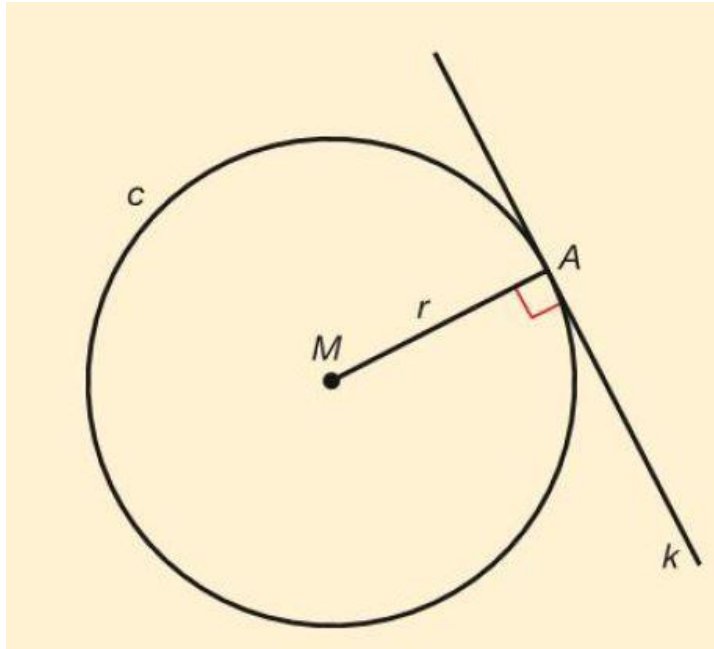


13.0 Voorkennis



Op de cirkel liggen alle punten met een
Gelijke afstand tot het middelpunt van de
cirkel.

Voor een punt p op de cirkel geldt $d(P, M) = r$

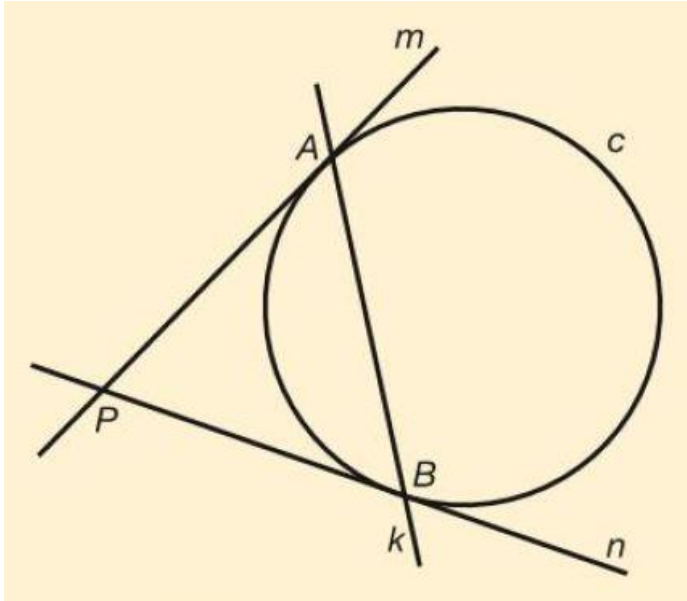
Definitie van raaklijn aan cirkel:

Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die precies
één punt gemeenschappelijk heeft met de cirkel.

Stelling van raaklijn aan cirkel:

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht
op de straal naar het raakpunt.

13.0 Voorkennis



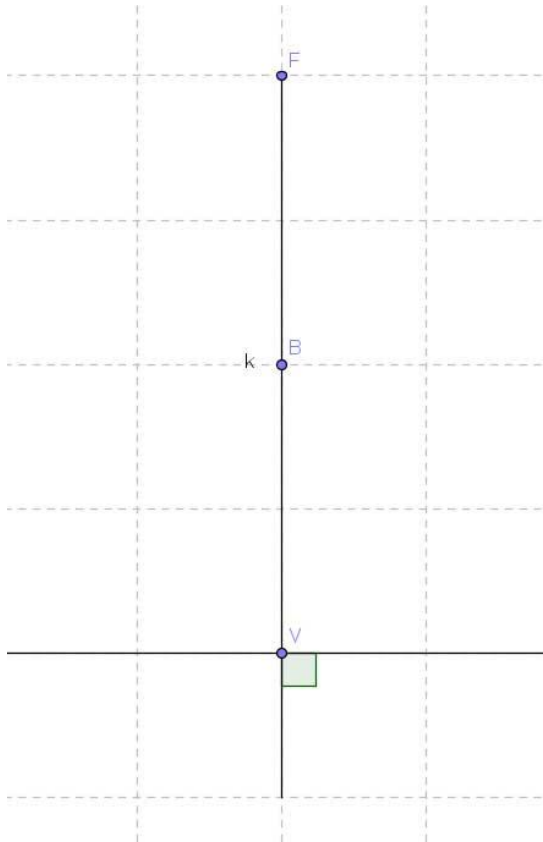
De lijn k snijdt de cirkel c in de punten A en B .
De lijn m raakt c in A en de lijn n raakt c in B .
De lijnen m en n snijden elkaar in punt P .
Het punt P heet de pool van de lijn k , en de lijn k heet de poollijn van de pool P .

13.0 Voorkennis

Voorbeeld:

Gegeven zijn een lijn l en een punt F dat niet op deze lijn ligt.

Geef alle punten die op een gelijke afstand van punt F en lijn l liggen weer.



Stap 1:

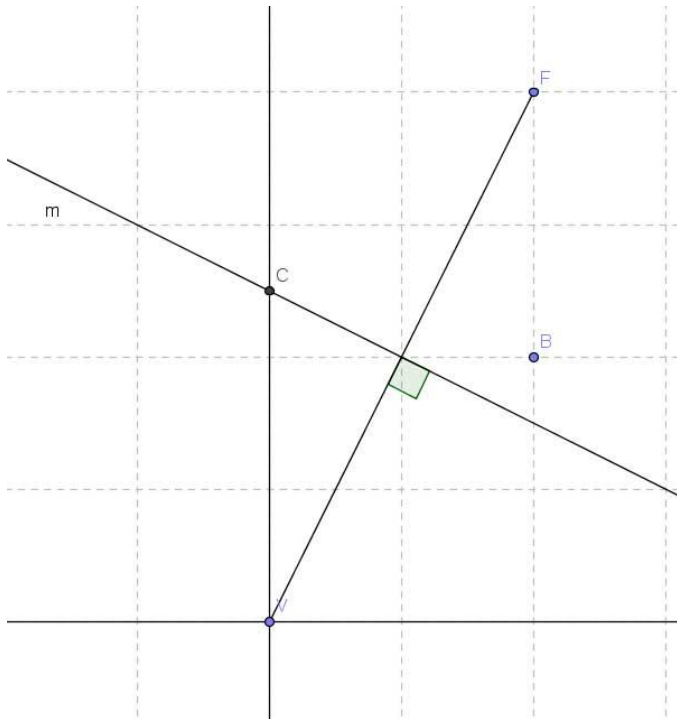
Door een lijn vanuit F loodrecht op l te tekenen
Kan het punt B eenvoudig gevonden worden.

13.0 Voorkennis

Voorbeeld:

Gegeven zijn een lijn l en een punt F dat niet op deze lijn ligt.

Geef alle punten die op een gelijke afstand van punt F en lijn l liggen weer.



Stap 2:

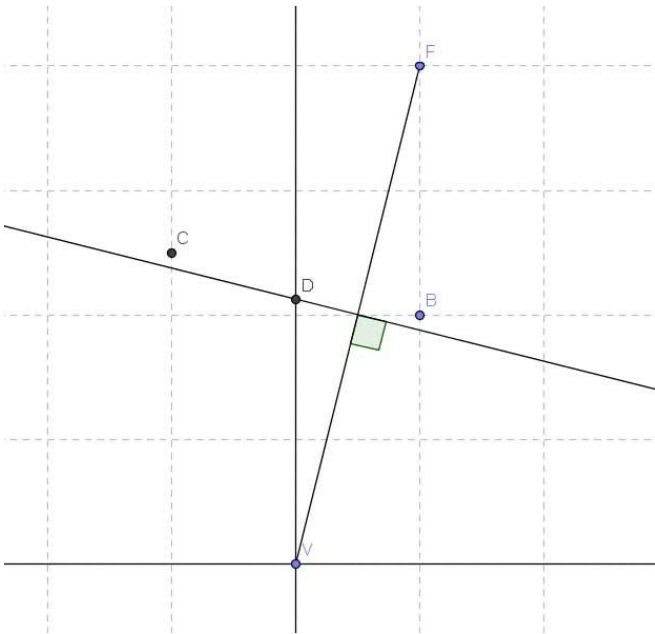
- Teken een punt V op de lijn l ;
- Teken door V de loodlijn k op l ;
- Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV ;
- Het snijpunt van k en m is het punt C ;

13.0 Voorkennis

Voorbeeld:

Gegeven zijn een lijn l en een punt F dat niet op deze lijn ligt.

Geef alle punten die op een gelijke afstand van punt F en lijn l liggen weer.



Stap 3:

- Teken een ander punt V op de lijn l ;
- Teken door V de loodlijn k op l ;
- Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV ;
- Het snijpunt van k en m is het punt D ;

13.0 Voorkennis

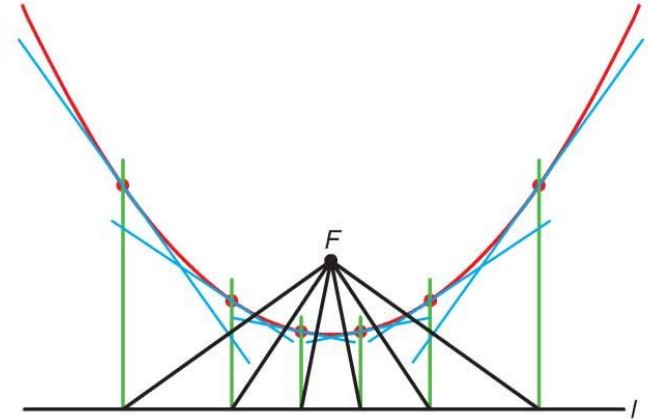
Algemeen:

Het punt F heet het **brandpunt van de parabool**

De lijn l heet de **richtlijn van de parabool**.

Definitie van een parabool:

Een parabool met brandpunt F en richtlijn l (F niet op l) is een verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een lijn en een punt dat niet op een lijn ligt.



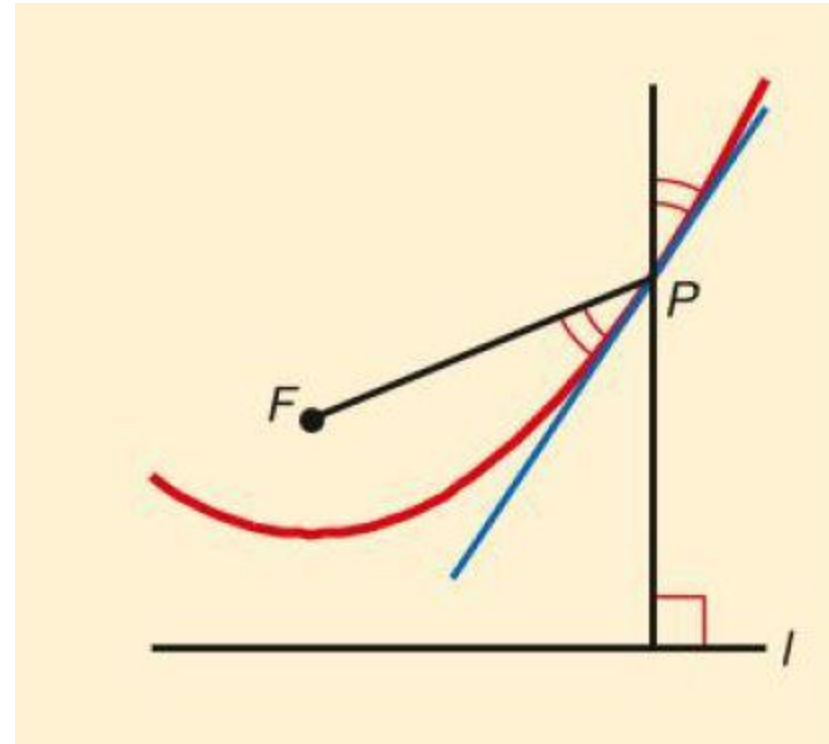
Let op:

Een parabool kun je dus op een meetkundige manier beschrijven, maar ook met behulp van een formule. Oorspronkelijk werd een parabool in de wiskunde meetkundig beschreven. Pas veel later is er hier een formule voor gekomen.

13.0 Voorkennis

Raaklijneigenschap parabool:

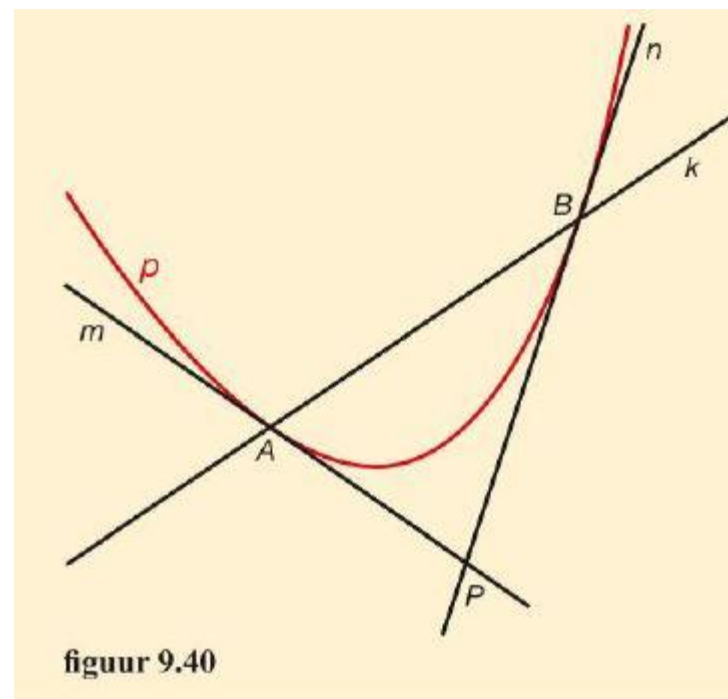
De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn.



13.0 Voorkennis

De lijn k snijdt de parabool p in de punten A en B . De lijn m raakt p in A en de lijn n raakt p in B . De lijnen m en n snijden elkaar in het punt P .

Het punt P heet de pool van lijn k , en de lijn k heet de poollijn van de pool P .



13.0 Voorkennis

Voorbeeld:

Gegeven is een richtcirkel c met brandpunt F en middelpunt M .
Teken nu een punt P van de ellips.

Stap 1:

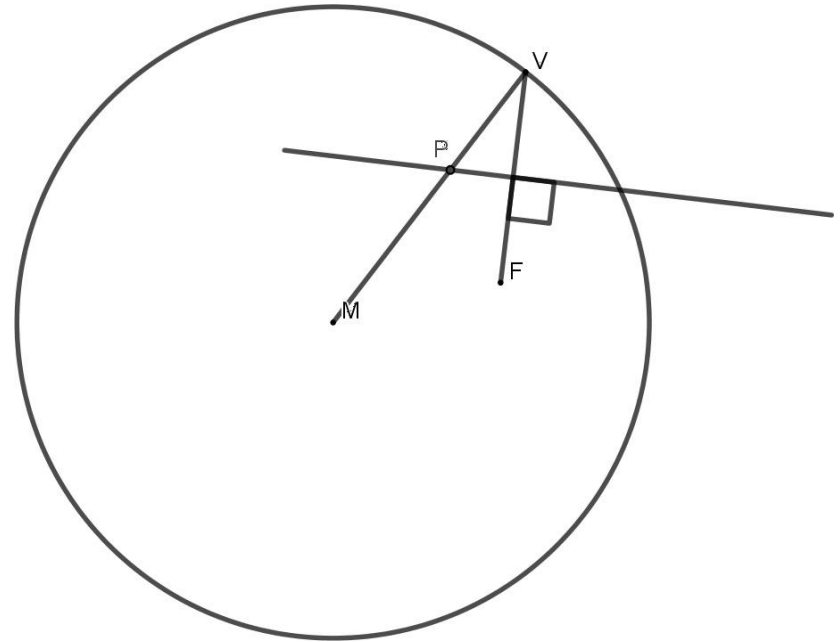
Teken een punt V op de richtcirkel.

Stap 2:

Teken de lijn k door M en V .

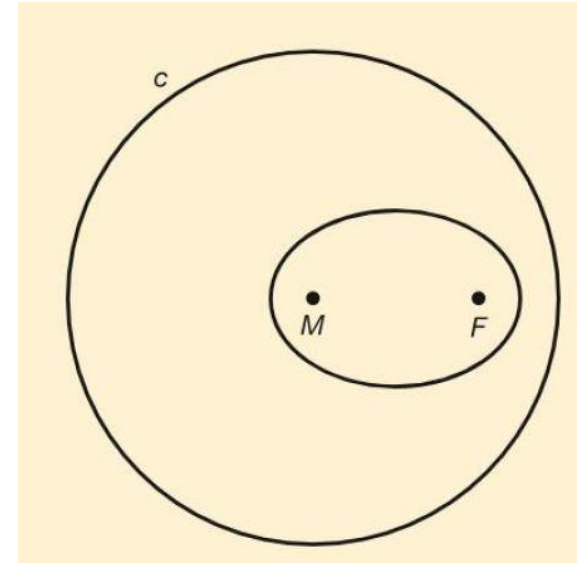
Stap 3:

Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV . Het snijpunt van k en m is het punt P .



13.0 Voorkennis

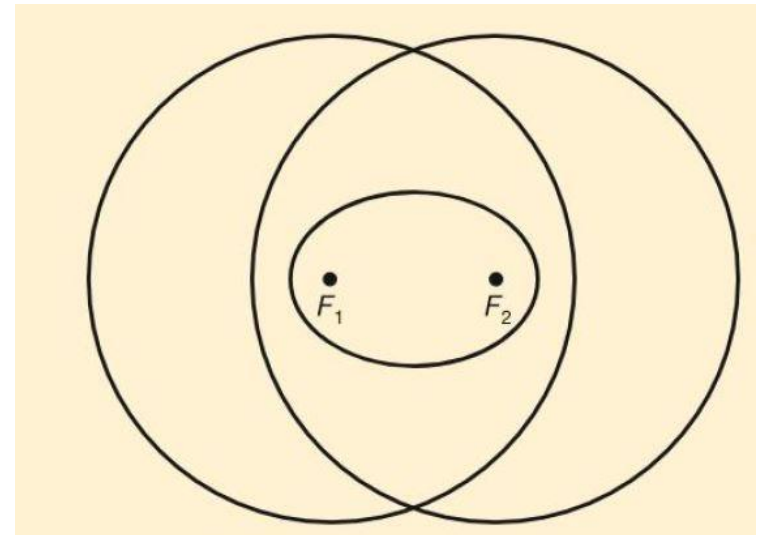
Een ellips is de verzameling van alle punten P met gelijke afstanden tot een cirkel en een punt binnen de cirkel. Het punt binnen de cirkel is een brandpunt F van de ellips, en de cirkel c is een richtcirkel van de ellips. Er geldt dus $d(P, F) = d(P, c)$



De ellips heeft twee brandpunten. Het andere brandpunt is het middelpunt M van de richtcirkel.

Samengevat:

Een ellips is de verzameling van alle punten P waarvoor geldt $d(P, F_2) + d(P, F_1) = \text{constant}$. De punten F_1 en F_2 zijn de brandpunten van de ellips.

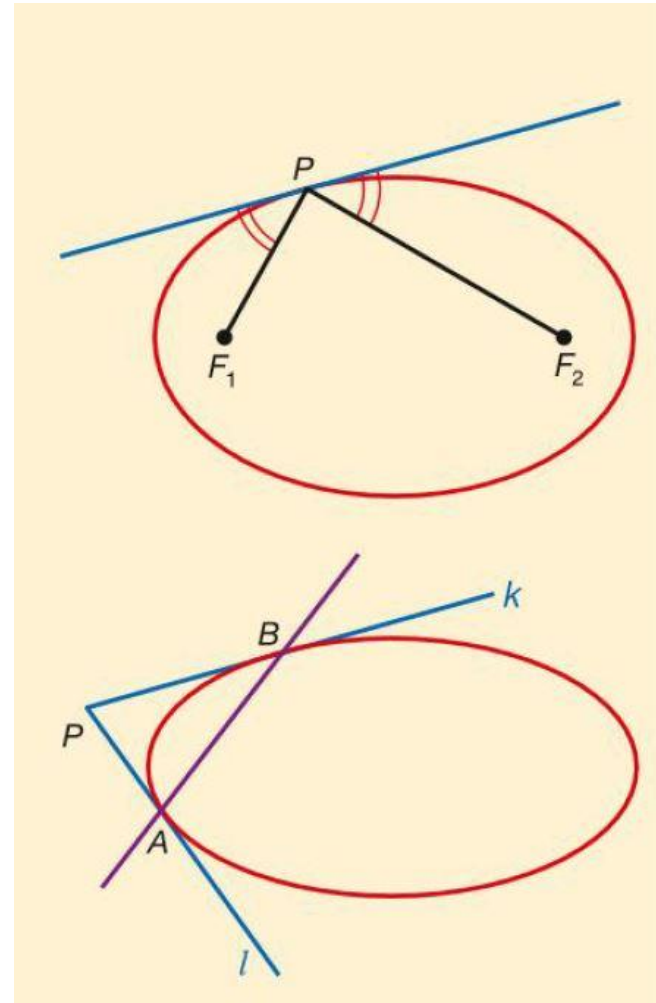


13.0 Voorkennis

Raaklijneigenschap ellips:

De raaklijn in een punt P van een ellips maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten.

De lijn AB is de poollijn van de ellips.

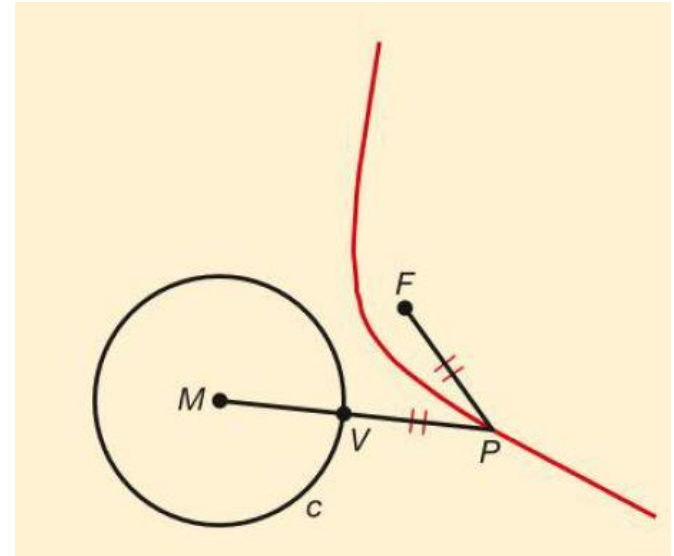


13.0 Voorkennis

Algemeen:

Een hyperbooltak is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een cirkel

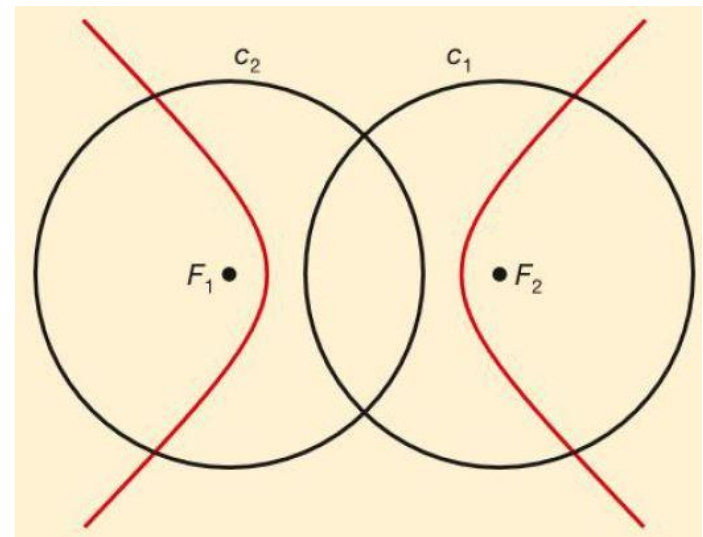
en een punt **BUITEN** de cirkel.



Algemeen:

Voor alle punten P op een hyperbool geldt:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = r$$

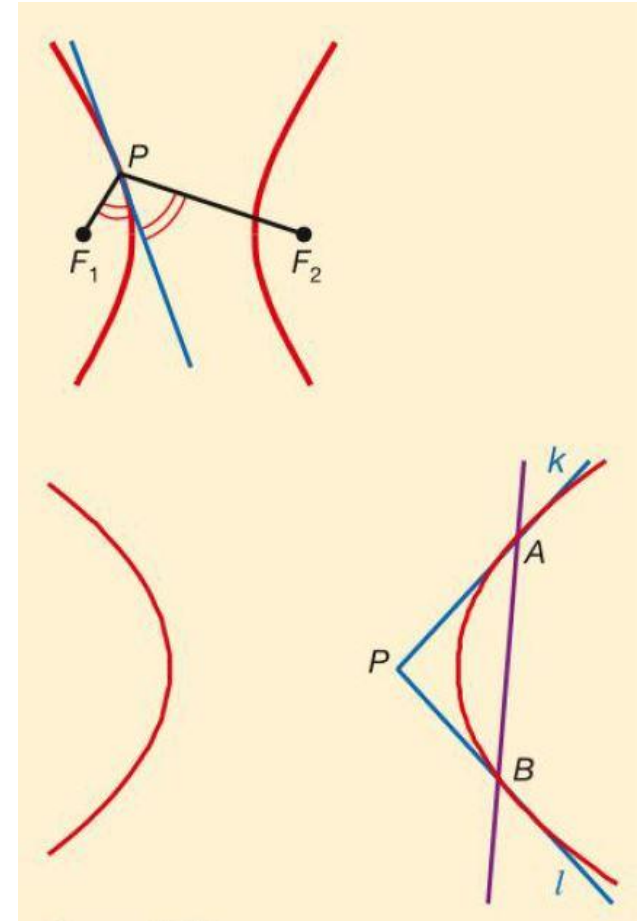


13.0 Voorkennis

Raaklijneigenschap hyperbool:

De raaklijn in een punt P van een hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten.

De lijn AB is de poollijn van de hyperbool.



13.0 Voorkennis

Voorbeeld:

Het punt $A(2, 3)$ ligt op de cirkel c : $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$
Stel de vergelijking op van de lijn k die c raakt in A .

Stap 1:

Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn l door M en A .

$M(3, 1)$ is het middelpunt van c .

$$rc_l = \frac{3-1}{2-3} = -2$$

Stap 2:

Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn k .

Omdat de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan geldt: $rc_k = \frac{1}{2}$

13.0 Voorkennis

Voorbeeld:

Het punt $A(2, 3)$ ligt op de cirkel c : $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$
Stel de vergelijking op van de lijn k die c raakt in A .

Stap 3:

Stel de vergelijking van lijn k op.

$$k: y = \frac{1}{2}x + b$$

Invullen van $A(2, 3)$ geeft:

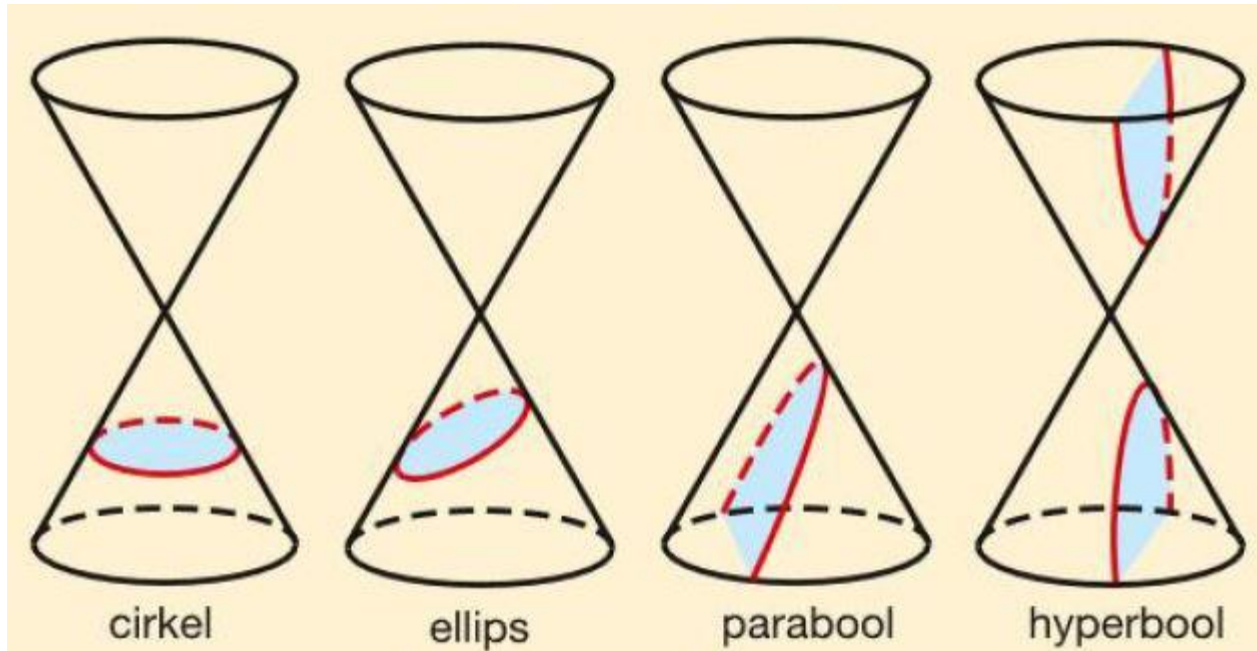
$$\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 3$$

$$1 + b = 3$$

$$b = 2$$

Dus: $k: y = \frac{1}{2}x + 2$

13.1 Kegelsneden en de vergelijking van de parabool [1]



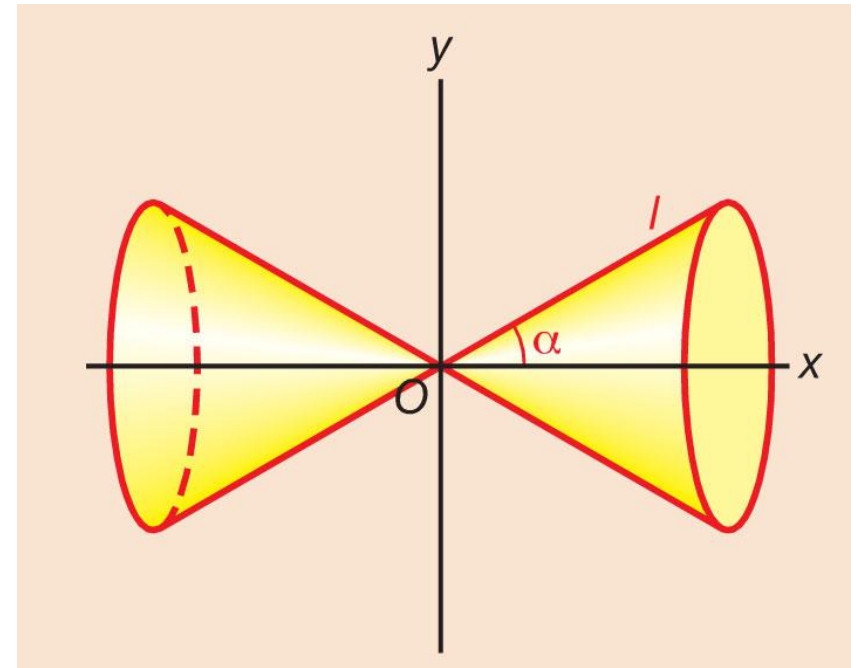
Hierboven zijn een viertal **kegelvlakken** getekend. De kegelsnede wordt steeds doorsneden door een vlak:

- Bij de eerste kegelsnede is de doorsnede (**kegelsnede**) een cirkel;
- Bij de tweede kegelsnede is de doorsnede (**kegelsnede**) een ellips;
- Bij de derde kegelsnede is de doorsnede (**kegelsnede**) een parabool;
- Bij de vierde kegelsnede is de doorsnede (**kegelsnede**) een hyperbool.

De vorm van de doorsnede hangt af van de hoek van het vlak.

13.1 Kegelsneden en de vergelijking van de parabool [1]

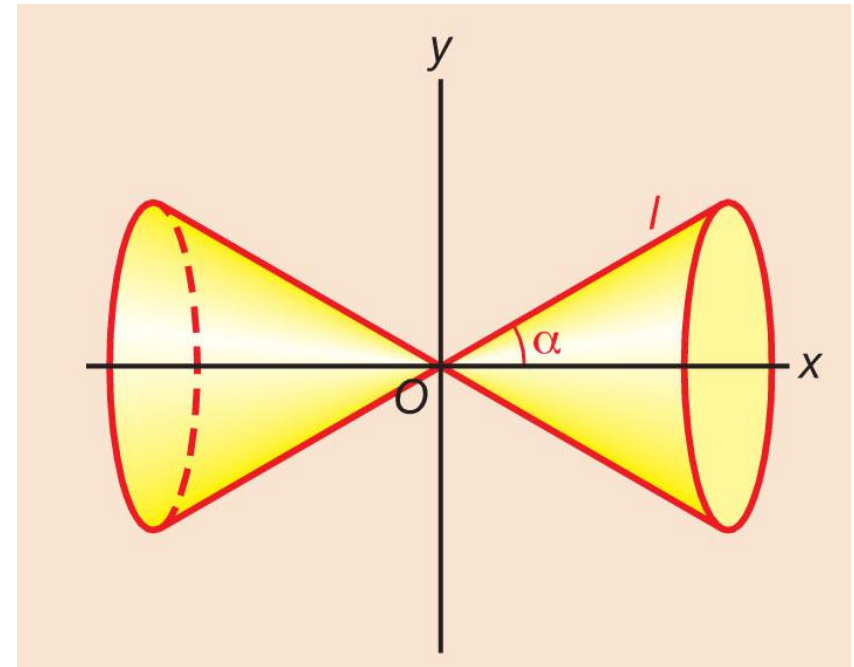
Een **kegelvlak** ontstaat door het wentelen van de lijn l om de x -as. Hierdoor ontstaan twee kegels zonder grondvlak met de gemeenschappelijke top O . De **tophoek** van de kegel is 2α . Doorsneden van een vlak V met een kegelvlak heten **kegelsneden**.



13.1 Kegelsneden en de vergelijking van de parabool [1]

Neem aan dat het vlak V een hoek φ maakt met de x -as:

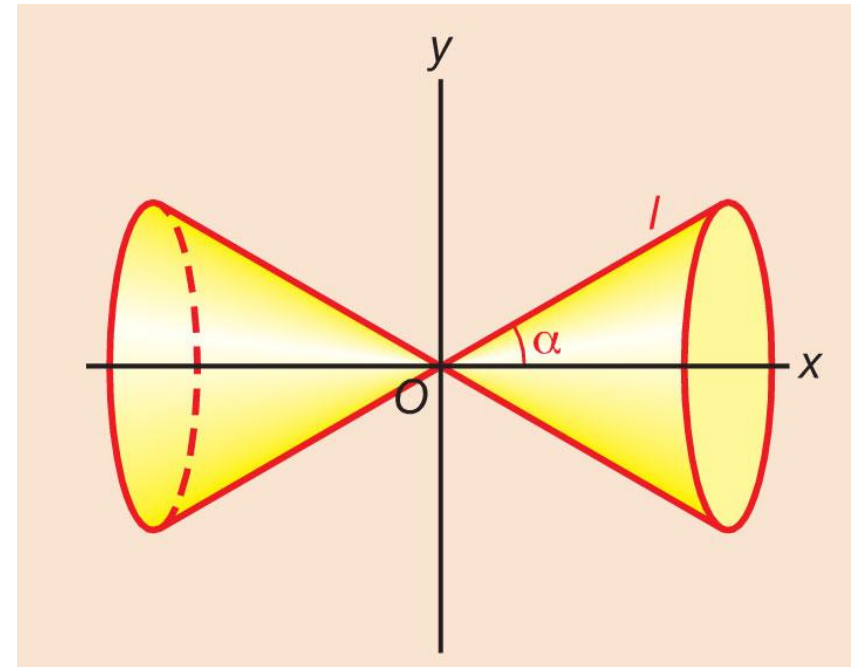
- $\varphi = 90^\circ$ en V gaat door O . Er ontstaat een puntcirkel als doorsnede;
- $\varphi = 90^\circ$ en V gaat niet door O . Er ontstaat een cirkel als doorsnede;
- $\varphi > \alpha$ en V gaat door O . Er ontstaat een puntcirkel als doorsnede;
- $\varphi = \alpha$ en V gaat door O . Er ontstaat een lijn als doorsnede;
- $0 < \varphi < \alpha$ en V gaat door O . Er ontstaat een doorsnede van twee snijdende lijnen.



13.1 Kegelsneden en de vergelijking van de parabool [1]

Neem aan dat het vlak V een hoek φ maakt met de x -as:

- $\varphi > \alpha$ en V gaat niet door O .
De doorsnede is een ellips;
- $0 < \varphi < \alpha$ en V gaat niet door O .
De doorsnede is een hyperbool;
- $\varphi = \alpha$ en V gaat niet door O .
De doorsnede is een parabool.



13.1 Kegelsneden en de vergelijking van de parabool [2]

Algemeen:

De parabool is getekend in een assenstelsel.

De top van de parabool is $O(0, 0)$.

Het brandpunt is $F(\frac{1}{2}p, 0)$.

De symmetrieas is $y = 0$.

De richtlijn heeft de vergelijking $x = -\frac{1}{2}p$.

Voor een punt $P(x, y)$ op de parabool geldt:

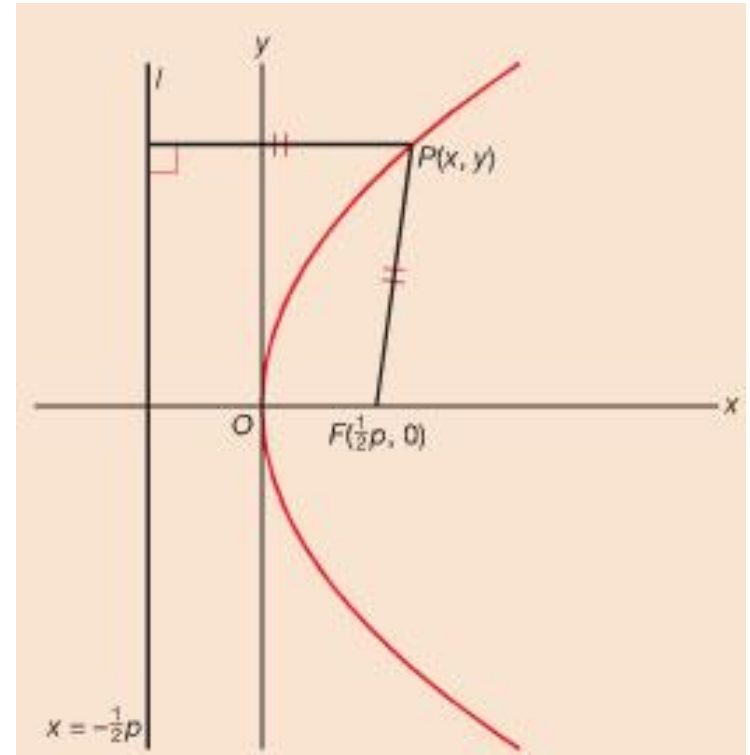
$$d(P, F) = d(P, l).$$

$$\sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2} = x + \frac{1}{2}p$$

$$(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2$$

$$x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 + y^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$$

$$y^2 = 2px$$



Er geldt:

De vergelijking van de parabool met brandpunt $F(\frac{1}{2}p, 0)$ en richtlijn $l: x = -\frac{1}{2}p$ is $y^2 = 2px$.

13.1 Kegelsneden en de vergelijking van de parabool [2]

Voorbeeld 1:

Van de parabool $y^2 = 6x$ is de top $(0, 0)$, de richtlijn $x = -1\frac{1}{2}$, brandpunt $(1\frac{1}{2}, 0)$ en de **symmetrieas** $y = 0$. De **parameter van de parabool** is 3.

Pas de translatie $(-3, -4)$ toe.

$$(y + 4)^2 = 6(x + 3)$$

$$(y + 4)^2 = 6x + 18$$

$$(y + 4)^2 - 16 = 6x + 2$$

$$y^2 + 8y = 6x + 2$$

Deze parabool heeft een top $(-3, -4)$, een richtlijn $x = -4\frac{1}{2}$, brandpunt $(-1\frac{1}{2}, -4)$ en de **symmetrieas (as van de parabool)** $y = -4$.

Dit is een **liggende parabool** met de **opening** naar rechts.

Algemeen:

Van de parabool $(y - b)^2 = 2p(x - a)$ is de top (a, b) , het brandpunt $F(\frac{1}{2}p + a, b)$ en de richtlijn $l: x = -\frac{1}{2}p + a$

13.1 Kegelsneden en de vergelijking van de parabool [2]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de parabool $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$.

Bereken de coördinaten van het brandpunt F van de parabool en stel een vergelijking op van de richtlijn l .

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$$

$$2y = x^2 + 4x - 10$$

$$2y = (x + 2)^2 - 4 - 10$$

$$(x + 2)^2 = 2y + 14$$

$$(x + 2)^2 = 2(y + 7)$$

T.o.v. de parabool $x^2 = 2y$ met brandpunt $(0, \frac{1}{2})$ en richtlijn $y = -\frac{1}{2}$ vindt er nu een translatie $(-2, -7)$ plaats.

Deze parabool heeft het **brandpunt $F(-2, -6\frac{1}{2})$** en **richtlijn $l: y = -7\frac{1}{2}$**

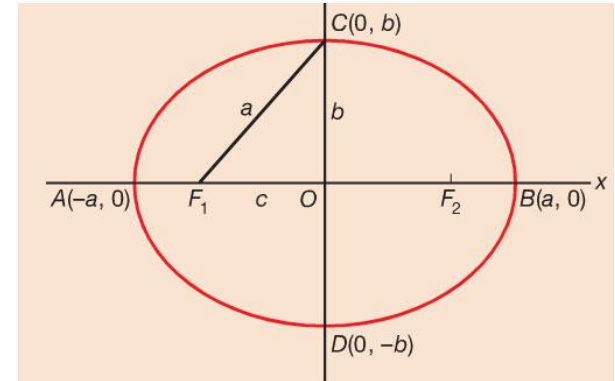
13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [1]

De vergelijking van een ellips met toppen

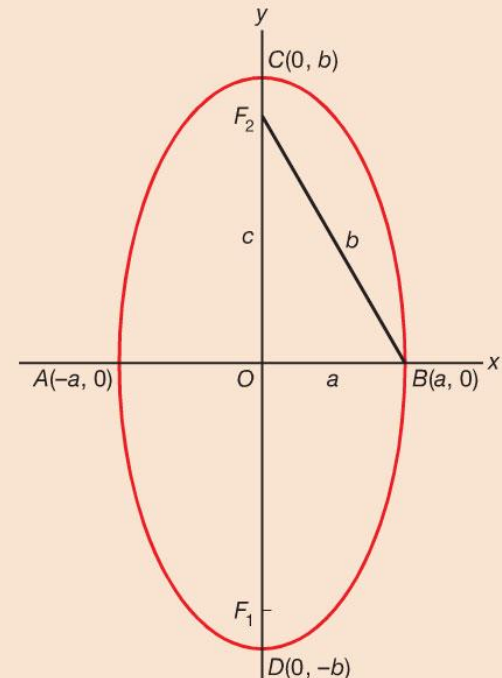
$A(-a, 0), B(a, 0), C(0, b)$ en $D(0, -b)$ is $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

In het geval $a > b$ zijn de coördinaten van de brandpunten $(-c, 0)$ en $(c, 0)$. Er geldt dan $c^2 = a^2 - b^2$. Nu ontstaat een **liggende ellips**.

In het geval $a < b$ zijn de coördinaten van de brandpunten $(0, -c)$ en $(0, c)$. Er geldt dan $c^2 = b^2 - a^2$. Nu ontstaat een **staande ellips**.



figuur 11.8



13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de ellips $x^2 + 10y^2 - 4x - 60y + 84 = 0$

Geef de coördinaten van de toppen, brandpunten en het middelpunt en de vergelijkingen van de symmetrieassen:

Stap 1:

Herschrijf de vergelijking van de ellips m.b.v. kwadraatsplitsen

$$x^2 + 10y^2 - 4x - 60y + 84 = 0$$

$$x^2 - 4x + 10(y^2 - 6y) + 84 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + 10((y - 3)^2 - 9) + 84 = 0 \text{ [Kwadraatsplitsen]}$$

$$(x - 2)^2 - 4 + 10(y - 3)^2 - 90 + 84 = 0$$

$$(x - 2)^2 + 10(y - 3)^2 = 10$$

De **translatie** $(2, 3)$ is toegepast t.o.v. de ellips $x^2 + 10y^2 = 10 \Leftrightarrow \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1} = 1$

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de ellips $x^2 + 10y^2 - 4x - 60y + 84 = 0$

Geef de coördinaten van de toppen, brandpunten en het middelpunt en de vergelijkingen van de symmetrieassen:

Stap 2:

Geef de bovenstaande zaken van de ellips: $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1} = 1$

De coördinaten van de toppen zijn $(-\sqrt{10}, 0)$, $(\sqrt{10}, 0)$, $(0, -1)$ en $(0, 1)$.

De coördinaten van de brandpunten volgen met:

$a^2 = 10$, $b^2 = 1$ en $c^2 = a^2 - b^2 = 10 - 1 = 9$ dus de brandpunten zijn $(-3, 0)$ en $(3, 0)$.

Het middelpunt is $(0, 0)$.

De symmetrieassen zijn de x-as ($y = 0$) en de y-as ($x = 0$).

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de ellips $x^2 + 10y^2 - 4x - 60y + 84 = 0$

Geef de coördinaten van de toppen, brandpunten en het middelpunt en de vergelijkingen van de symmetrieassen:

Stap 3:

Toepassen van de translatie geeft de bovenstaande zaken voor de ellips

$$x^2 + 10y^2 - 4x - 60y + 84 = 0$$

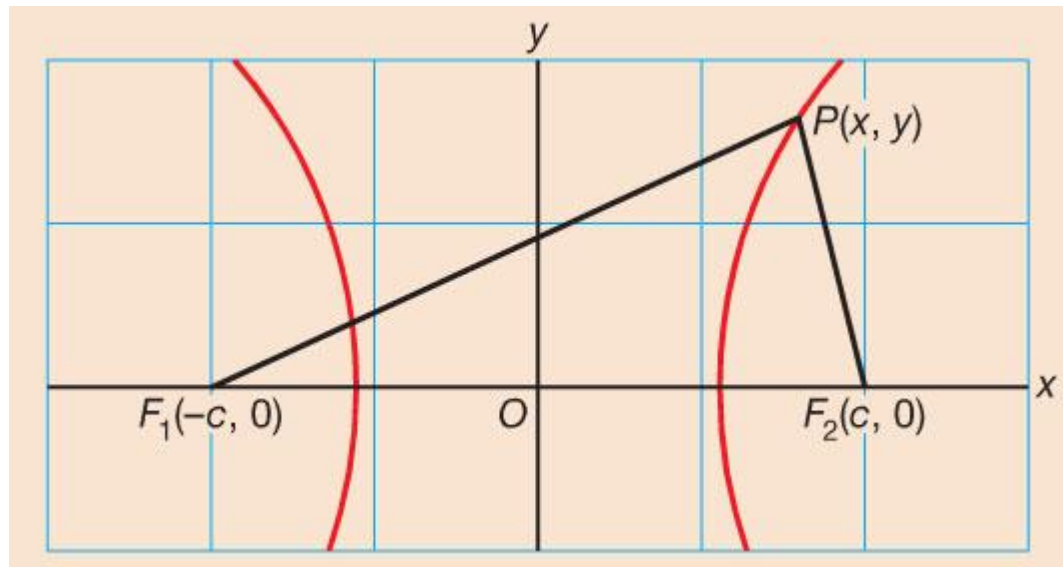
De coördinaten van de toppen zijn $(2 - \sqrt{10}, 3)$, $(2 + \sqrt{10}, 3)$, $(2, 2)$ en $(2, 4)$.

De coördinaten van de brandpunten zijn $(-1, 3)$ en $(5, 3)$.

Het middelpunt is $(2, 3)$.

De symmetrieassen zijn $y = 3$ en $x = 2$.

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [3]



Algemeen:

De vergelijking van de hyperbool met toppen $A(-a, 0)$ en $B(a, 0)$ en

brandpunten $F_1(-c, 0)$ en $F_2(c, 0)$ is $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Daarbij is $c^2 = a^2 + b^2$.

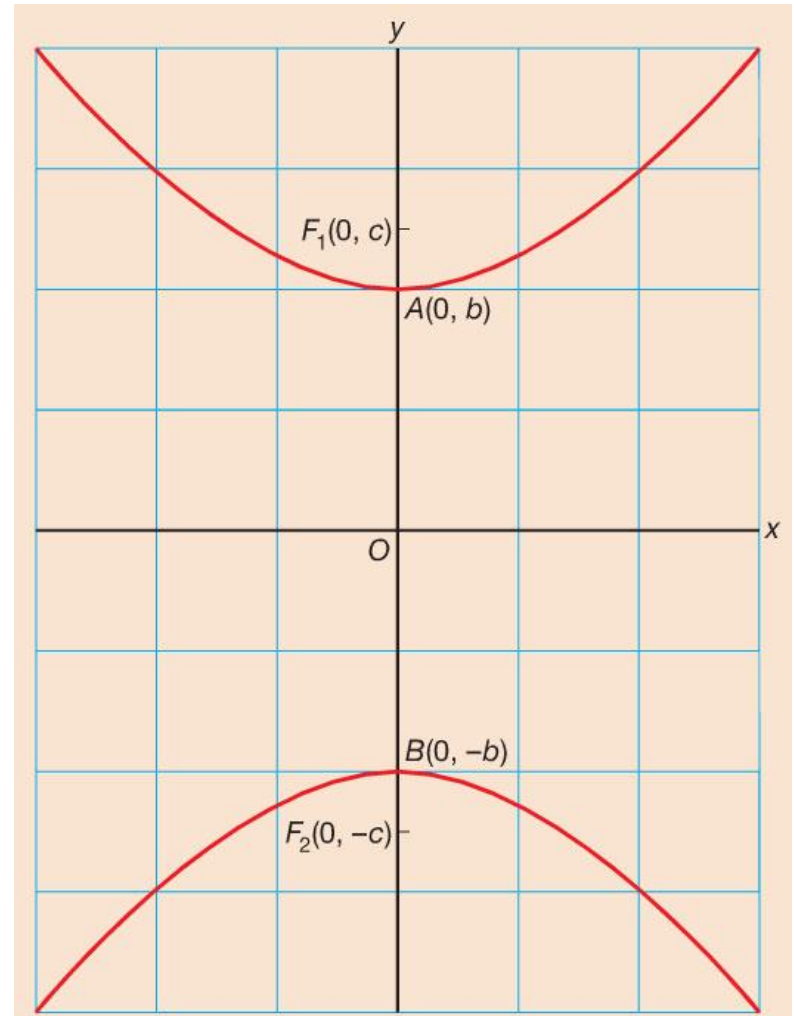
13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [3]

Algemeen:

De vergelijking van de hyperbool met toppen $A(0, b)$ en $B(0, -b)$ en brandpunten $F_1(0, c)$

en $F_2(0, -c)$ is $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

Daarbij is $c^2 = a^2 + b^2$.



13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [4]

Voorbeeld:

Gegeven is de hyperbool $5x^2 - 4y^2 - 40x - 8y + 56 = 0$

Geef de coördinaten van de toppen, brandpunten en het middelpunt en de vergelijkingen van de symmetrieassen:

Stap 1:

Herschrijf de vergelijking van de ellips m.b.v. kwadraatsplitsen

$$5x^2 - 4y^2 - 40x - 8y + 56 = 0$$

$$5(x^2 - 8x) - 4(y^2 + 2y) + 56 = 0$$

$$5(x - 4)^2 - 16 - 4(y + 1)^2 - 4 + 56 = 0 \quad [\text{Kwadraatsplitsen}]$$

$$5(x - 4)^2 - 80 - 4(y + 1)^2 + 4 + 56 = 0$$

$$5(x - 4)^2 - 4(y + 1)^2 = 20$$

$$\text{De translatie } (4, -1) \text{ is toegepast t.o.v. de hyperbool } 5x^2 - 4y^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [4]

Voorbeeld:

Gegeven is de hyperbool $5x^2 - 4y^2 - 40x - 8y + 56 = 0$

Geef de coördinaten van de toppen, brandpunten en het middelpunt en de vergelijkingen van de symmetrieassen:

Stap 2:

Geef de bovenstaande zaken van de hyperbool: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

Er geldt nu: $a^2 = 4$, $b^2 = 5$ en $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9$

De coördinaten van de toppen zijn $(-2, 0)$, $(2, 0)$

De coördinaten van de brandpunten volgen zijn $(-3, 0)$ en $(3, 0)$.

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [4]

Voorbeeld:

Gegeven is de hyperbool $5x^2 - 4y^2 - 40x - 8y + 56 = 0$

Geef de coördinaten van de toppen, brandpunten en het middelpunt en de vergelijkingen van de symmetrieassen:

Stap 3:

Toepassen van de translatie geeft de bovenstaande zaken voor de hyperbool $5x^2 - 4y^2 - 40x - 8y + 56 = 0$

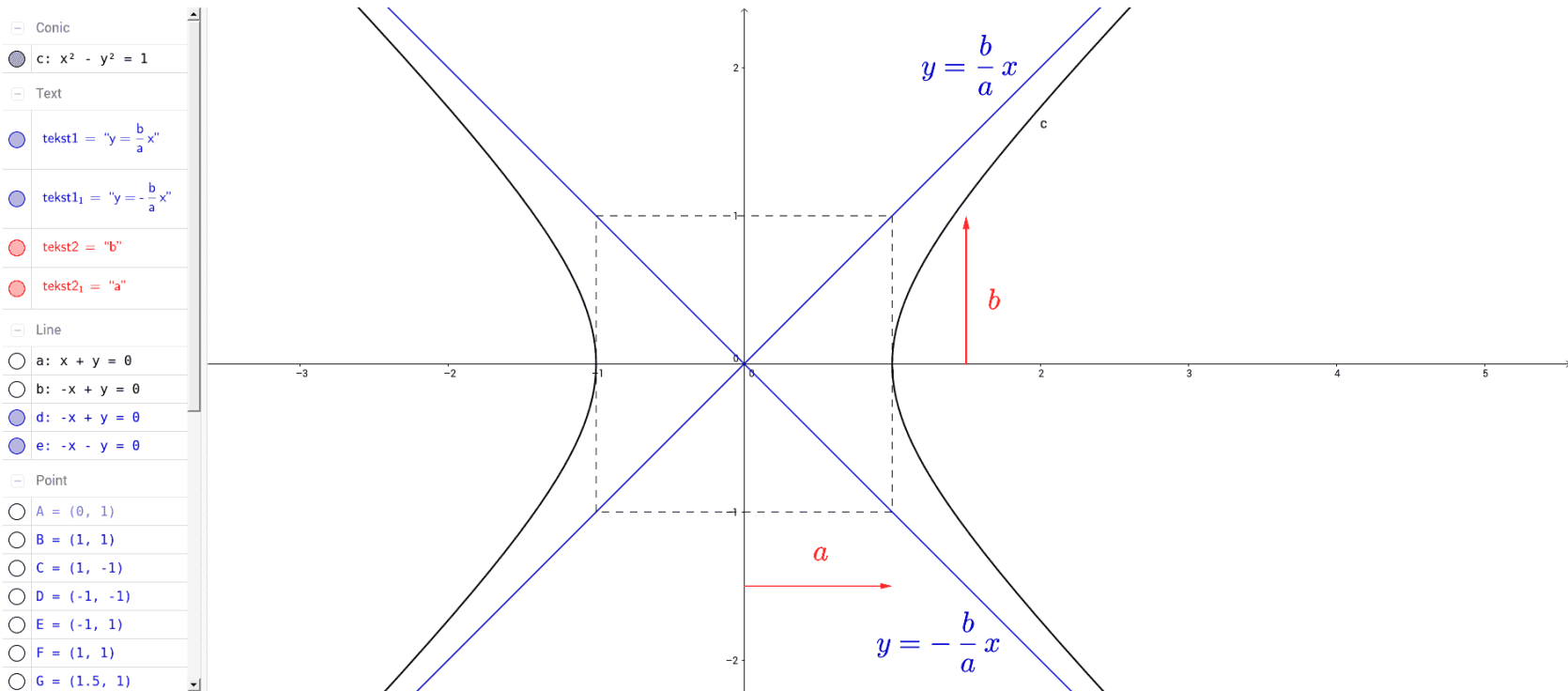
De coördinaten van de toppen zijn $(2, -1)$, $(6, -1)$

De coördinaten van de brandpunten zijn $(1, -1)$ en $(7, -1)$.

Het middelpunt is $(4, -1)$.

De symmetrieassen zijn $y = -1$ en $x = 4$.

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [5]



In het plaatje hierboven is een hyperbool getekend (zwart) Deze parabool heeft twee (blauwe) **scheve asymptoten**.

Dit zijn de lijnen $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [5]

De vergelijkingen van de scheve asymptoten kunnen als volgt gevonden worden:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2$$

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2} \vee y = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2}$$

Als x naar oneindig gaat valt de term $-b^2$ als het ware weg. Hieruit volgt:

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2} \vee y = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2}$$

$$y = \frac{b}{a} x \vee y = -\frac{b}{a} x$$

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [6]

Algemeen:

De algemene vergelijking van de tweede graad in x en y is:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Enkel situaties met $b = 0$ komen aan bod.

Afhankelijk van de waarden van a, b, c, d, e en f kunnen kegelsneden zoals de hyperbool, ellips en parabool ontstaan.

Voorbeeld 1:

Onderzoek de kegelsnede $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 8y - 5 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y - 4)^2 - 16 - 5 = 0$$

[kwadraatafsplitsen]

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

Dit is een cirkel met middelpunt $(2, 4)$ en straal 5.

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [6]

Voorbeeld 2:

Onderzoek de kegelsnede $y^2 + 4x - 6y + 17 = 0$

$$y^2 + 4x - 6y + 17 = 0$$

$$y^2 - 6y = -4x - 17$$

$$(y - 3)^2 - 9 = -4x - 17$$

$$(y - 3)^2 = -4x - 8$$

$$(y - 3)^2 = -4(x + 2)$$

Dit is een parabool met top $(-2, 3)$ want t.o.v. de parabool $y^2 = -4x$ met top $(0, 0)$ heeft een translatie $(-2, 3)$ plaatsgevonden.

Van $y^2 = -4x$ is het brandpunt $(-1, 0)$ want $p = -2$ en $\frac{1}{2}p = -1$.

Van de gegeven kegelsnede is het brandpunt $F(-1 - 2, 0 + 3) = F(-3, 3)$.

Er geldt:

De vergelijking van de parabool met brandpunt $F(\frac{1}{2}p, 0)$ en richtlijn $l: x = -\frac{1}{2}p$ is $y^2 = 2px$.

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [6]

Voorbeeld 2:

Onderzoek de kegelsnede $25x^2 - 16y^2 - 100x + 96y - 444 = 0$

$$25x^2 - 16y^2 - 100x + 96y - 444 = 0$$

$$25x^2 - 100x - 16y^2 + 96y - 444 = 0$$

$$25(x^2 - 4x) - 16(y^2 - 6y) - 444 = 0$$

$$25((x - 2)^2 - 4) - 16((y - 3)^2 - 9) - 444 = 0$$

$$25(x - 2)^2 - 100 - 16(y - 3)^2 + 144 - 444 = 0$$

$$25(x - 2)^2 - 16(y - 3)^2 = 400$$

$$\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{(y - 3)^2}{25} = 1$$

Er is sprake van een hyperbool met middelpunt (2, 3).

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [6]

Voorbeeld 2:

Onderzoek de kegelsnede $25x^2 - 16y^2 - 100x + 96y - 444 = 0$

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{25} = 1 \quad \text{Met } a^2 = 16 \text{ en } b^2 = 25.$$

Middelpunt:

Er is sprake van een hyperbool met middelpunt $(2, 3)$.

Toppen:

De hyperbool $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ heeft toppen $A(-4, 0)$ en $B(4, 0)$

De toppen van de gegeven kegelsnede zijn
 $A(-4 + 2, 3) = A(-2, 3)$ en $B(4 + 2, 3) = B(6, 3)$

Algemeen:

De vergelijking van de hyperbool met toppen $A(-a, 0)$ en $B(a, 0)$ en brandpunten $F_1(-c, 0)$ en

$$F_2(c, 0) \text{ is } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Daarbij is $b^2 = c^2 - a^2$.

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [6]

Voorbeeld 2:

Onderzoek de kegelsnede $25x^2 - 16y^2 - 100x + 96y - 444 = 0$

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{25} = 1 \quad \text{Met } a^2 = 16 \text{ en } b^2 = 25.$$

Brandpunt:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 25 = 41$$

De hyperbool $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ heeft als brandpunten

$$F_1(-\sqrt{41}, 0) \text{ en } F_2(\sqrt{41}, 0).$$

De brandpunten van de gegeven kegelsnede zijn $F_1(2 - \sqrt{41}, 3)$ en $F_2(2 + \sqrt{41}, 3)$.

Algemeen:

De vergelijking van de hyperbool met toppen $A(-a, 0)$ en $B(a, 0)$ en brandpunten $F_1(-c, 0)$ en

$$F_2(c, 0) \text{ is } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Daarbij is $b^2 = c^2 - a^2$.

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool [6]

Voorbeeld 2:

Onderzoek de kegelsnede $25x^2 - 16y^2 - 100x + 96y - 444 = 0$

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1 \quad \text{Met } a^2 = 16 \text{ en } b^2 = 25.$$

Asymptoten:

De hyperbool $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ heeft als asymptoten $y = \frac{5}{4}x$ en $y = -\frac{5}{4}x$

De gegeven kegelsnede heeft als asymptoten

$$y - 3 = \frac{5}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$y - 3 = -\frac{5}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + 5\frac{1}{2}$$

13.3 Raaklijnen en poollijnen [1]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 = 10$

De bovenste helft van de cirkel wordt gegeven door $y(x) = \sqrt{10 - x^2}$

Differentiëren geeft: $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{10 - x^2}} \cdot -2x = \frac{-x}{\sqrt{10 - x^2}} = -\frac{x}{y}$

$$y'(x) = -\frac{x}{y}$$

Dit valt te herschrijven tot: $y \cdot y'(x) = -x$

$$x + y \cdot y'(x) = 0$$

$$2x + 2y \cdot y'(x) = 0$$

Dit resultaat kun je ook krijgen door de oorspronkelijk vergelijking van de cirkel te differentiëren naar x , waarbij je aanneemt dat y een functie van x is, waarvoor je dan de kettingregel nodig hebt. Op deze manier krijg je bij de vergelijking van een kegelsnede de afgeleide.

13.3 Raaklijnen en poollijnen [1]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de parabool $(y - 2)^2 = -8(x + 3)$

Stel de vergelijking op van de lijn n die de parabool loodrecht snijdt in het punt $B(-5, -2)$

Stap 1:

Differentieer de gegeven functie van de parabool:

$$(y - 2)^2 = -8(x + 3) \text{ geeft}$$

$$2(y - 2) \cdot y'(x) = -8$$

$$y'(x) = \frac{-4}{y - 2}$$

Stap 2:

Bereken de afgeleide in het raakpunt B van de raaklijn l van de parabool..

$$rc_l = \frac{-4}{-2 - 2} = 1$$

13.3 Raaklijnen en poollijnen [1]

Voorbeeld 2:

Gegeven is de parabool $(y - 2)^2 = -8(x + 3)$

Stel de vergelijking op van de lijn n die de parabool loodrecht snijdt in het punt $B(-5, -2)$

Stap 3:

Bereken de afgeleide van de lijn n .

De lijnen l en n staan loodrecht op elkaar. Hierdoor geldt dus: $rc_l \cdot rc_n = 1$

Hieruit volgt dus: $rc_n = -1$

Stap 4:

Stel de vergelijking op van de lijn n .

Invullen van $B(-5, -2)$ in $n: y = -x + b$ geeft $b = -7$.

$$n: y = -x - 7$$

13.3 Raaklijnen en poollijnen [2]

Voorbeeld:

Het punt $A(3, 4)$ ligt op de cirkel $x^2 + y^2 = 25$

De lijn k raakt de cirkel in A .

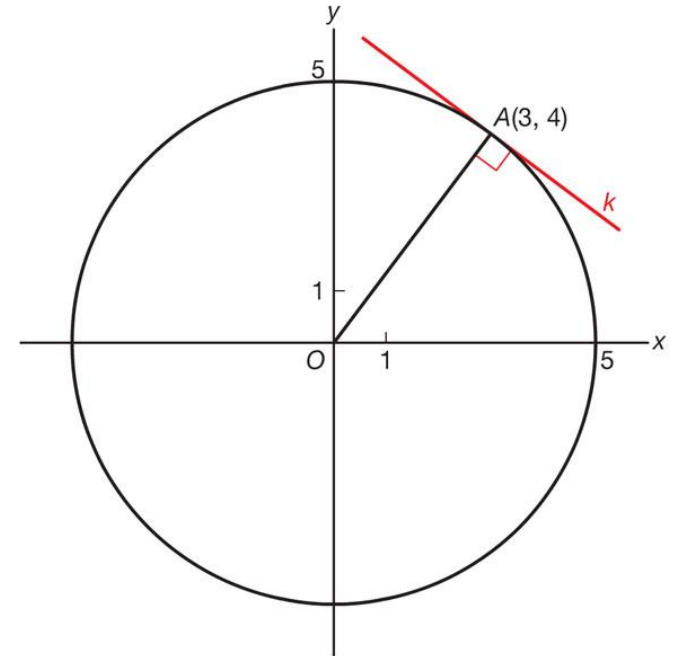
Er geldt : $k \perp OA$. $\Rightarrow \underline{n}_k = \underline{r}_{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Dus $k : 3x + 4y = c$

$(3, 4)$ ligt op k . Hieruit volgt: $3x + 4y = 25$.

Algemeen:

De lijn k die de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ raakt in $A(x_A, y_A)$ heeft vergelijking $l: x_A x + y_A y = r^2$.



13.3 Raaklijnen en poollijnen [2]

Algemeen:

De lijn k raakt de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ in $A(x_A, y_A)$
en er geldt dus $k: x_A x + y_A y = r^2$.

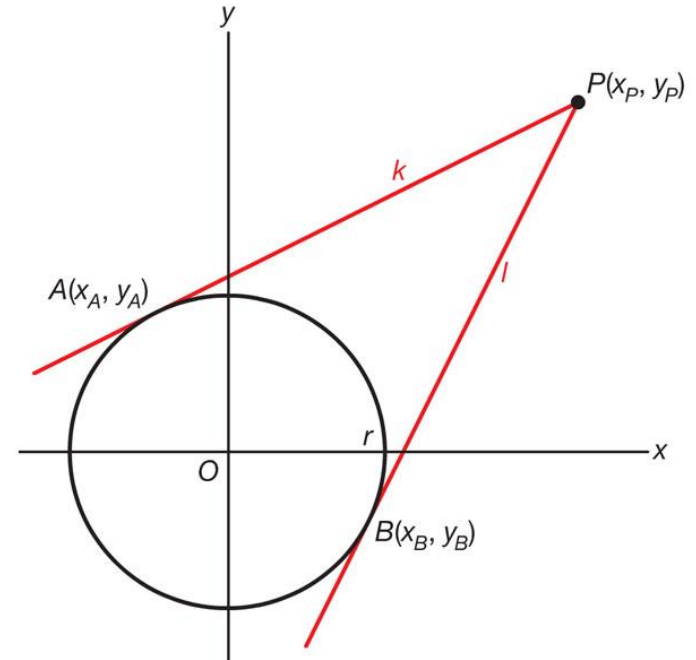
De lijn k gaat ook door $P(x_P, y_P)$
en er geldt dus $k: x_A x_P + y_A y_P = r^2$.

Hieruit volgt dat A op de lijn ligt met
vergelijking $x_P x + y_P y = r^2$

De lijn l raakt de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ in $B(x_B, y_B)$
en er geldt dus $l: x_B x + y_B y = r^2$.

De lijn l gaat ook door $P(x_P, y_P)$
en er geldt dus $k: x_B x_P + y_B y_P = r^2$.

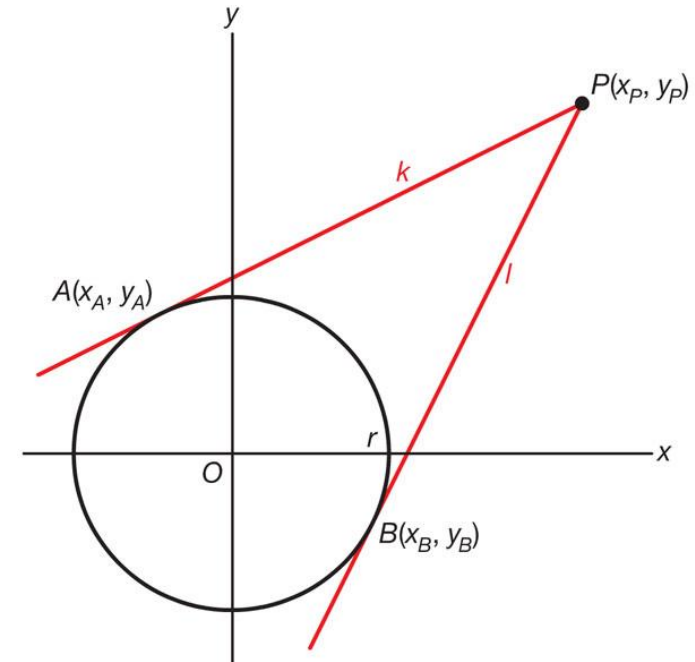
Hieruit volgt dat B op de lijn ligt met
vergelijking $x_P x + y_P y = r^2$.



13.3 Raaklijnen en poollijnen [2]

Algemeen:

De lijn AB (**poollijn** van **pool** P ten opzichte van de cirkel) heeft de vergelijking: $x_P x + y_P y = r^2$.



Algemeen:

De lijn k die de kegelsnede $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$

Raakt in het punt $A(x_A, y_A)$ heeft de vergelijking

$$k: ax_A x + by_A y + \frac{1}{2}cx_A + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_A + \frac{1}{2}dy + e = 0.$$

De vergelijking van de poollijn p van het punt $P(x_P, y_P)$ ten opzichte van de kegelsnede $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ is

$$k: ax_P x + by_P y + \frac{1}{2}cx_P + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_P + \frac{1}{2}dy + e = 0.$$

13.3 Raaklijnen en poollijnen [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de ellips $x^2 + 6y^2 = 40$

Stel de vergelijkingen op van de lijnen door het punt $P(7, 1)$ die de ellips raken.

Stap 1:

Stel de **poollijn van P** ten opzichte van de ellips op.

Dit is **$7x + 6y = 40$**

Stap 2:

Los het nu ontstane stelsel van vergelijkingen op

Herschrijven van de vergelijking van de poollijn geeft **$6y = 40 - 7x$** .

Dit kan ingevuld worden in de vergelijking van de ellips om de raaklijnen te vinden.

13.3 Raaklijnen en poollijnen [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de ellips $x^2 + 6y^2 = 40$

Stel de vergelijkingen op van de lijnen door het punt $P(7, 1)$ die de ellips raken.

Stap 2:

$$6x^2 + (-7x + 40)^2 = 240$$

$$6x^2 + 49x^2 - 560x + 1600 = 240$$

$$55x^2 - 560x + 1360 = 0$$

$$11x^2 - 112x + 272 = 0$$

$$D = 576, \text{ dus } \sqrt{D} = 24$$

$$x = \frac{112 - 24}{22} = 4 \vee x = \frac{112 + 24}{22} = \frac{68}{11}$$

Invullen van $x = 4$ geeft het raakpunt $(4, 2)$

Invullen van $x = \frac{68}{11}$ geeft het raakpunt $(\frac{68}{11}, -\frac{6}{11})$

13.3 Raaklijnen en poollijnen [2]

Voorbeeld:

Gegeven is de ellips $x^2 + 6y^2 = 40$

Stel de vergelijkingen op van de lijnen door het punt $P(7, 1)$ die de ellips raken.

Stap 3:

Stel de vergelijkingen van de gevraagde raaklijnen op:

De raaklijn in $(4, 2)$ is:

$$4x + 6 \cdot 2y = 40 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3y = 10$$

De raaklijn in $(\frac{68}{11}, -\frac{6}{11})$ is:

$$\frac{68}{11}x + 6 \cdot -\frac{6}{11}y = 40 \Leftrightarrow 17x - 9y = 110$$

13.4 Variabele punten en omwentelingsoppervlakken [1]

Voorbeeld 1:

S is het snijpunt van de lijnen:

$l: y = -\frac{1}{2}\lambda x + \frac{1}{2}\lambda$ en $m: y = 4x/\lambda$.

Er kan nu een vergelijking opgesteld worden van de kromme waarop alle punten S liggen als P over de parabool beweegt.

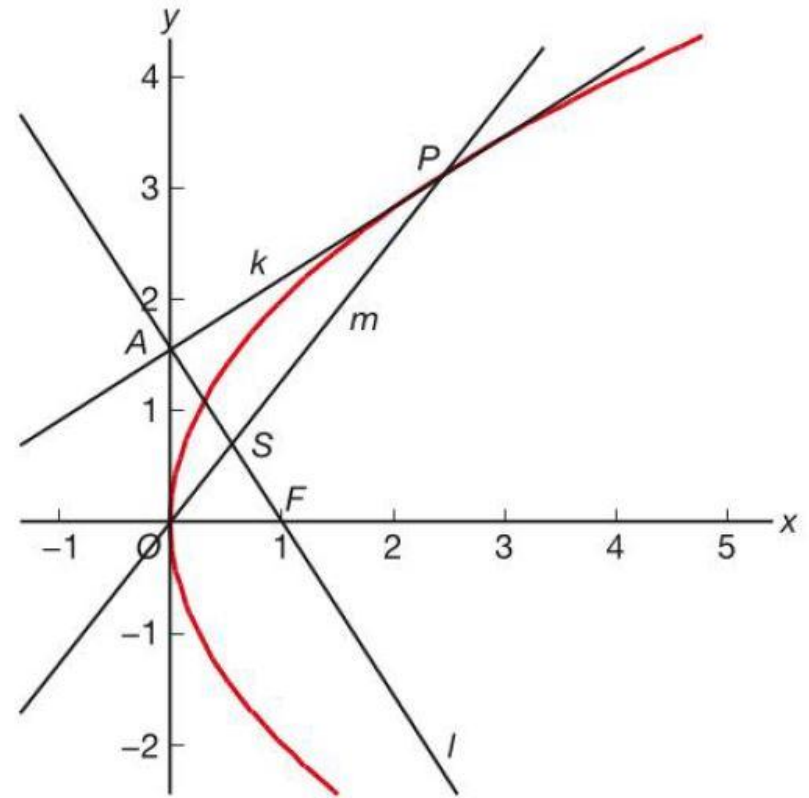
Uit de formule voor de lijn l volgt:

$$y = -\frac{1}{2}\lambda x + \frac{1}{2}\lambda$$

$$\lambda x - \lambda = -2y$$

$$\lambda = \frac{-2y}{x-1}$$

Uit de formule voor de lijn m volgt: $\lambda = \frac{4x}{y}$



13.4 Variabele punten en omwentelingsoppervlakken [1]

Voorbeeld 1:

S is het snijpunt van de lijnen:

$l: y = -\frac{1}{2}\lambda x + \frac{1}{2}\lambda$ en $m: y = 4x/\lambda$.

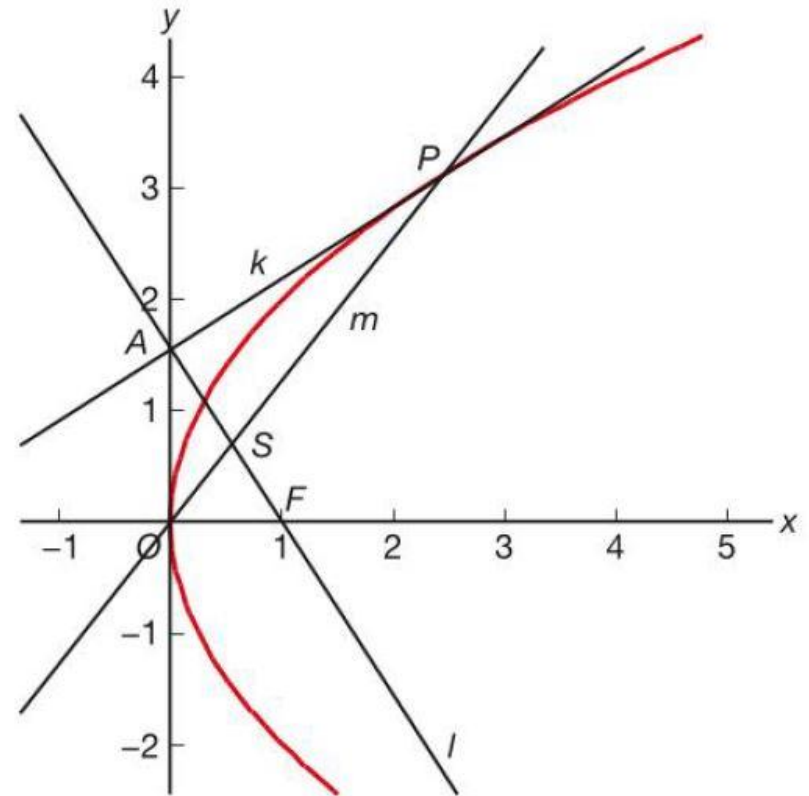
Het aan elkaar gelijkstellen van beide uitdrukkingen geeft:

$$\frac{-2y}{x-1} = \frac{4x}{y}$$

$$4x^2 - 4x = -2y^2$$

$$2x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Dit is de uitdrukking van een ellips.



13.4 Variabele punten en omwentelingsoppervlakken [1]

Voorbeeld 2:

Gegeven zijn de parabool $y^2 = 4x$ en de lijn $l: x = -4$. Het punt P ligt op l en de poollijn p van P snijdt de lijn OP in het punt S .

Stel algebraïsch een vergelijking op van de kromme K waarop alle punten S liggen als P over l beweegt.

$P(-4, \lambda)$ ligt op l .

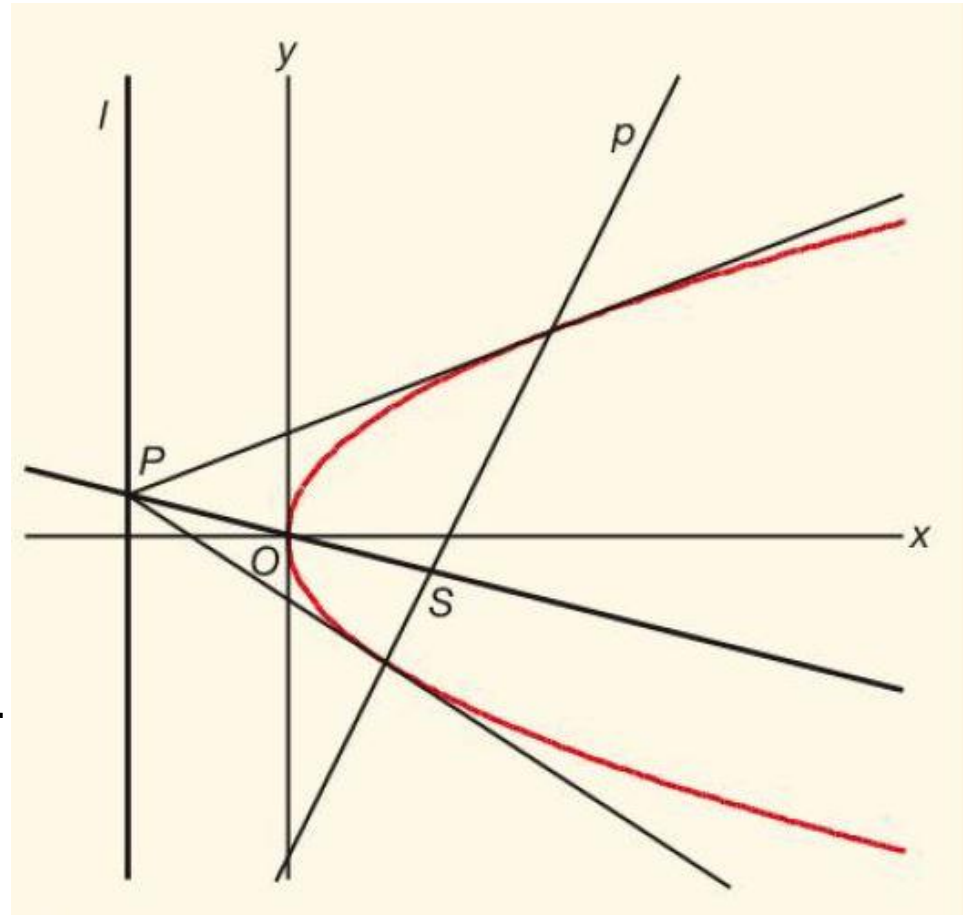
Hieruit volgt de volgende vergelijking voor de poollijn:

$$l: by_p y + \frac{1}{2}cx_p + \frac{1}{2}cx = 0$$

$$l: \lambda y - 2 \cdot -4 - 2x = 0$$

$$l: \lambda y = 2 \cdot -4 + 2x = 0$$

$$\text{en dus: } \lambda = \frac{2x-8}{y}$$



13.4 Variabele punten en omwentelingsoppervlakken [1]

Voorbeeld 2:

Gegeven zijn de parabool $y^2 = 4x$ en de lijn $l: x = -4$. Het punt P ligt op l en de poollijn p van P snijdt de lijn OP in het punt S .

De lijn OP kan beschreven worden met behulp van de volgende formule:

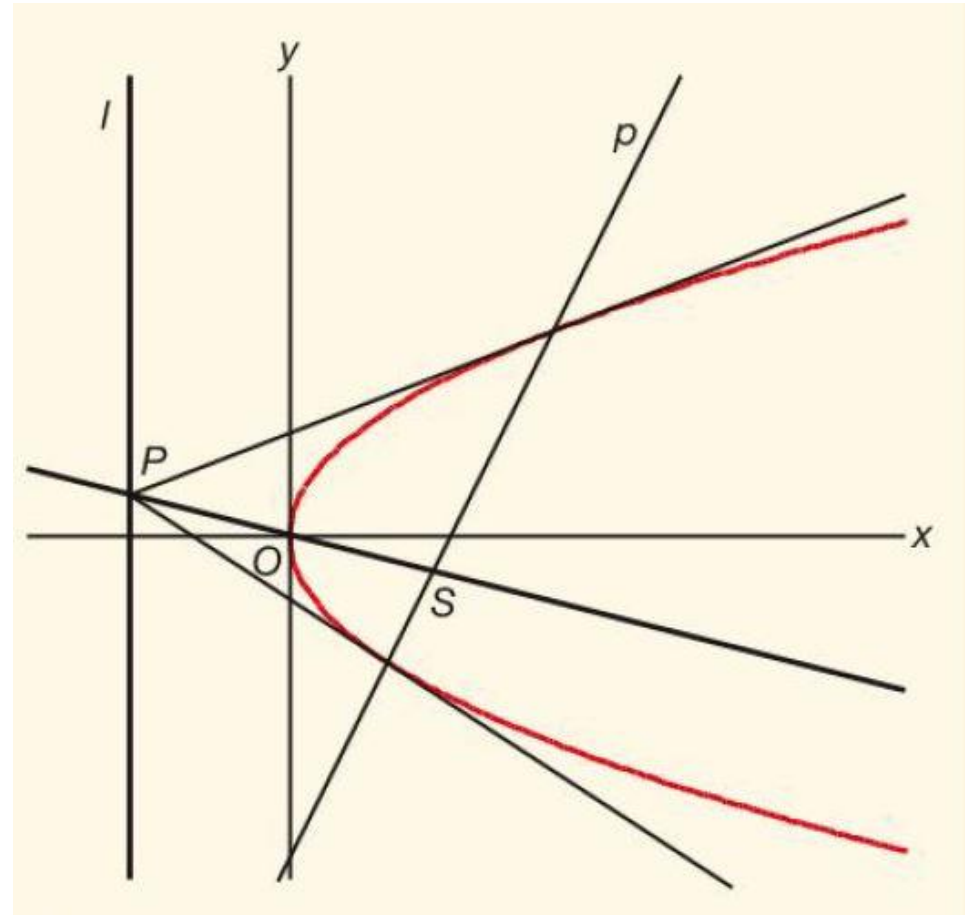
$$OP: y = \frac{\lambda}{-4} x \Leftrightarrow \lambda = \frac{-4y}{x}$$

Het gelijkstellen van beide formules aan elkaar geeft:

$$\frac{2x-8}{y} = \frac{-4y}{x}$$

$$2x^2 - 8x = -4y^2$$

Hieruit volgt: $K: x^2 + 2y^2 - 4x = 0$



13.4 Variabele punten en omwentelingsoppervlakken [2]

Voorbeeld 1:

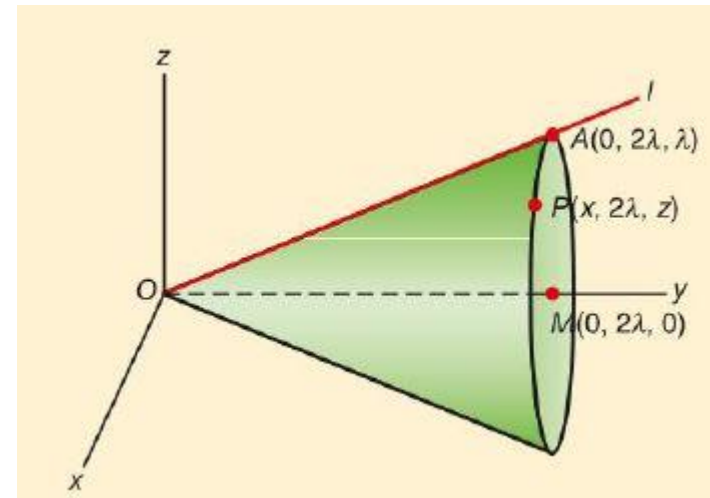
Het kegelvlak ontstaat als er een lijn gewenteld wordt om een as. Je krijgt dan een **omwentelingsoppervlak**.

De doorsnede van het vlak $y = 2\lambda$ en het kegelvlak is de cirkel met middelpunt $M(0, 2\lambda, 0)$ en straal λ .

Voor een punt $P(x, 2\lambda, z)$ op de cirkel geldt nu: $y = 2\lambda$ en $x^2 + z^2 = \lambda^2$

Invullen van $\lambda = \frac{1}{2}y$ geeft nu:

$$x^2 + z^2 = \frac{1}{4}y^2 \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$$



13.4 Variabele punten en omwentelingsoppervlakken [2]

Voorbeeld 2:

De parabool $x = 0 \wedge z = y^2$ wordt gewenteld om de z -as. Stel een vergelijking op van het omwentelingsoppervlak dat zo ontstaat.

$A(0, \lambda, \lambda^2)$ is een punt van de bovenstaande parabool.

Voor een punt $P(x, y, \lambda^2)$ van de cirkel met middelpunt $M(0, 0, \lambda^2)$ in het vlak $z = \lambda^2$ geldt

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 \wedge z = \lambda^2.$$

Hieruit volgt als vergelijking $z = x^2 + y^2$.

