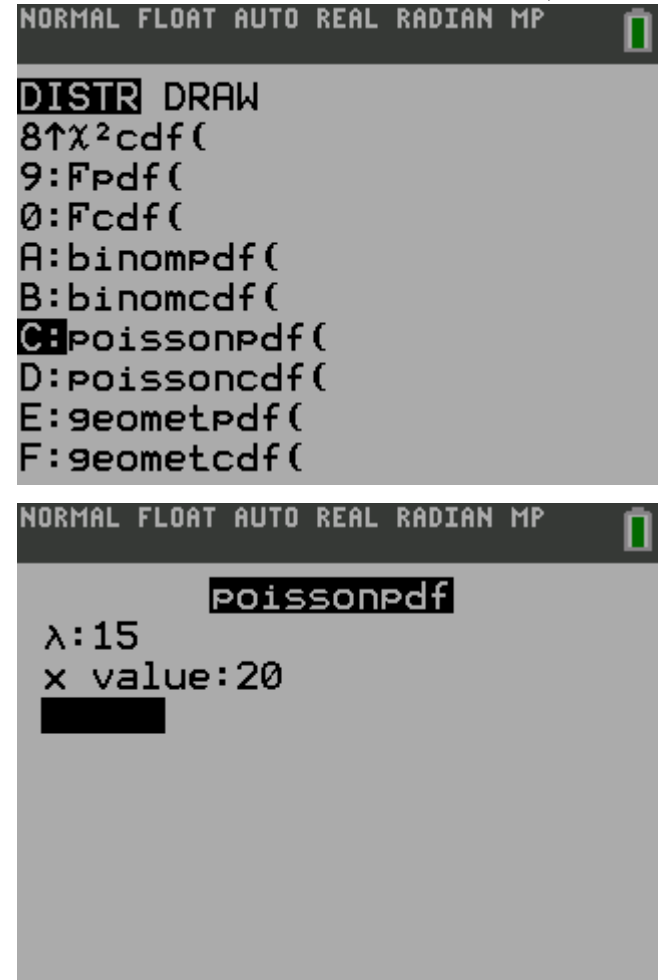
$$P(X = 20) = \text{poissonpdf}(15, 20) \approx 0,042$$

Op de GR: 2ND | VARS | C: poissonpdf(

Vul bij λ 15 in

Vul bij **x value** 20 in.

Twee keer **Enter** geeft de uitkomst.



12.0 Voorkennis

Voorbeeld 13:

Bij een helpdesk van een bedrijf komen op een ochtend tussen 8 en 9 uur gemiddeld 15 telefoontjes binnen. Wat is de kans dat er op een ochtend tussen 8 en 9 uur, minstens 20 telefoontjes binnenkomen?

$\lambda = 15$ en $X =$ aantal telefoontjes

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) =$$
$$1 - \text{poissoncdf}(15, 19) = 1 - 0,875... \approx 0,125$$

Op de GR: 2ND | VARS | D: poissoncdf(

Vul bij λ 15 in

Vul bij x value 19 in.

Twee keer **Enter** geeft de uitkomst.

Let op:

Net als bij binomcdf reken je bij poissoncdf

Uit $P(X \leq \dots)$



12.1 Kansdichtheid en verdelingsfunctie [1]

Voorbeeld:

In de grafiek hierna is de functie $f(x) = 1/x^2$ voor $x > 0$ getekend.

Aan de rechterkant heeft het vlakdeel V geen grens. Het is een **open vlakdeel**.

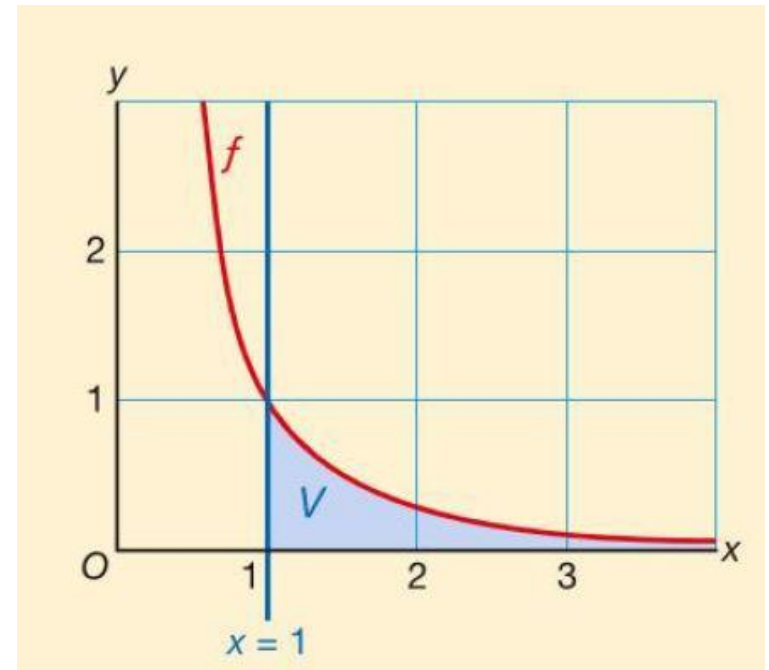
De oppervlakte van V kan als volgt berekend worden met een **oneigenlijke integraal**.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-2} dx =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[-x^{-1} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) =$$

$$0 + 1 = 1$$

In dit voorbeeld bestaat de limiet. De integraal is nu **convergent**. Anders is de integraal **divergent**.



12.1 Kansdichtheid en verdelingsfunctie [2]

In de grafiek hiernaast is de **continue uniforme verdeling** weergegeven.

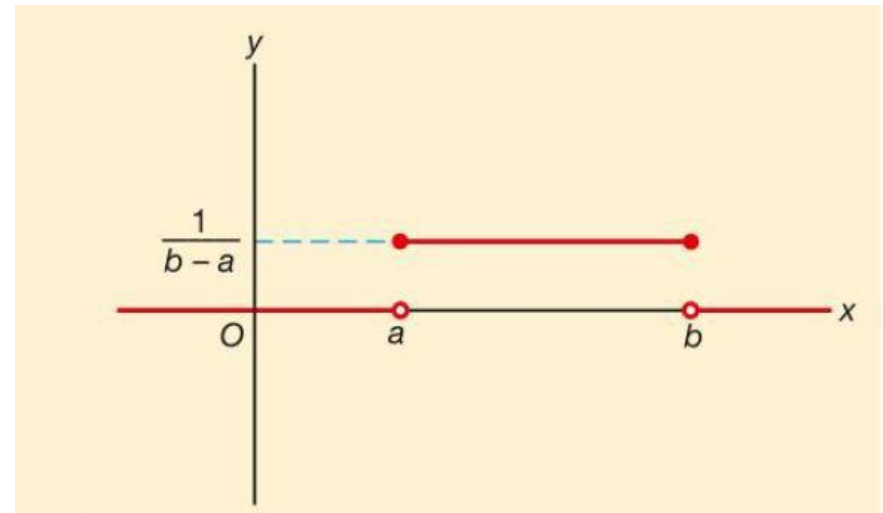
Dit is een **continue kansverdeling**.

Het functievoorschrift is:

$$f(x) = 0 \text{ voor } x < a$$

$$f(x) = 1/(b - a) \text{ voor } a \leq x \leq b$$

$$f(x) = 0 \text{ voor } x > b$$



In dit voorbeeld (en bij alle **continue toevalsvariabelen** x waarbij de kansverdeling wordt vastgelegd door de **kansdichtheid** f) geldt:

$$f(x) \geq 0 \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

12.1 Kansdichtheid en verdelingsfunctie [2]

Voorbeeld:

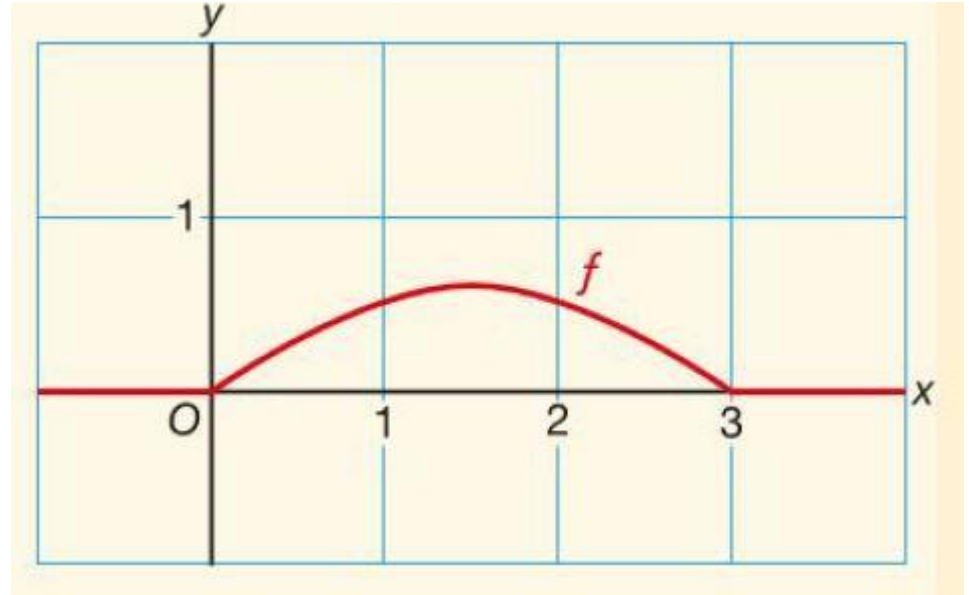
Gegeven is de functie:

$$f(x) = 0 \text{ voor } x < 0$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x \text{ voor } 0 \leq x \leq 3$$

$$f(x) = 0 \text{ voor } x > 3$$

Onderzoek algebraïsch of f een kansdichtheid is.



Stap 1:

Uit een schets volgt dat geldt $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$

Stap 2:

$$\int_0^3 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x \right) dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{8}x^2 \right]_0^3 = -\frac{1}{12} \cdot 27 + \frac{3}{8} \cdot 9 - 0 = 1\frac{1}{8}$$

Hieruit volgt dat f geen kansdichtheid is.

12.1 Kansdichtheid en verdelingsfunctie [3]

Voorbeeld 1:

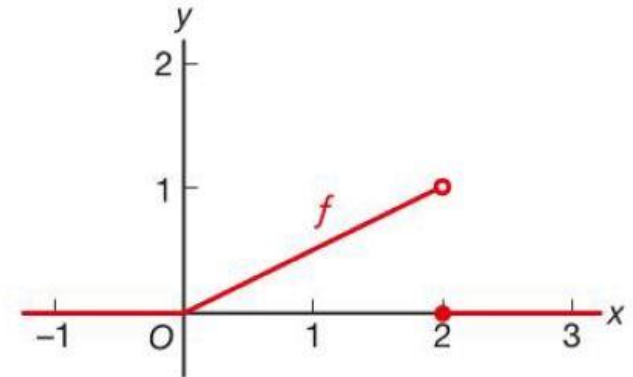
Gegeven is de functie:

$$f(x) = 0 \text{ voor } x \leq 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x \text{ voor } 0 < x < 2$$

$$f(x) = 0 \text{ voor } x \geq 2$$

Dit is de kansdichtheid van de toevalsvariabele X.
Deze kansdichtheid staat in het eerste plaatje.



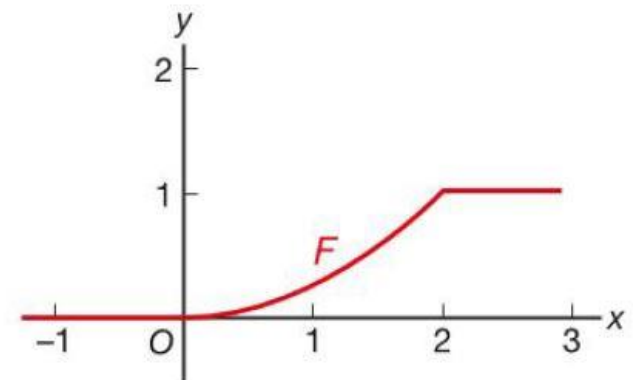
In het tweede plaatje staat de functie:

$$F(x) = 0 \text{ voor } x \leq 0$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2 \text{ voor } 0 < x < 2$$

$$F(x) = 1 \text{ voor } x \geq 2$$

Dit is de **verdelingsfunctie** (cumulatieve kansverdelingsfunctie) van de toevalsvariabele X.



figuur 12.5 De grafieken van f en F .

12.1 Kansdichtheid en verdelingsfunctie [3]

Algemeen:

De verdelingsfunctie van de toevalsvariabele X is de functie F waarvoor geldt: $F(x) = P(X \leq x)$. De functie F heeft een domein $\mathbb{R}$, bereik $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1]$ of $(0, 1)$ en is niet dalend.

Er geldt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Voorbeeld 2:

De kansdichtheid van de toevalsvariabele X is gegeven door $h(x) = 0$ voor $x < 4$ en $h(x) = 32/x^3$ voor $x \geq 4$

Geef de verdelingsfunctie H van X .

$$h(x) = \frac{32}{x^3} = 32x^{-3} \text{ geeft } K(x) = -16x^{-2} + c = -\frac{16}{x^2} + c$$

$$\text{Er moet gelden: } K(4) = 0 \text{ en dus } -\frac{16}{x^2} + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$$

Hieruit volgt: $H(x) = 0$ voor $x < 4$ en $H(x) = 1 - 16/x^2$ voor $x \geq 4$

12.2 De normale verdeling [1]

Voorbeeld:

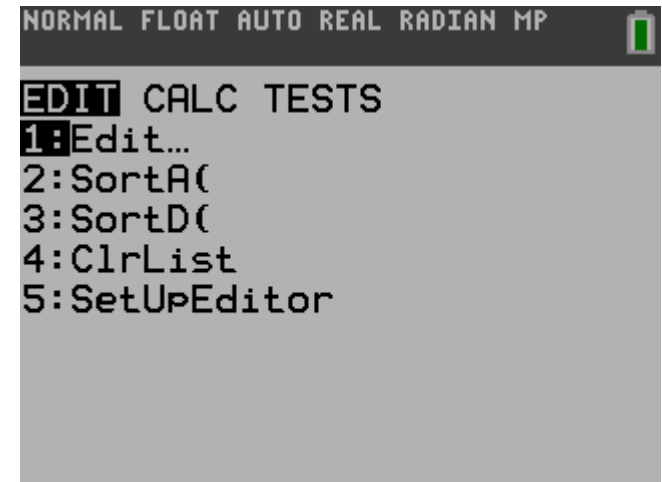
Afstand	0	1	2	3	4	5	6
frequentie	2	3	4	4	7	5	1

Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking:

Stap 1:

Voer de afstanden in je GR in.

- **STAT | EDIT 1:EDIT | ENTER**



12.2 De normale verdeling [1]

Voorbeeld:

Afstand	0	1	2	3	4	5	6
frequentie	2	3	4	4	7	5	1

Maak een boxplot bij deze verdeling:

Step 1:

- Controleer of L1 leeg is.
- L1 niet leeg. Ga op L1 staan **CLEAR | ENTER**

L1	L2	L3	L4	L5	1
0	-----	-----	-----	-----	
1					
2					
3					
4					
5					
6					

L1(8)=

[illegible]

Ga onder **L1** staan en voer de afstanden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in

12.2 De normale verdeling [1]

Voorbeeld:

Afstand	0	1	2	3	4	5	6
frequentie	2	3	4	4	7	5	1

Maak een boxplot bij deze verdeling:

Step 2:

Voer de frequenties in je GR in:

- Controleer of L2 leeg is.
- L2 niet leeg. Ga op L2 staan **CLEAR | ENTER**
- Ga onder **L2** staan en voer frequenties **{2, 3, 4, 4, 7, 5, 1}** in.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP					
L1	L2	L3	L4	L5	2
0	2	-----	-----	-----	
1	3				
2	4				
3	4				
4	7				
5	5				
6	1				
-----	-----				

L2(8)=

12.2 De normale verdeling [1]

Voorbeeld:

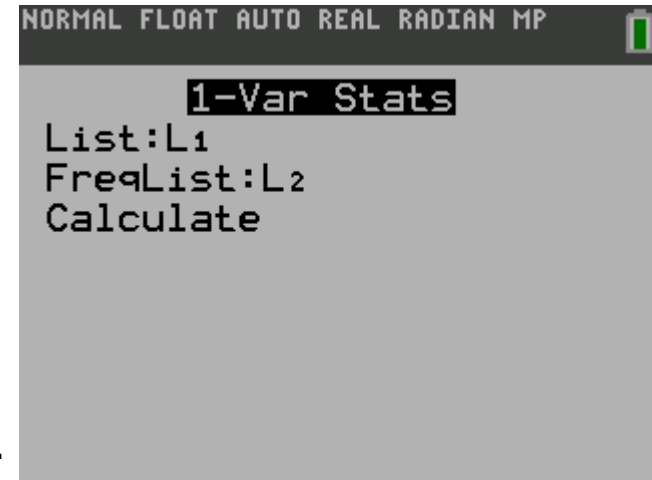
Afstand	0	1	2	3	4	5	6
frequentie	2	3	4	4	7	5	1

Maak een boxplot bij deze verdeling:

Stap 3:

Bereken de benodigde waarden voor het boxplot:

- **STAT | CALC 1:1-Var Stats | ENTER**
- Vul bij **List**, lijst L1 met waarnemingsgetallen in;
- Vul bij **FreqList**, Lijst L2 met frequenties in.
- Op ENTER drukken geeft de benodigde waarden.



Let op:

- Als L1 al ingevuld staat bij List kun je dit gewoon laten staan.
- Invullen van L2 bij FreqList gaat via: 2ND | 2.

12.2 De normale verdeling [1]

Voorbeeld:

Stap 4:

$\bar{x}$ geeft het gemiddelde (3,15)

σx geeft de standaardafwijking (1,63)

De standaardafwijking is een spreidingsmaat en geeft informatie over de spreiding van de getallen.

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
1-Var Stats
x̄=3.153846154
Σx=82
Σx²=328
Sx=1.665948563
σx=1.633596968
n=26
minX=0
↓Q1=2
```

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
1-Var Stats
↑Sx=1.665948563
σx=1.633596968
n=26
minX=0
Q1=2
Med=3.5
Q3=4
maxX=6
```

12.2 De normale verdeling [2]

Voorbeeld:

Een loterij heeft 1000 loten. Er is één hoofdprijs van 100 euro. Er zijn 100 troostprijzen van 5 euro. Elk lot kost één euro.

Bereken de standaardafwijking van deze kansverdeling.

Bij de keuze uit verschillende loterijen is niet alleen de verwachtingswaarde van belang, maar ook de spreiding van de uitkomsten. Bij twee loterijen met een gelijke verwachte winst zul je kiezen voor de loterij waar de spreiding van de uitkomsten het kleinste is. De spreiding kun je uitdrukken met de **standaardafwijking**.

Stap 1:

Maak een tabel met alle mogelijke winsten en hun kans

w	99	4	-1
$P(W = w)$	0,001	0,1	0,899

12.2 De normale verdeling [2]

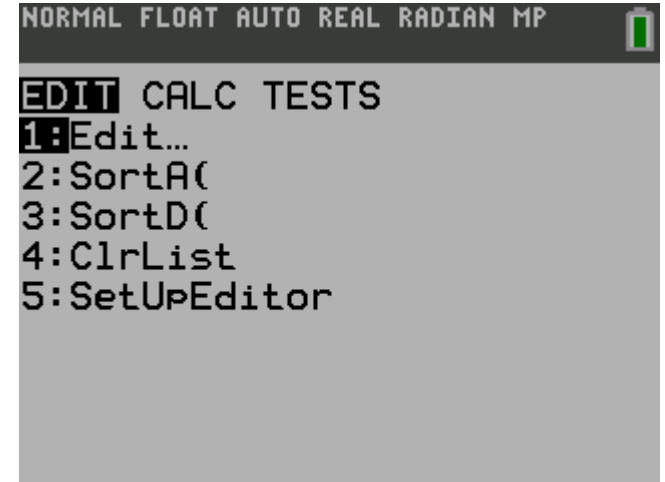
Voorbeeld:

Een loterij heeft 1000 loten. Er is één hoofdprijs van 100 euro. Er zijn 100 troostprijzen van 5 euro. Elk lot kost één euro. Bereken de standaardafwijking van deze kansverdeling.

Step 2:

Bereken de standaardafwijking met de grafische rekenmachine.

STAT | EDIT 1:EDIT | ENTER

$$L1 = \{99, 4, -1\}$$
$$L2 = \{0.001; 0.1; 0.899\}$$
[illegible]

12.2 De normale verdeling [2]

Voorbeeld:

Een loterij heeft 1000 loten. Er is één hoofdprijs van 100 euro. Er zijn 100 troostprijzen van 5 euro. Elk lot kost één euro. Bereken de standaardafwijking van deze kansverdeling.

Stap 2:

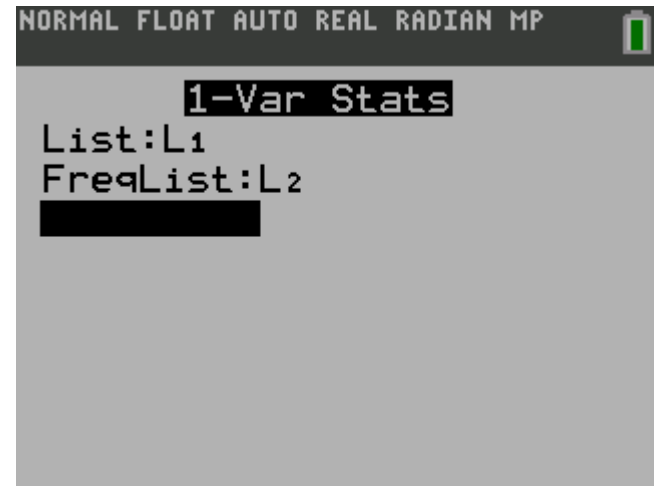
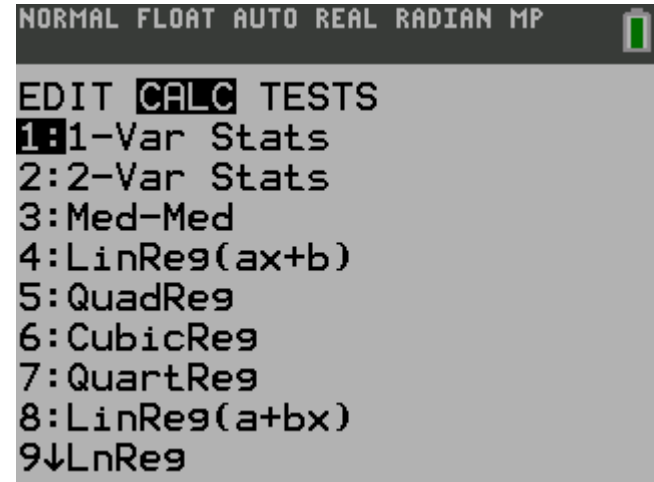
Bereken de standaardafwijking met de grafische rekenmachine.

STAT | CALC | 1-Var Stats | ENTER

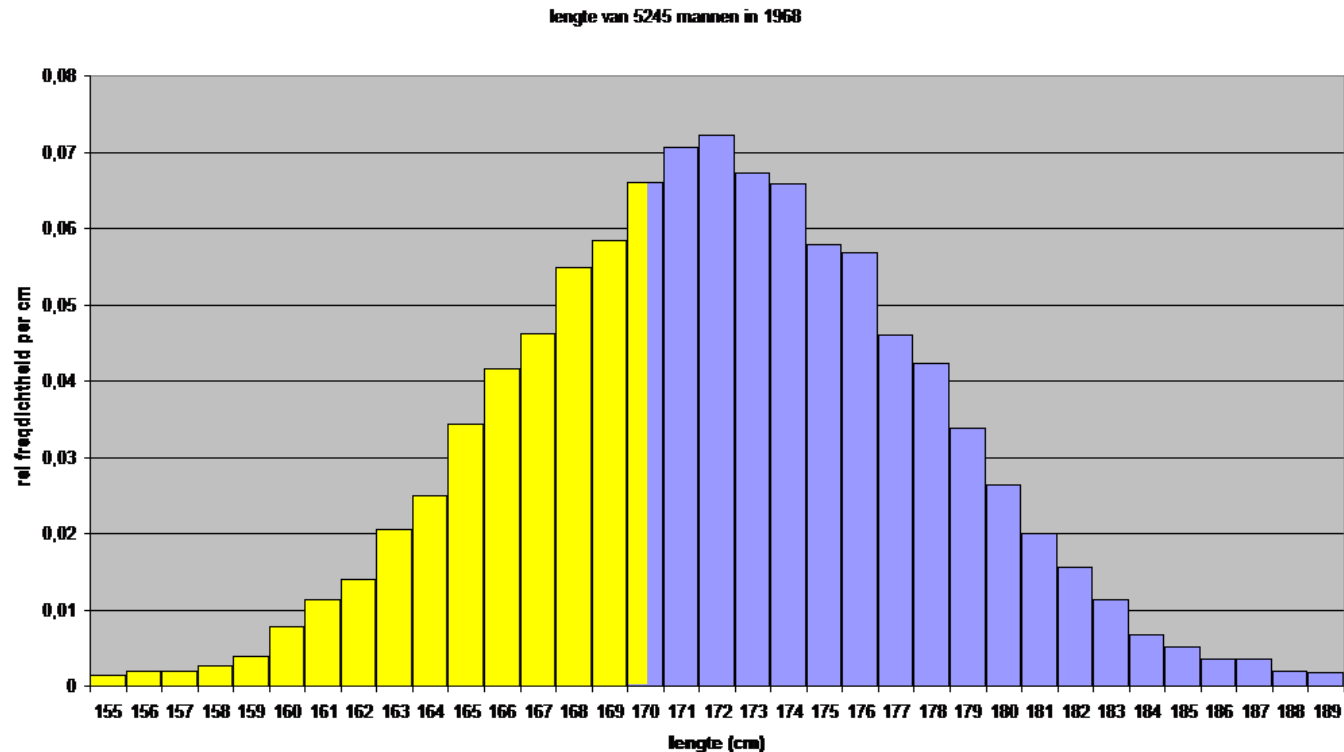
Bij List vul je | **2ND 1** | in

Bij FreqList vul je | **2ND 2** | in

ENTER geeft $\sigma_x \approx 3,48$
met een verwachtingswaarde van -0,4.

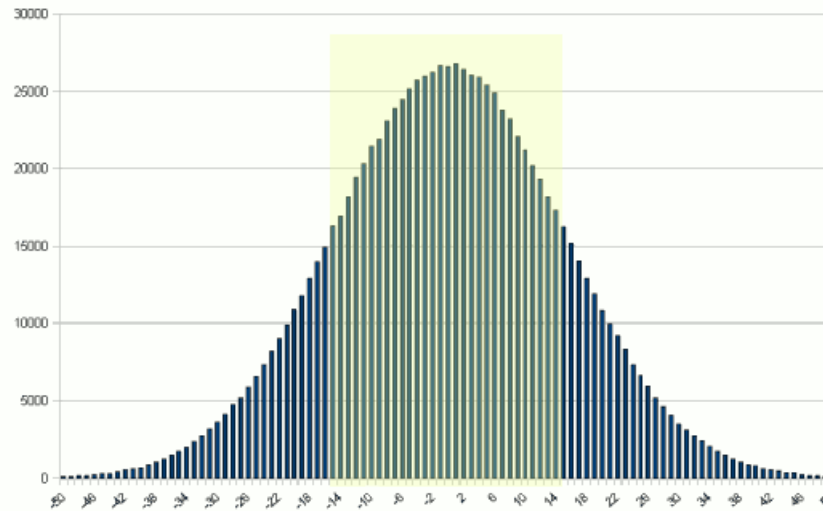


12.2 De normale verdeling [3]



Relatief frequentiepolygoon van de lengte van mannen in 1968

12.2 De normale verdeling [3]



In dit plaatje is een frequentiepolygoon getekend. De klassenbreedtes zijn nu kleiner dan in het vorige plaatje.

12.2 De normale verdeling [3]

Wat valt op?

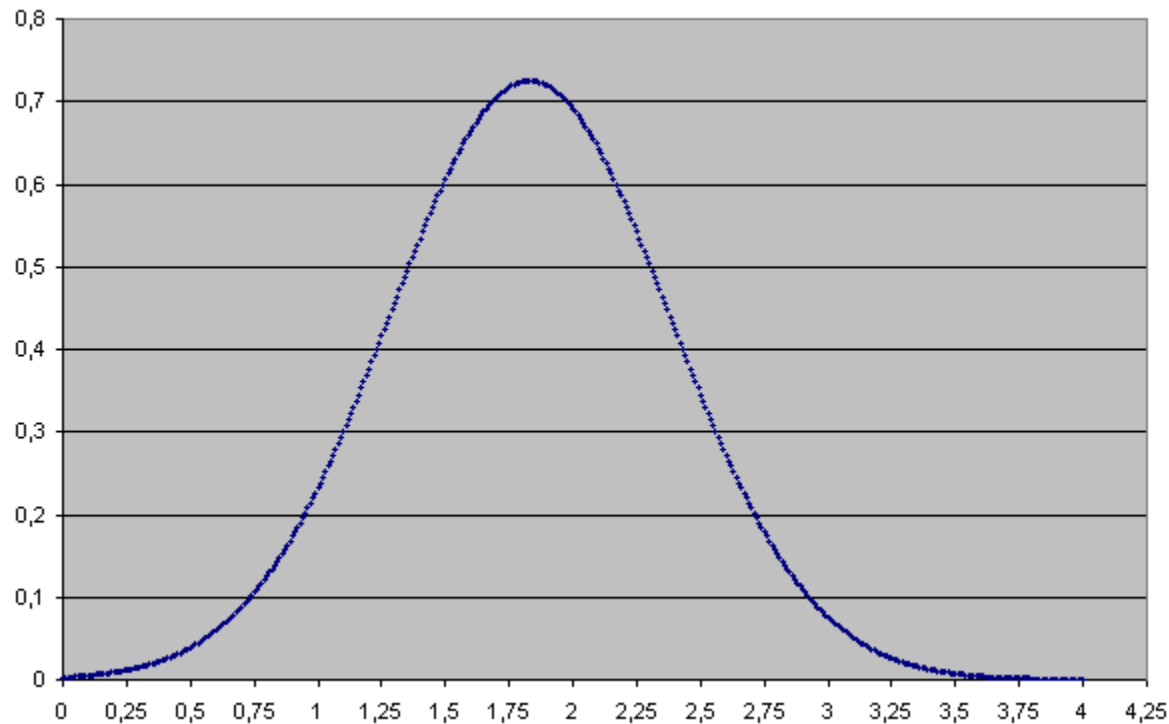
- De twee figuren lijken symmetrisch;
- De meeste waarnemingen bevinden zich rond het midden;
- Hoe verder van het midden, hoe minder waarnemingen er zijn.
- Als de klassenbreedtes kleiner worden krijgt de frequentieverdeling steeds meer de vorm van een “klok”

Deze frequentieverdeling komt vaak voor:

- Lengte van mannen/vrouwen;
- Gewicht van mannen/vrouwen;
- Branduren van een lamp;
- IQ van mensen.

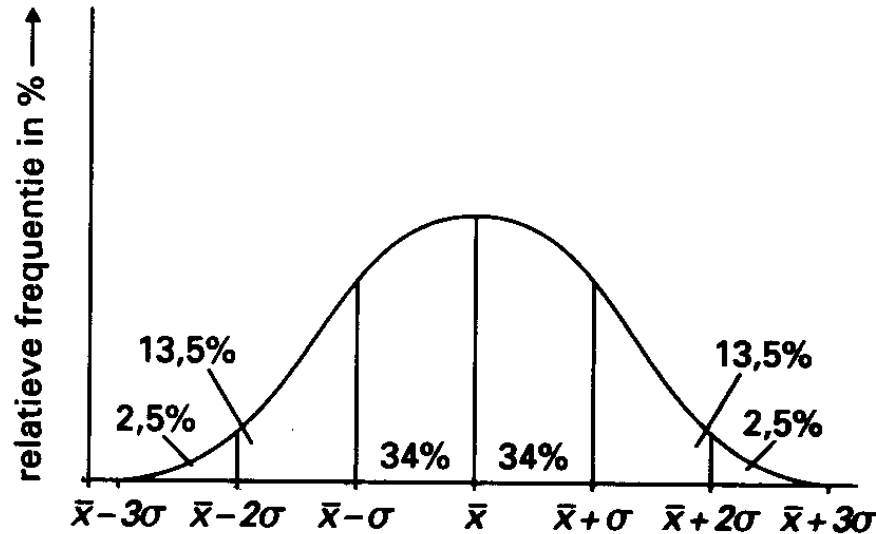
Zo'n verdeling noemen we een **normale verdeling**.

12.2 De normale verdeling [3]



Als we een “heel erg kleine” klassenbreedte nemen ontstaat de **normaalkromme** of **gausskromme**.

12.2 De normale verdeling [3]



Kenmerken van de normale verdeling:

1. De normale verdeling is symmetrisch;
2. De normale verdeling heeft een gemiddelde μ ;
3. De normale verdeling heeft een standaardafwijking σ ;
4. De oppervlakte onder de normaalkromme is altijd 100%

12.2 De normale verdeling [3]

Voor elke normale verdeling geldt het volgende:

De normaal verdeelde toevalsvariabele X heeft kansdichtheid

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Met het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ .

De oppervlakte onder de normaalkromme bereken je met de GR.

12.2 De normale verdeling [3]

Voorbeeld:

De toevalsvariabele X is normaal verdeeld met $\mu = 52$ en $\sigma = 4,3$. Bereken $P(50 \leq X \leq 55)$

Vul bij Y1 de functie $f(x)$ in:

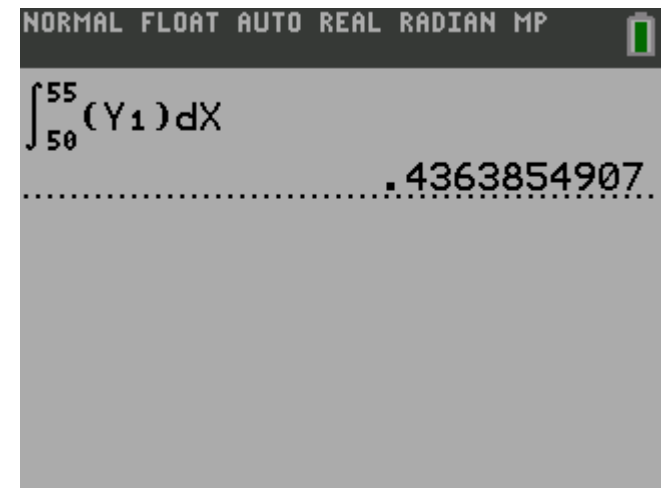
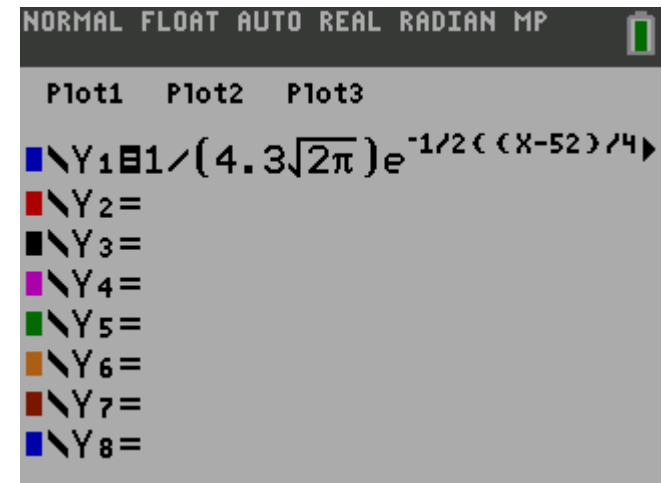
fnInt volgt met:

MATH | MATH | 9:fnInt(

Y1 volgt met:

VARS | Y-VARS | 1: Function | 1:Y₁

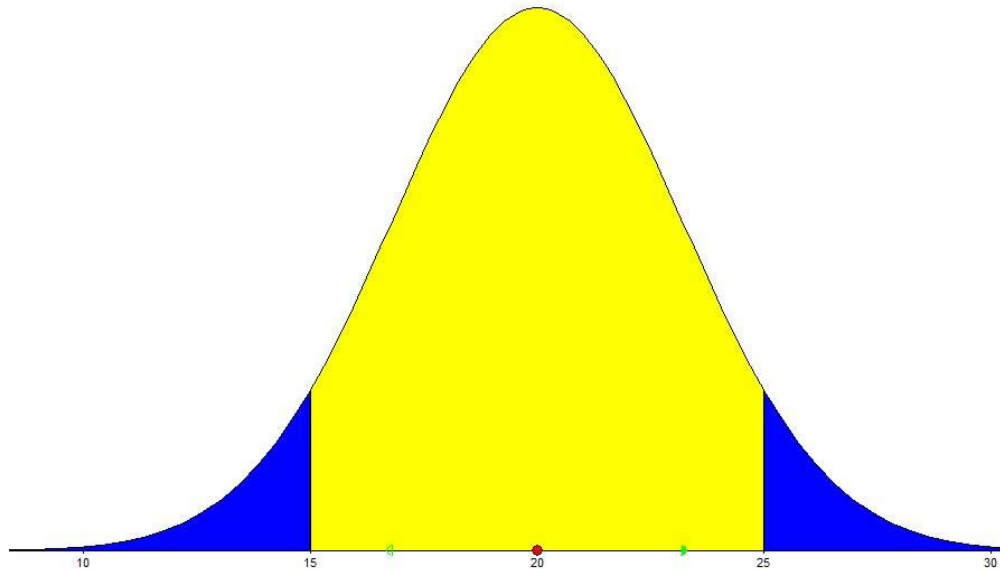
Het antwoord is nu 0,436.



12.2 De normale verdeling [4]

Wanneer van een normale verdeling, het gemiddelde (μ), de standaardafwijking (σ) en een interval gegeven is, kun je de oppervlakte onder de normaalkromme voor dat interval berekenen.

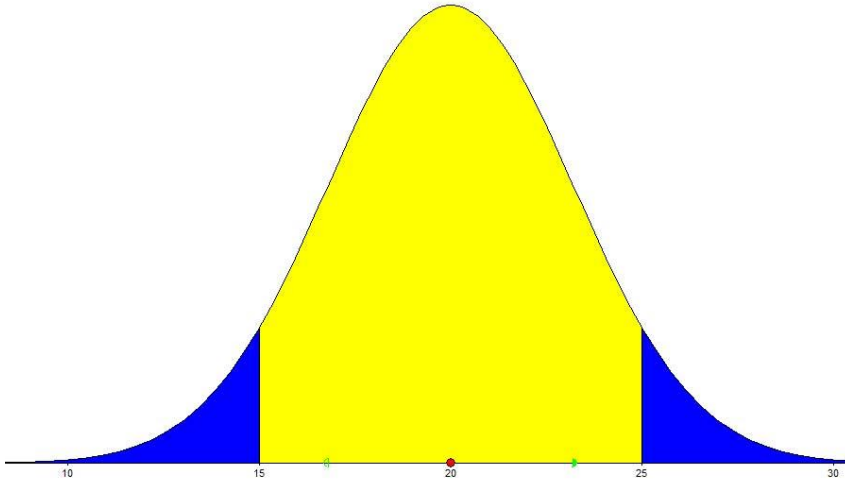
Voorbeeld 1: De stochast X is normaal verdeeld met $\mu = 20$ en $\sigma = 3.2$. Bereken $P(15 \leq X \leq 25)$



12.2 De normale verdeling [4]

Voorbeeld 1: De stochast X is normaal verdeeld met $\mu = 20$ en $\sigma = 3.2$.

Bereken $P(15 \leq X \leq 25)$



Op de GR: 2ND VARS | DISTR 2:normalcdf(| ENTER

Vul bij “lower” de linkergrens in

Vul bij “upper” de rechtergrens in;

Vul bij “ μ ” het gemiddelde in;

Vul bij “ σ ” de standaardafwijking in.

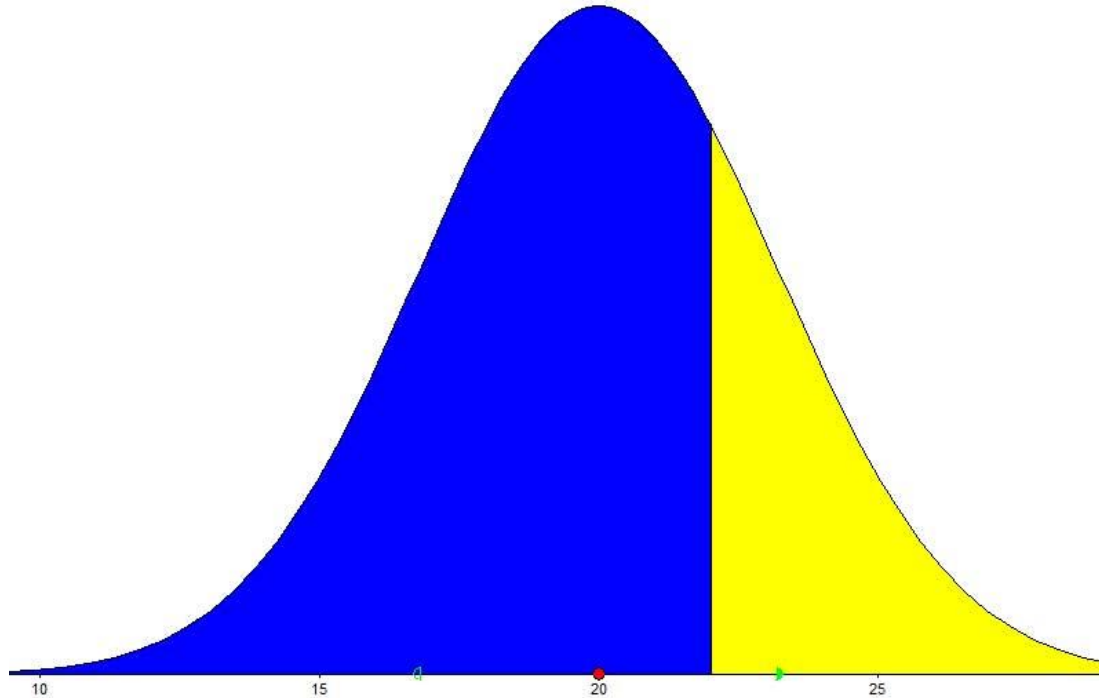
$$P(15 \leq X \leq 25) = \text{normalcdf}(15, 25, 20, 3.2) \approx 0,882$$

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
DISTR DRAW
1:normalpdf(
2:normalcdf(
3:invNorm(
4:invT(
5:tpdf(
6:tcdf(
7: $\chi^2$ pdf(
8: $\chi^2$ cdf(
9:FPdf(
```

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
normalcdf
lower:15
upper:25
 $\mu$ :20
 $\sigma$ :3.2
Paste
```

12.2 De normale verdeling [4]

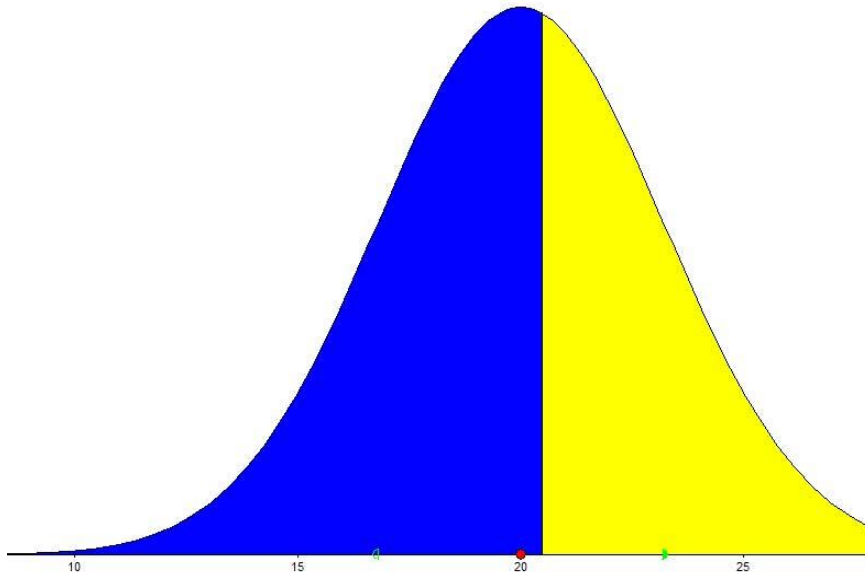
Voorbeeld 2: De stochast X is normaal verdeeld met $\mu = 20$ en $\sigma = 3.2$.
Bereken $P(X \geq 22)$



$$P(X \geq 22) = \text{normalcdf}(22, 10^{99}, 20, 3.2) \approx 0,266$$

12.2 De normale verdeling [5]

Voorbeeld 1: De stochast X is normaal verdeeld met $\mu = 20$ en $\sigma = 3.2$. De oppervlakte links van de grens a is 0,56. Bereken deze grens.



Op de GR: 2ND VARS | DISTR 3:invNorm(| ENTER

Vul bij “area” de oppervlakte links van de grens in;
Vul bij “ μ ” het gemiddelde in;
Vul bij “ σ ” de standaardafwijking in.

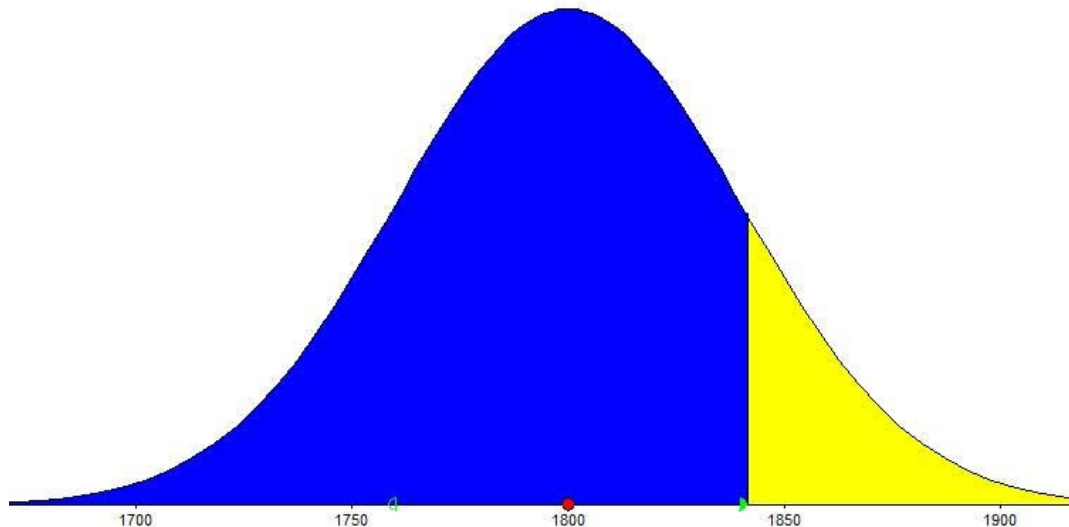
$$a = \text{InvNorm}(0.56, 20, 3.2) \approx 20,48$$

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
DISTR DRAW
1:normalpdf(
2:normalcdf(
3:invNorm(
4:invT(
5:tpdf(
6:tcdf(
7:χ²pdf(
8:χ²cdf(
9↓Fpdf(
```

```
NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP
invNorm
area:0.56
μ:20
σ:3.2
█
```

12.2 De normale verdeling [5]

Voorbeeld 2: Normale verdeling met $\mu = 1800$ en $\sigma = 40$. De oppervlakte rechts van de grens a is 0,15. Bereken deze grens.

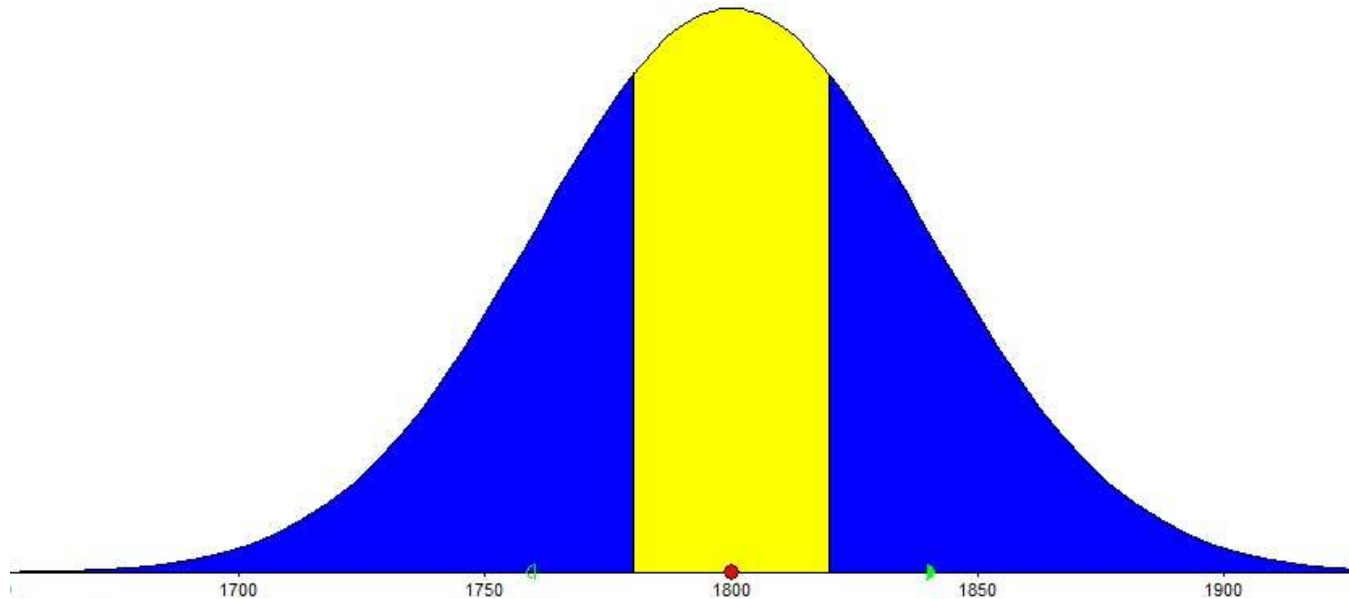


Let op: InvNorm is de oppervlakte links van een bepaalde grens. In dit geval is de oppervlakte links van grens $a = 1 - 0,15 = 0,85$

$$a = \text{invNorm}(0.85, 1800, 40) \approx 1841$$

12.2 De normale verdeling [5]

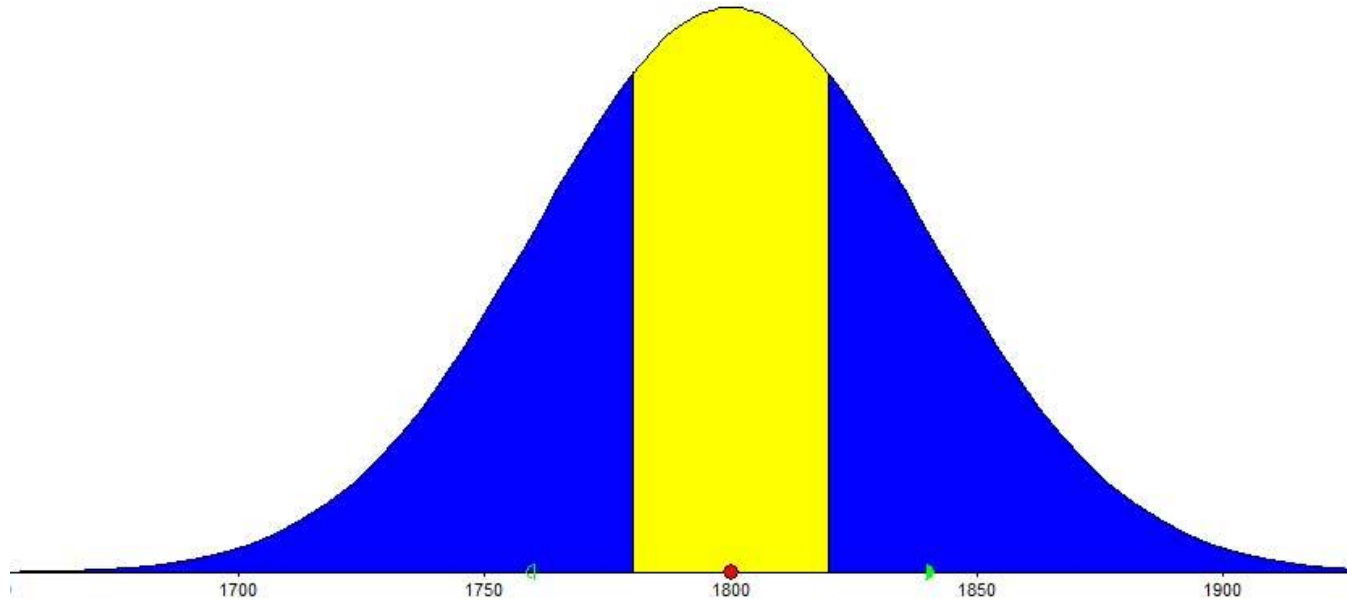
Voorbeeld 3: Normale verdeling met $\mu = 1800$ en $\sigma = 40$. De oppervlakte van Het symmetrische gele gebied is 0,38. Bereken de rechtergrens van dit gebied.



- Oppervlakte gele gebied = 0,38
- Oppervlakte blauwe gebied = $1 - 0,38 = 0,62$
- Oppervlakte blauwe gebied links = $0,62/2 = 0,31$ (vanwege symmetrie)
- Oppervlakte geel + blauw voor rechtergrens = $0,31 + 0,38 = 0,69$

12.2 De normale verdeling [5]

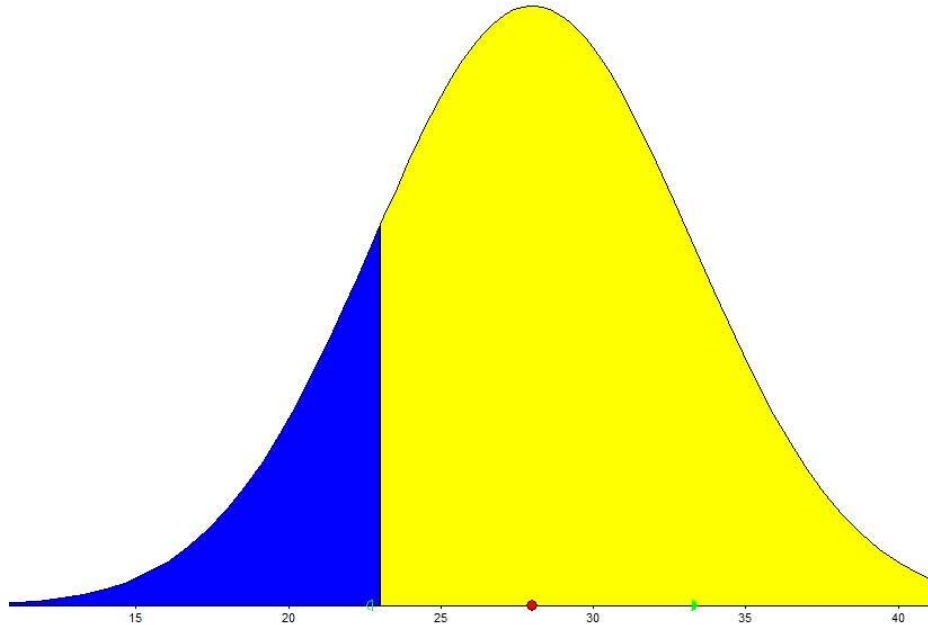
Voorbeeld 3: Normale verdeling met $\mu = 1800$ en $\sigma = 40$. De oppervlakte van Het symmetrische gele gebied is 0,38. Bereken de rechtergrens van dit gebied.



Rechtergrens = $\text{InvNorm}(0.69, 1800, 40) = 1820$

12.2 De normale verdeling [5]

Voorbeeld 4: Normale verdeling met $\mu = 28$ en $\sigma =$ onbekend. De oppervlakte Rechts van 23 is 0,83. Bereken de standaardafwijking.



Er moet gelden $\text{normalcdf}(23, 10^{99}, 28, \sigma) = 0,83$

Met de GR: $Y1 = \text{normalcdf}(23, 10^{99}, 28, \sigma)$

$Y2 = 0,83$ en **INTERSECT**

[Let op grenzen van assen!!!]

12.3 Toepassingen van de normale verdeling [2]

Voorbeeld:

Een machine vult pakken koffie met een gemiddelde van 510 gram en een standaardafwijking van 5 gram.

Bereken de kans dat in een steekproef van 20 pakken minstens drie pakken minder dan 505 gram bevatten.

X = aantal pakken koffie dat minder dan 505 gram bevat

$n = 20$

p = kans dat één pak koffie minder dan 505 gram bevat

$p = \text{normalcdf}(-10^9, 505, 510, 5) = 0.159\dots$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \text{binomcdf}(20, 0.159\dots, 2) \approx 0.637$

12.4 Som en verschil van toevalsvariabelen [1]

Algemeen:

Voor een tweetal **onafhankelijke** toevalsvariabelen X en Y geldt:

$$\mu_{x+y} = \mu_x + \mu_y \text{ en } \sigma_{x+y} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

De bovenstaande twee regels zijn de **somregel voor de verwachtingswaarde** en de **somregel voor de standaardafwijking**.

Centrale limietstelling:

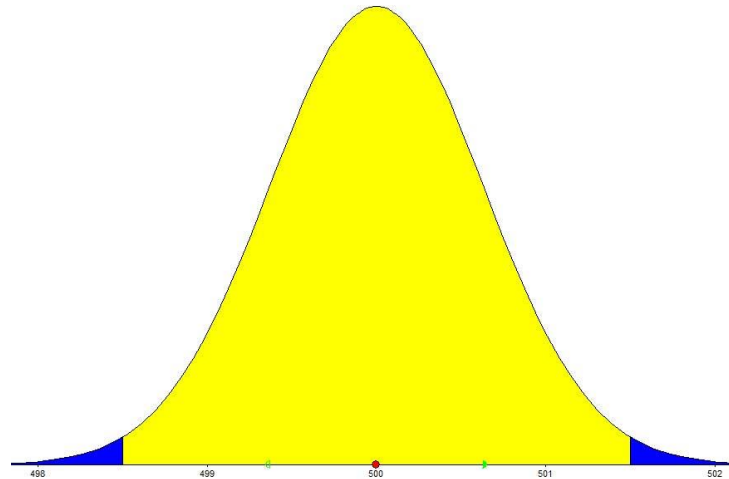
De som $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ van n gelijke, onderling onafhankelijke toevalsvariabelen X met verwachtingswaarde $E(X)$ en standaardafwijking σ_x is voor grote waarden van n bij benadering normaal verdeeld met $\mu_S = n \cdot E(X)$ en $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_x$.

Het gemiddelde $\bar{X}$ van n gelijke, onderling onafhankelijke toevalsvariabelen X met verwachtingswaarde $E(X)$ en standaardafwijking σ_x is voor grote waarden van n bij benadering normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = E(X)$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$.

12.4 Som en verschil van toevalsvariabelen [2]

Voorbeeld: Van een blik erwten uit een pallet is het gemiddelde gewicht 500 gram met een standaardafwijking van 2 gram. Bereken de kans dat het gemiddelde gewicht van 10 blikken minder dan 1,5 gram van het gemiddelde afwijkt.

$$\mu_{\bar{X}} = E(X) = 500 \text{ en } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$



$$P(498.5 < \bar{X} < 501.5) = \text{normalcdf}(498.5, 501.5, 500, 2/\sqrt{10}) \approx 0,9821$$

12.4 Som en verschil van toevalsvariabelen [3]

Voorbeeld 1: Een artikel wordt geproduceerd in twee fasen:

De productietijd X van fase I is normaal verdeeld met $\mu_x = 180$ en $\sigma_x = 2$

De productietijd Y van fase II is normaal verdeeld met $\mu_y = 23$ en $\sigma_y = 1$

Hoeveel procent van de artikelen heeft een totale productietijd $Z (X + Y)$ van minder dan 200 seconden?

In dit voorbeeld zijn er twee **onafhankelijke** normaal verdeelde toevalsvariabelen waarvan je de som neemt. **Deze som Z is ook een normaal verdeelde toevalsvariabele** met:

$$\mu_z = \mu_x + \mu_y \text{ en } \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Wanneer je van twee onafhankelijke normaal verdeelde toevalsvariabelen het verschil neemt geldt:

$$\mu_z = \mu_x - \mu_y \text{ en } \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

12.4 Som en verschil van toevalsvariabelen [3]

Voorbeeld 1: Een artikel wordt geproduceerd in twee fasen:

De productietijd X van fase I is normaal verdeeld met $\mu_x = 180$ en $\sigma_x = 2$

De productietijd Y van fase II is normaal verdeeld met $\mu_y = 23$ en $\sigma_y = 1$

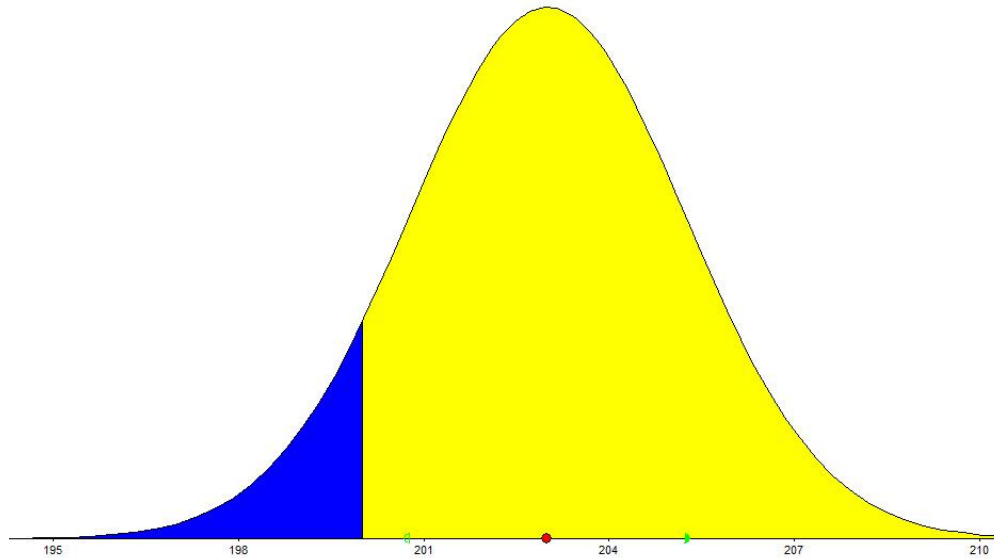
Hoeveel procent van de artikelen heeft een totale productietijd Z ($X + Y$) van minder dan 200 seconden?

Z is normaal verdeeld met gemiddelde μ_z en standaardafwijking σ_z :

$$\mu_z = \mu_x + \mu_y = 180 + 23 = 203 \text{ en } \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

12.4 Som en verschil van toevalsvariabelen [3]

Voorbeeld 1: Hoeveel procent van de artikelen heeft een totale productietijd $Z (X + Y)$ van minder dan 200 seconden?



$$\text{Opp} = \text{normalcdf}(-10^{99}, 200, 203, \sqrt{5}) \approx 0,090$$

Dus $0,09 \cdot 100\% = 9,0\%$ heeft een productietijd van minder dan 200 seconden.

12.4 Som en verschil van toevalsvariabelen [3]

Voorbeeld 2: Van een blik erwten uit een pallet is het gewicht X normaal verdeeld met $\mu_x = 500$ en $\sigma_x = 2$. Er wordt nu een steekproef van 10 blikken uit deze pallet genomen. Bereken de kans dat het gewicht van deze 10 blikken minder is dan 4985 gram.

Het totale gewicht van deze 10 blikken ($X_{\text{som}} = X + X + \dots + X$) is nu normaal verdeeld met:

$$\mu_{X_{\text{som}}} = \mu_x + \mu_x + \dots + \mu_x = 10 \cdot \mu_x = 10 \cdot 500 = 5000$$

$$\sigma_{X_{\text{som}}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x^2 + \dots + \sigma_x^2} = \sqrt{10 \cdot \sigma_x^2} = \sqrt{10 \cdot 2^2} = \sqrt{10} \cdot 2$$

Wanneer je een steekproef met een grootte van n neemt geldt:

De som ($X_{\text{som}} = X + X + \dots + X$) van deze steekproef is normaal verdeeld met:

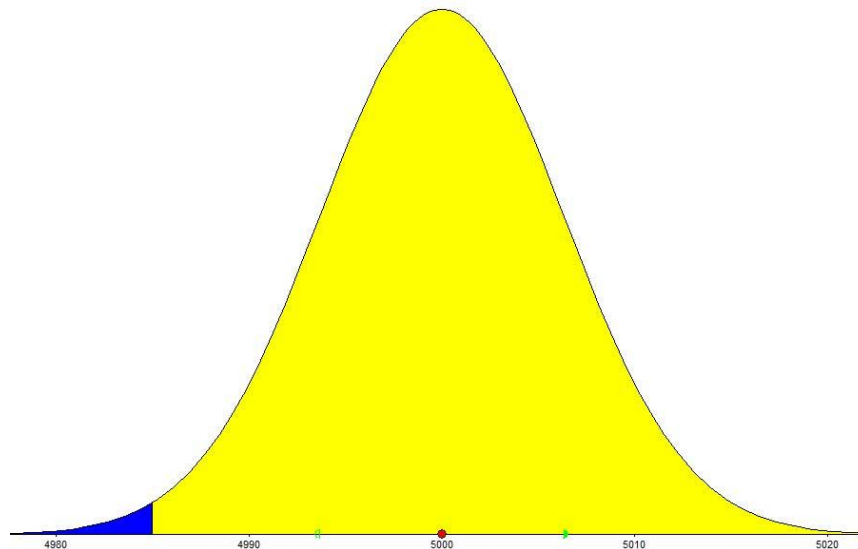
$$\mu_{X_{\text{som}}} = \mu_x + \mu_x + \dots + \mu_x = n \cdot \mu_x \text{ en}$$

$$\sigma_{X_{\text{som}}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x^2 + \dots + \sigma_x^2} = \sqrt{n \cdot \sigma_x^2} = \sqrt{n} \cdot \sigma_x$$

12.4 Som en verschil van toevalsvariabelen [3]

Voorbeeld 2: Van een blik erwten uit een pallet is het gewicht X normaal verdeeld met $\mu_x = 500$ en $\sigma_x = 2$. Er wordt nu een steekproef van 10 blikken uit deze pallet genomen. Bereken de kans dat het gewicht van deze 10 blikken minder is dan 4985 gram.

$$\mu_{X_{\text{som}}} = 5000 \text{ en } \sigma_{X_{\text{som}}} = \sqrt{10} \cdot 2$$



$$\text{Opp} = \text{normalcdf}(-10^9, 4985, 5000, \sqrt{10} \cdot 2) = 0,00886$$

12.5 De exponentiële verdeling [1]

Voorbeeld 1:

Bij een helpdesk van een bedrijf komen op een ochtend tussen 8 en 9 uur gemiddeld 15 telefoontjes binnen. Wat is de kans dat er op een ochtend tussen 8 en 9 uur, minstens 20 telefoontjes binnenkomen?

Stel dat dit bedrijf 10.000 klanten heeft. De kans dat een willekeurige klant op een ochtend tussen 8 en 9 uur belt is dan $\frac{15}{10.000}$.

Er is nu sprake van een binomiale verdeling met

$X =$ aantal telefoontjes dat binnenkomt

$n = 10.000$

$p = \frac{15}{10.000}$

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - \text{binomcdf}(10.000, \frac{15}{10.000}, 19) \approx 0,125$$

Als je voor n een ander groot getal kiest (p verandert dan ook), krijg je steeds dezelfde uitkomst.

12.5 De exponentiële verdeling [1]

In het voorbeeld weet je eigenlijk heel weinig. Je weet wel dat er sprake is van een binomiale kans met een zeer groot aantal experimenten en een zeer kleine kans op succes. In dit geval kun je gebruik maken van de **poissonverdeling**:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \text{ voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

e = grondtal van de natuurlijke logaritme ($e \approx 2,718$)

λ = gemiddeld aantal keren succes op het interval $[0,1]$

X = aantal successen op $[0, 1]$

Je gebruikt de poissonverdeling als **alleen** het gemiddelde aantal keren succes bekend is.

Het gemiddeld aantal successen op $[0, t]$ is t keer zo groot als op $[0, 1]$

$$P(X = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(t\lambda)^k}{k!} \text{ voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

λ = gemiddeld aantal keren succes op het interval $[0,1]$

X = aantal successen op $[0, t]$

12.5 De exponentiële verdeling [1]

De tijd T tussen twee poissonsuccessen is een continue toevalsvariabele die **exponentieel verdeeld** is.

$$P(T \leq t) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \frac{(t\lambda)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

De tijd tussen twee successen is kleiner dan of gelijk aan t als X op $[0, t]$ minstens één succes heeft.

De kansdichtheid van een exponentiële verdeling is: $f_{\lambda}(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$

De verdelingsfunctie van een exponentiële verdeling is: $F_{\lambda}(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$

De verwachtingswaarde is: $\mu = E(T) = \frac{1}{\lambda}$

12.5 De exponentiële verdeling [1]

Voorbeeld 2:

De tijd T in uren die een reparatie van een defecte robot in een autofabriek duurt, is exponentieel verdeeld. De gemiddelde reparatietijd is drie uur.

Bereken **exact** de kans dat een defecte robot binnen drie uur is gerepareerd.

$$\mu = 3 \text{ en } \lambda = \frac{1}{3}$$

$$P(T < 3) = 1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 3} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

Bereken de kans dat een defecte robot binnen drie uur is gerepareerd.

X = aantal defecte robots dat binnen drie uur word gerepareerd.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 1$.

$$P(T < 3) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \text{poissonpdf}(1, 0) \approx 0,632$$

12.5 De exponentiële verdeling [1]

Voorbeeld 3:

De tijd T in uren die een reparatie van een defecte robot in een autofabriek duurt, is exponentieel verdeeld. De gemiddelde reparatietijd is drie uur.

Bereken **exact** de kans dat een reparatie langer dan anderhalf uur duurt.

$$\mu = 3 \text{ en } \lambda = \frac{1}{3}$$

$$P(T > 1\frac{1}{2}) = 1 - P(T \leq 1\frac{1}{2}) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Bereken de kans dat een reparatie langer dan anderhalf uur duurt.

X = aantal defecte robots dat binnen anderhalf uur wordt gerepareerd.

X is poissonverdeeld met $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$P(T < 1\frac{1}{2}) = P(X = 0) = \text{poissonpdf}(\frac{1}{2}, 0) \approx 0,607$$

12.5 De exponentiële verdeling [1]

Voorbeeld 4:

De tijd T in uren die een reparatie van een defecte robot in een autofabriek duurt, is exponentieel verdeeld. De gemiddelde reparatietijd is drie uur.

De kans dat de reparatie korter duurt dan x uur is 0,8. Bereken x in minuten nauwkeurig.

$$P(T < x) = 0,8$$

$$1 - e^{-\frac{1}{3}x} = 0,8$$

$$e^{-\frac{1}{3}x} = 0,2$$

$$-\frac{1}{3}x = \ln(0,2)$$

$$x = -3\ln(0,2) \approx 4,828$$

Dus 4 uur en 50 minuten.

12.5 De exponentiële verdeling [2]

De verdelingsfunctie van de som X van twee exponentieel verdeelde toevalsvariabelen met parameter λ is

$$F_{\lambda}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

De som van n gelijke, exponentieel verdeelde toevalsvariabelen wordt een **gammaverdeling** genoemd.

12.5 De exponentiële verdeling [2]

Voorbeeld 1:

De tijd T in uren die een monteur nodig heeft voor de reparatie van een defecte laptop is exponentieel verdeeld. De gemiddelde reparatietijd is 45 minuten.

Bereken **exact** de kans dat de monteur twee laptops binnen één uur repareert.

X = het aantal laptops dat binnen één uur wordt gerepareerd

X is poissonverdeeld met $\lambda = 4/3$ want $\mu = 3/4$

$$P(T + T < 1) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - e^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^0}{0!} - e^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^1}{1!} = 1 - e^{-\frac{4}{3}} - \frac{4}{3} e^{-\frac{4}{3}} = 1 - 2\frac{1}{3} e^{-\frac{4}{3}}$$

12.5 De exponentiële verdeling [2]

Voorbeeld 2:

De tijd T in uren die een monteur nodig heeft voor de reparatie van een defecte laptop is exponentieel verdeeld. De gemiddelde reparatietijd is 45 minuten.

Bereken de kans dat de monteur vijf laptops binnen drie uur repareert.

X = het aantal laptops dat binnen één uur wordt gerepareerd

X is poissonverdeeld met $\lambda = 3/(\frac{3}{4}) = 4$

$$P(T + T + T + T + T < 3) = P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \text{poissoncdf}(4, 4) \approx 0,371$$

12.5 De exponentiële verdeling [2]

Voorbeeld 3:

De tijd T in uren die een monteur nodig heeft voor de reparatie van een defecte laptop is exponentieel verdeeld. De gemiddelde reparatietijd is 45 minuten.

De kans dat de monteur binnen a uur drie laptops repareert is 0,8.
Bereken a in minuten nauwkeurig.

X = het aantal laptops dat binnen a uur wordt gerepareerd

X is poissonverdeeld met $\lambda = a / (3/4) = 1\frac{1}{3}a$

$$P(T + T + T < a) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \text{poissoncdf}(1\frac{1}{3}a, 2)$$

Invoeren in de GR:

$$Y1 = 1 - \text{poissoncdf}(1\frac{1}{3}X, 2)$$

$$Y2 = 0,8$$

Intersect geeft $x = 3,20...$

Dit is gelijk aan 3 uur en 13 minuten.