16.0 Voorkennis

Voorbeeld 1:

Los op in $\mathbb{C}$

$2x + 3i = 5x + 6i$

$-3x = 3i$

$x = -i$

Voorbeeld 2:

Los op in $\mathbb{C}$

$4x^2 + 12x + 15 = 0$

$4x^2 + 12x + 9 + 6 = 0$

$(2x + 3)^2 + 6 = 0$

$(2x + 3)^2 = -6$

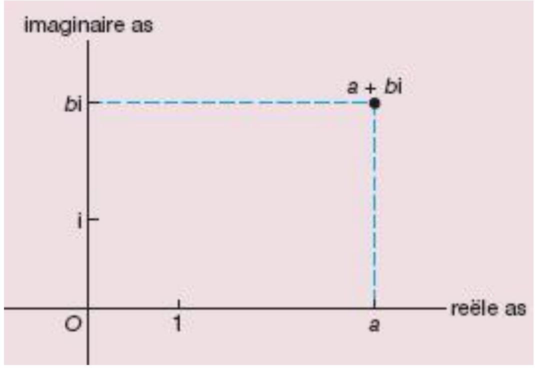
$(2x + 3)^2 = 6i^2$

$2x + 3 = i\sqrt{6}$ of $2x + 3 = -i\sqrt{6}$

$2x = -3 + i\sqrt{6}$ of $2x = -3 - i\sqrt{6}$

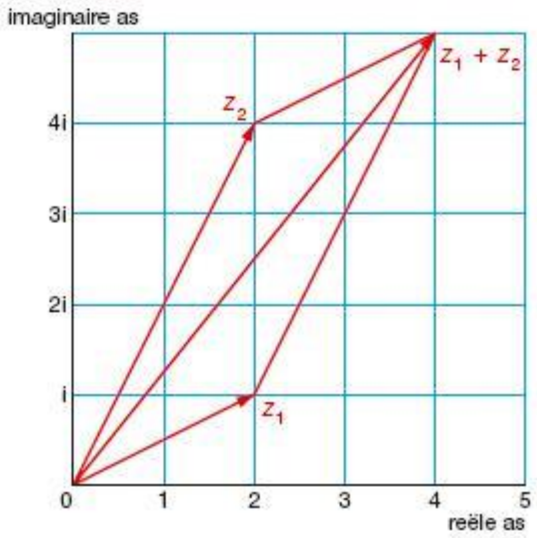
$x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{6}$ of $x = -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{6}$

16.0 Voorkennis



Hiernaast is het complexe getal $a + b$i getekend in een assenstelsel.
De horizontale as is de **reële as**.
De verticale as is de **imaginaire as**.

Dit **complexe vlak** wordt ook wel het **vlak van Gauss** of een **Argand-diagram** genoemd.

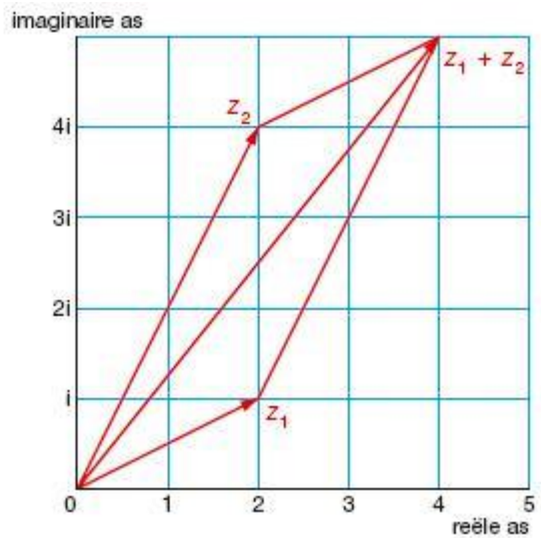


Hiernaast worden **vectoren** gebruikt om twee complexe getallen bij elkaar op te tellen.

$z_1 = 2 + \mathrm{i}$ $z_2 = 2 + 4\mathrm{i}$
$z_1 + z_2 = 2 + \mathrm{i} + 2 + 4\mathrm{i} = 4 + 5\mathrm{i}$ (= z)

Er ontstaat nu een **parallellogram-constructie**

16.0 Voorkennis



De lengte van de vector (ook **modulus** of **absolute waarde**) die bij het complexe getal z hoort, is te berekenen met de stelling van Pythagoras:

$|z| = |4 + 5i| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

$|z_1| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$|z_2| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

Let op 1: Er geldt nu: $|z| \neq |z_1 + z_2|$ (Dit is over het algemeen zo)

Let op 2: Er geldt nu: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ (Te bewijzen in opgave 20)

Let op 3: Er geldt nu: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (Te bewijzen in opgave 21)

16.0 Voorkennis

In het assenstelsel is het complexe getal z_1 = 1 + i getekend.

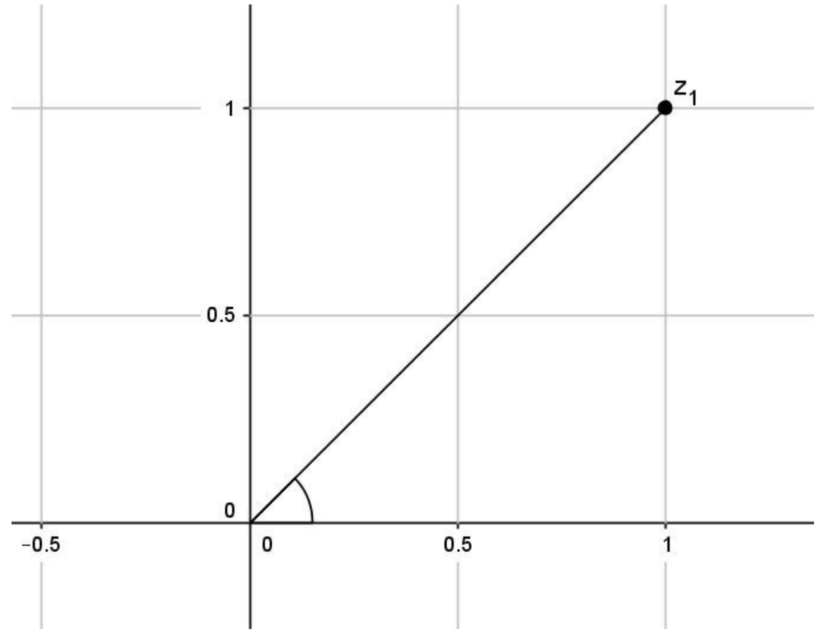
Hierbij hoort een **draaiingshoek** (φ) of **argument** (Arg(z_1)) van ¼π.

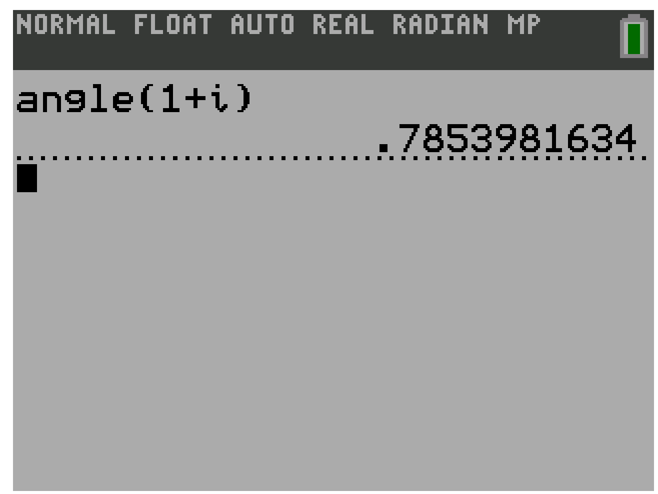
Het argument tussen -π en π is de **hoofdwaarde van het argument**.

Alle waarden voor het argument van het complexe getal z_1 zijn: ¼π + k· 2π waarbij k een geheel getal is.

Op de GR kun het argument berekenen via MATH | CMPLX | 4: ANGLE

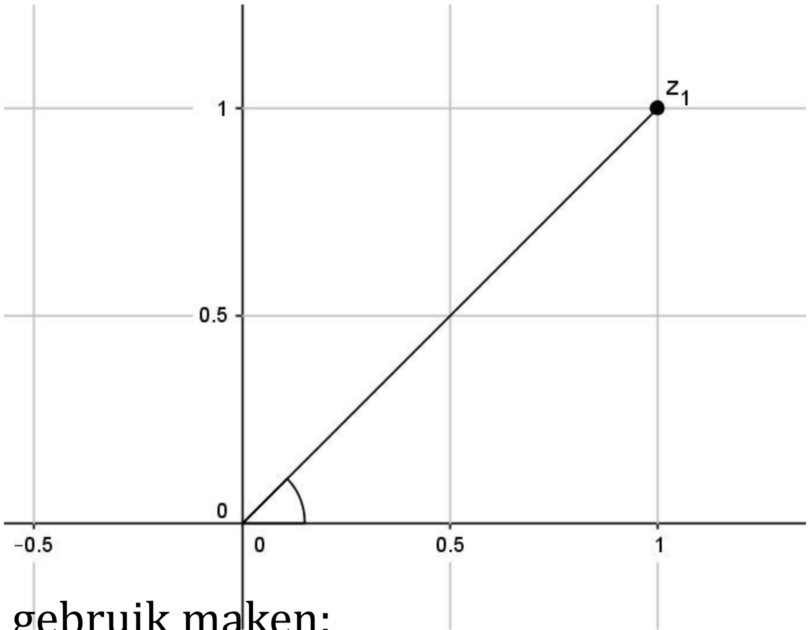
De letter i krijg je met 2ND | ·





16.0 Voorkennis

In het assenstelsel is het complexe getal $z_1 = 1 + i$ getekend.



In bepaalde gevallen kun je het argument ook exact berekenen.

Zo geldt voor het complexe getal wat hier naast getekend is:

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \tfrac{1}{4}\pi$$

Hiervoor kun je van de onderstaande tabel gebruik maken:

hoek	**0**	**⅙π**	**¼ π**	**⅓π**	**½ π**
sinus	0	½	½√2	½√3	1
cosinus	1	½√3	½√2	½	0
tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	√3	-

In dit geval is de modulus gelijk aan: $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

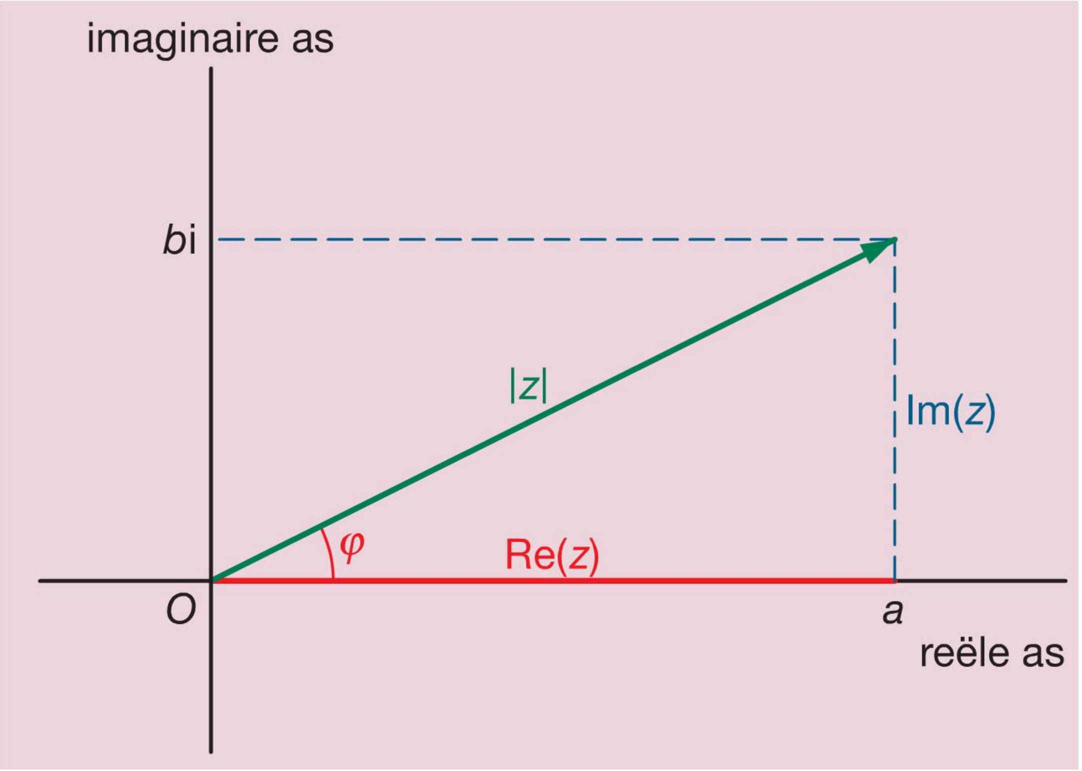
16.0 Voorkennis

In het plaatje hiernaast is een rechthoekige driehoek te zien.
Hieruit volgen:

$$\sin(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} <=> \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} <=> \mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\varphi)$$

$|z|$ is de afstand van het punt tot de Oorsprong.
We noemen deze afstand nu r.



Het reële en imaginaire deel van het complexe getal z zijn nu te schrijven als:
$\mathrm{Re}(z) = r\cos(\varphi)$ en $\mathrm{Im}(z) = r\sin(\varphi)$.

r (= $|z|$) en φ (= $\arg(z)$) zijn de **poolcoördinaten** van het complexe getal z.

16.0 Voorkennis

<u>Notatie 1 Complex getal:</u>
Een getal van de vorm $z = a + b\text{i}$ met a en b reële getallen en met $\text{i}^2 = -1$ heet een complex getal.

De twee uitkomsten zijn voorbeelden van **complexe getallen**.

a is het **reële deel** van het complexe getal (Re(z)).
b is het **imaginaire deel** van het complexe getal (Im(z))

Een complex getal van de vorm $b\text{i}$ is een zuiver imaginair getal.

Je gebruikt bij het rekenen met complexe getallen dezelfde rekenregels als je tot nu toe gebruikt hebt bij het rekenen met reële getallen.

16.0 Voorkennis

Notatie 2 Complex getal:
Het complexe getal $z = a + b\text{i}$ kan genoteerd worden m.b.v. poolcoördinaten:

$z = r\cos(\varphi) + \text{i}\, r\sin(\varphi) = r(\cos(\varphi) + \text{i}\sin(\varphi))$ met $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$

Voorbeeld 3:
Schrijf $z = 3 - 4\text{i}$ met poolcoördinaten. Rond het argument zo nodig af op 1 decimaal.

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$\varphi = \arg(z) = \arg(3 - 4\text{i}) \approx -0{,}93$ (Gebruik de GR!!!)

Hieruit volgt: $z = 5(\cos(-0{,}93) + \text{i}\sin(-0{,}93))$

16.0 Voorkennis

<u>Notatie 3 Complex getal:</u>

Het complexe getal z met $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$ kan ook genoteerd worden als:

$z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$

De formule van Euler is: $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$

<u>Voorbeeld 4:</u>

Schrijf het getal $z = 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$ in de vorm $z = a + b\mathrm{i}$. Rond a en b af op twee decimalen.

$z = 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}} = 3(\cos(2) + \mathrm{i}\sin(2)) = 3\cos(2) = 3\mathrm{i}\sin(2) \approx -1{,}25 + 2{,}73\mathrm{i}$

16.0 Voorkennis

Voorbeeld 5:

Los exact op in $\mathbb{C}$: $(z - 2i)^2 = -i$

$$(z-2i)^2 = e^{-\frac{1}{2}\pi i + k\cdot 2\pi i}$$

$$z-2i = e^{-\frac{1}{4}\pi i + k\cdot \pi i}$$

$$z-2i = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \vee z-2i = e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

$z - 2i = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$ v $z - 2i = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$

$z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2i - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$ $\quad$ $z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2i + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$

$z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + (2 - \frac{1}{2}\sqrt{2})i$ $\quad$ $z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + (2 + \frac{1}{2}\sqrt{2})i$

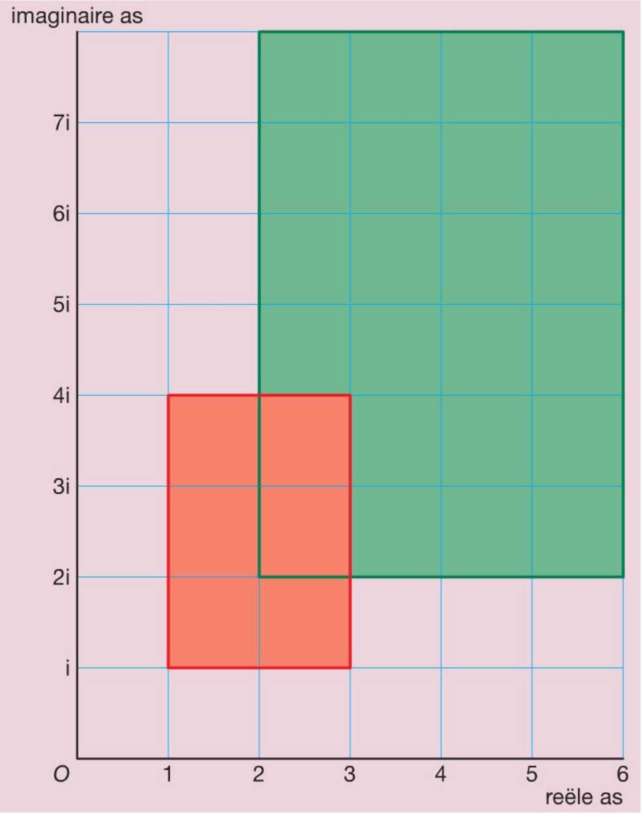
16.1 Lineaire complexe functies [1]

Voorbeeld 1:
Gegeven zijn de functies $f(z) = 3 + 2\mathrm{i}$ en $g(z) = 5 + 5\mathrm{i}$ (= $3 + 2\mathrm{i} + 2 + 3\mathrm{i}$)
De functie $g(z)$ ontstaat uit de functie van $f(z)$ door het toepassen van de translatie (2, 3)

Algemeen:
Bij de functie $f(z) = z + a + b\mathrm{i}$ hoort de translatie (a, b).

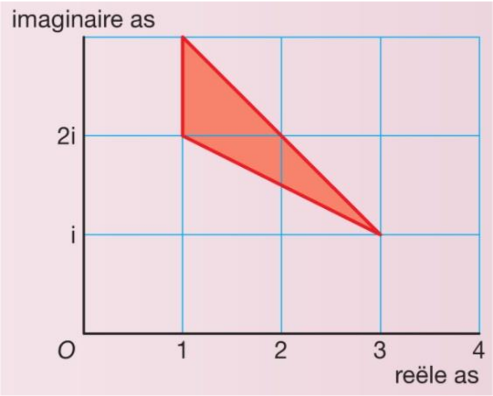
Voorbeeld 2:
Gegeven is het rode vierkant. Pas hierop de functie $f(z) = 2z$ toe.

Linksonder: $z = 1 + \mathrm{i} \Rightarrow f(1 + \mathrm{i}) = 2 \cdot (1 + \mathrm{i}) = 2 + 2\mathrm{i}$
Rechtsonder: $z = 3 + \mathrm{i} \Rightarrow f(3 + \mathrm{i}) = 2 \cdot (3 + \mathrm{i}) = 6 + 2\mathrm{i}$
Linksboven: $z = 1 + 4\mathrm{i} \Rightarrow f(1 + 4\mathrm{i}) = 2 \cdot (1 + 4\mathrm{i}) = 2 + 8\mathrm{i}$
Rechtsboven: $z = 3+ 4\mathrm{i} \Rightarrow f(3 + 4\mathrm{i}) = 2 \cdot (3 + 4\mathrm{i}) = 6 + 8\mathrm{i}$



Algemeen:
Bij de functie $f(z) = az$ met a een reëel getal hoort de Vermenigvuldiging t.o.v. 0 met factor a.

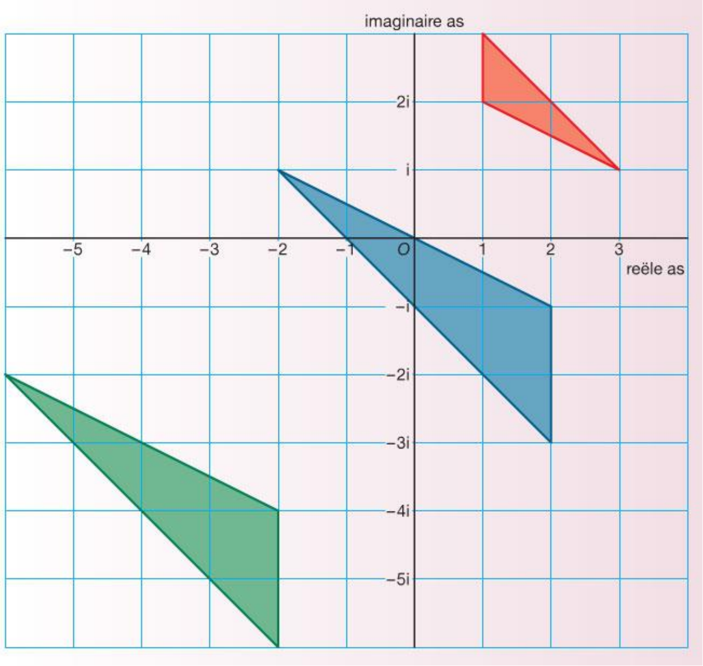
16.1 Lineaire complexe functies [1]



<u>Voorbeeld 3:</u>
Gegeven is de driehoek met de hoekpunten
1 + 2i, 3 + i en 1 + 3i.
Teken het beeld bij de functie $f(z) = -2z + 4 + 3i$.

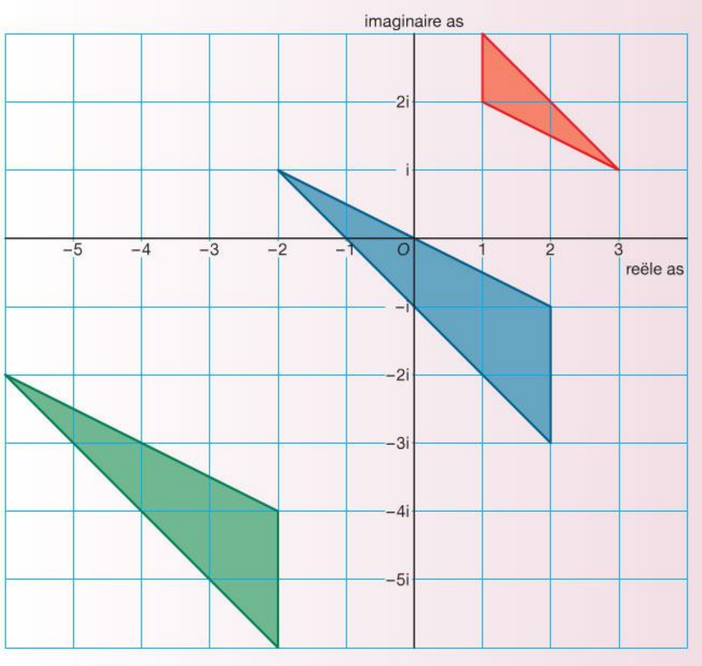
<u>Stap 1:</u>
Een vermenigvuldiging t.o.v. 0 met factor -2 van de rode driehoek geeft de groene driehoek.

<u>Stap 2:</u>
De translatie (4, 3) van de groene driehoek geeft de blauwe driehoek.



16.1 Lineaire complexe functies [1]

Voorbeeld 4:
Het getal 0 ligt op de blauwe driehoek (het beeld).
Een getal dat door een functie *f* op 0 wordt afgebeeld, heet een **nulpunt** van *f*.



Het oplossen van $f(z) = 0$ geeft het nulpunt.

$-2z + 4 + 3i = 0$

$-2z = -4 - 3i$

$2z = 4 + 3i$

$z = 2 + 1\frac{1}{2}i$

Voorbeeld 5:
Een **dekpunt** van de complexe functie *f* is een getal dat op zichzelf wordt afgebeeld.

Het oplossen van $f(z) = z$ geeft het dekpunt.

$-2z + 4 + 3i = z$

$-3z = -4 - 3i$

$3z = 4 + 3i$

$z = 1\frac{1}{3} + i$

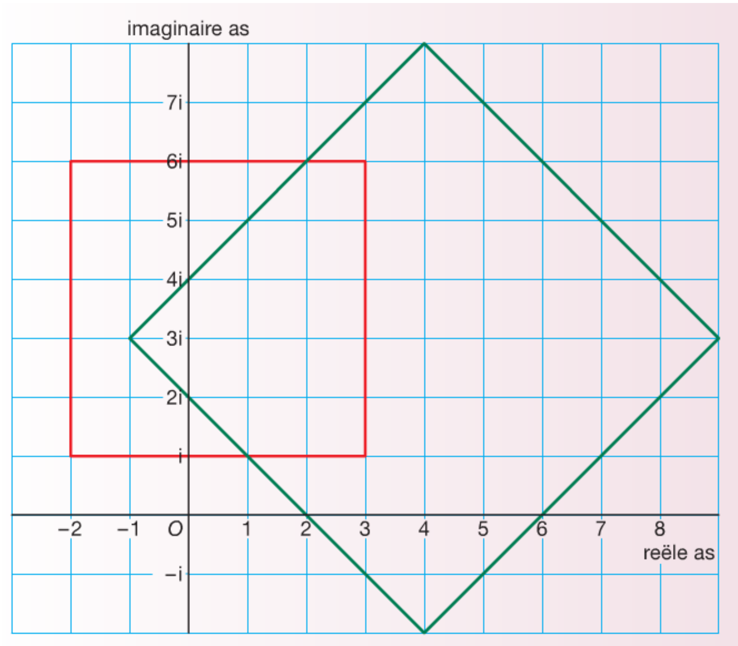
16.1 Lineaire complexe functies [2]

Bij de functie $f(z) = a + bi$ hoort de draaivermenigvuldiging die bestaat uit de rotatie over $\arg(a + bi)$ en de vermenigvuldiging t.o.v. 0 met factor $|a + bi|$

<u>**Voorbeeld 1:**</u>
Gegeven is de functie $f(z) = (1 - i)z$.
Teken het beeld bij de functie f van het rode vierkant met hoekpunten
-2 + i, 3 + i, 3 + 6i, -2 + 6i.

$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
$\arg(1 - i) = -\frac{1}{4}\pi$

Er is sprake van een rotatie over $-\frac{1}{4}\pi$ en een vermenigvuldiging t.o.v. 0 met $\sqrt{2}$. Zo ontstaat het groene vierkant.



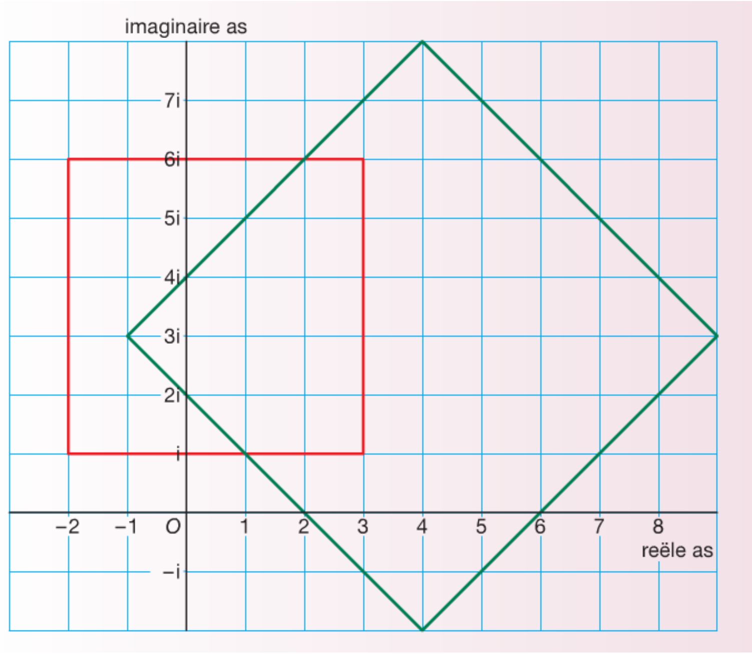
16.1 Lineaire complexe functies [2]

Bij de functie $f(z) = a + bi$ hoort de draaivermenigvuldiging die bestaat uit de rotatie over $\arg(a + bi)$ en de vermenigvuldiging t.o.v. 0 met factor $|a + bi|$

<u>**Voorbeeld 1:**</u>

Het lijnstuk van O tot het punt -2 + i op het rode vierkant wordt $-\frac{1}{4}\pi$ geroteerd.
De lengte die $\sqrt{5}$ was, wordt $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$.
Zo ontstaat het punt -1 + 3i op het groene vierkant.

Het lijnstuk van O tot het punt -2 + 6i op het rode vierkant wordt $-\frac{1}{4}\pi$ geroteerd.
De lengte die $\sqrt{40}$ was, wordt $\sqrt{2} \cdot \sqrt{40} = \sqrt{80}$.
Zo ontstaat het punt 4 + 8i op het groene vierkant.



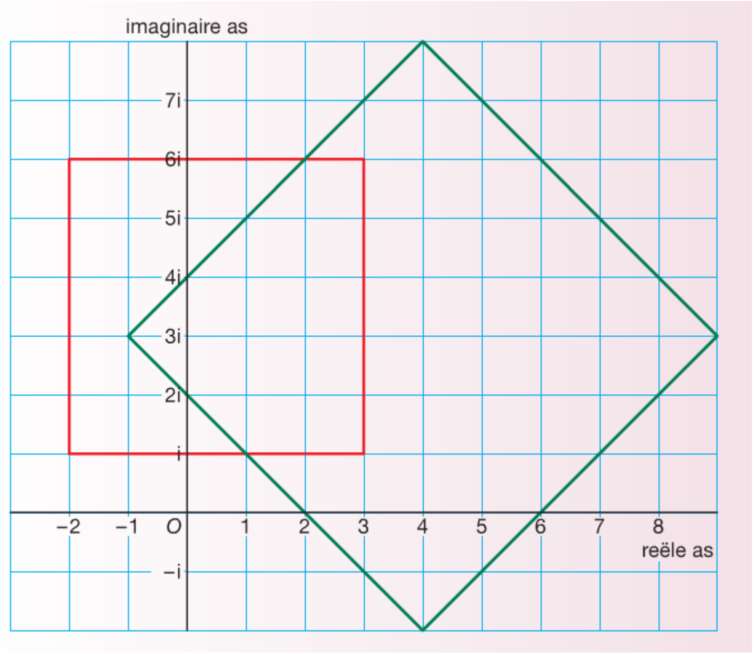
16.1 Lineaire complexe functies [2]

Bij de functie $f(z) = a + bi$ hoort de draaivermenigvuldiging die bestaat uit de rotatie over $\arg(a + bi)$ en de vermenigvuldiging t.o.v. 0 met factor $|a + bi|$

<u>Voorbeeld 1:</u>

Het lijnstuk van O tot het punt 3 + i op het rode vierkant wordt $-\frac{1}{4}\pi$ geroteerd.
De lengte die $\sqrt{10}$ was, wordt $\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{20}$.
Zo ontstaat het punt 4 - 2i op het groene vierkant.

Het lijnstuk van O tot het punt 3 + 6i op het rode vierkant wordt $-\frac{1}{4}\pi$ geroteerd.
De lengte die $\sqrt{45}$ was, wordt $\sqrt{2} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{90}$.
Zo ontstaat het punt 9 + 3i op het groene vierkant.



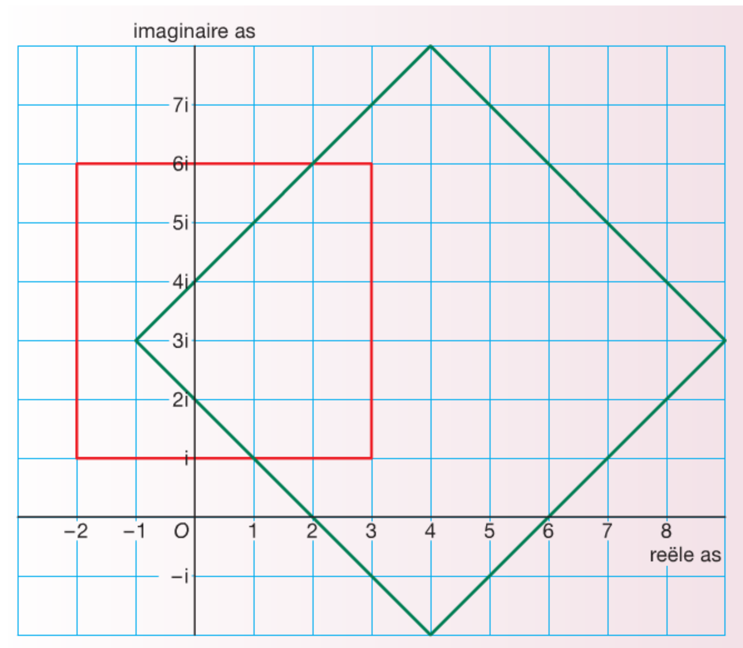
16.1 Lineaire complexe functies [2]

Bij de functie *f*(*z*) = *a* + *b*i hoort de draaivermenigvuldiging die bestaat uit de rotatie over arg(*a* + *b*i) en de vermenigvuldiging t.o.v. 0 met factor |*a* + *b*i|

<u>Voorbeeld 2:</u>
Geef het bereik van *f* bij het domein
$|z| \leq 2 \wedge -\frac{1}{4}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{4}\pi$

Er is een vermenigvuldiging met $\sqrt{2}$.
Hieruit volgt bij het bereik: $|z| \leq 2\sqrt{2}$

Er is een rotatie van $-\frac{1}{4}\pi$.
Hieruit volgt bij het bereik: $-\frac{1}{2}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq 0^{\circ}$



16.1 Lineaire complexe functies [3]

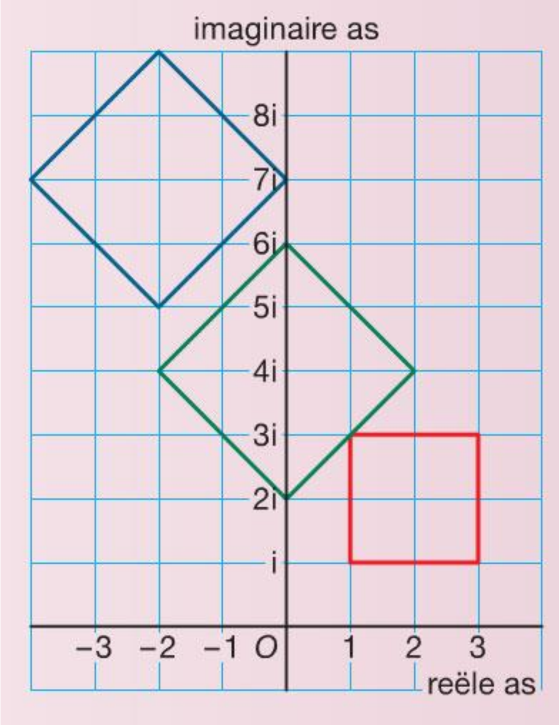
Bij de functie $f(z) = (a + bi)z + c + di$ met a, b, c en de reëel hoort de vermenigvuldiging t.o.v. 0 met de factor $|a + bi|$ en de rotatie over $\arg(a + bi)$ gevolgd door de translatie (c, d)

<u>Voorbeeld 1:</u>
Gegeven is de functie $f(z) = (1 + i)z - 2 + 3i$.
Teken het beeld bij f van het vierkant met de hoekpunten 1 + i, 3 + i, 3 + 3i en 1 + 3i

$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\arg(1 + i) = \frac{1}{4}\pi$

Het roteren van het rode vierkant over $\frac{1}{4}\pi$ en het vermenigvuldigen t.o.v. 0 met $\sqrt{2}$ geeft het groene vierkant.

De translatie (-2, 3) van het groen vierkant geeft het blauwe vierkant.



16.1 Lineaire complexe functies [3]

Bij de functie $f(z) = (a + bi)z + c + di$ met a, b, c en de reëel hoort de vermenigvuldiging t.o.v. 0 met de factor $|a + bi|$ en de rotatie over $\arg(a + bi)$ gevolgd door de translatie (c, d)

__**Voorbeeld 2:**__

Gegeven is de functie $f(z) = (1 + i)z - 2 + 3i$.
Wat is het origineel van f bij $10 + i$?

$f(z) = 10 + i$
$(1 + i)z - 2 + 3i = 10 + i$
$(1 + i)z = 12 - 2i$

$$z = \frac{12-2i}{1+i} = \frac{12-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{12-12i-2i-2}{2} = 5-7i$$

16.2 Niet-lineaire complexe functies [1]

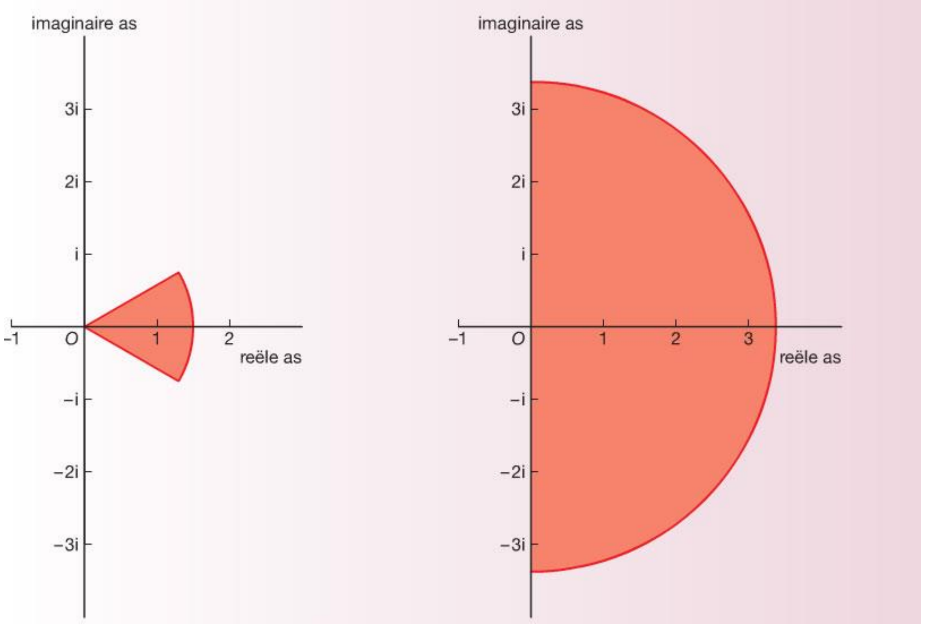
Bij de functie $f(z) = z^n$ geldt $|z^n| = |z|^n$ en $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$

<u>Formule van De Moivre</u>: $z^n = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

<u>Voorbeeld:</u>
Gegeven is de functie $f(z) = z^3$
Teken in twee aparte figuren de cirkelsector $|z| \leq 1{,}5 \wedge -\frac{1}{6}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{6}\pi$ en het beeld bij f.

$|f(z)| = |z^3| = |z|^3 = 1{,}5^3 = 3{,}375.$

$\arg(z^3) = 3 \cdot \arg(z)$ dus $-\frac{1}{2}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{2}\pi$



16.2 Niet-lineaire complexe functies [2]

Gegeven is de **complexe exponentiële functie** $f(z) = e^z$

$f(0) = e^0 = 1$
$f(1) = e^1 = e$
$f(-2) = e^{-2}$

Het invullen van een getal dat op de reële as ligt, geeft altijd een reëel positief getal. **Deze functie beeldt de reële as af op de positieve reële as.**

Gegeven is de functie $f(z) = e^z$

$|f(\frac{1}{4}\pi i)| = |e^{\frac{1}{4}\pi i}| = |\cos(\frac{1}{4}\pi) + i\sin(\frac{1}{4}\pi)| = |\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$
$\mathrm{Arg}(f(\frac{1}{4}\pi i)) = \mathrm{Arg}(e^{\frac{1}{4}\pi i}) = \mathrm{Arg}(\cos(\frac{1}{4}\pi) + i\sin(\frac{1}{4}\pi)|) = \frac{1}{4}\pi$

$|f(\frac{3}{4}\pi i)| = |e^{\frac{3}{4}\pi i}| = |\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi)| = |-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$
$\mathrm{Arg}(f(\frac{3}{4}\pi i)) = \mathrm{Arg}(e^{\frac{3}{4}\pi i}) = \mathrm{Arg}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi)|) = \frac{3}{4}\pi$

Het invullen van een zuiver imaginair getal dat op de imaginaire as ligt,
geeft een punt op de eenheidscirkel. **Deze functie beeldt de imaginaire as af op de eenheidscirkel.**

16.2 Niet-lineaire complexe functies [2]

Gegeven is de functie $f(z) = e^z$

$f(z + k \cdot 2\pi i) = e^{z + k \cdot 2\pi i} = e^z \cdot e^{k \cdot 2\pi i} = e^z \cdot (e^{2\pi i})^k = e^z \cdot 1^k = e^z$

Deze functie is periodiek met periode 2πi.

Algemeen:
Bij de functie $f(z) = e^z$ geldt $f(a + bi) = e^{a + bi} = e^a \cdot e^{bi}$ is
- bij vaste a het beeld een cirkel met middelpunt 0 en straal e^a;
- bij vaste b het beeld een halve lijn die een hoek van b radialen maakt met de positieve reële as;

Algemeen:
$f(z) = \ln(z)$ is de **complexe logaritmische functie**.
De rekenregels voor logaritmen kun je hier ook gebruiken.
We beperken ons tot functiewaarden $f(z)$ waarvoor geldt: $-\pi \leq f(z) \leq \pi$

16.2 Niet-lineaire complexe functies [2]

Voorbeeld 1:

Gegeven is de functie $f(z) = \ln(z)$. Bereken exact $f(i\sqrt{i})$

$$
\begin{aligned}
f(i\sqrt{i}) &= \ln(i\sqrt{i}) \\
&= \ln(i^{1\frac{1}{2}}) \\
&= 1\tfrac{1}{2}\ln(i) \\
&= 1\tfrac{1}{2}\ln(e^{\frac{1}{2}\pi i}) \\
&= 1\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\pi i \\
&= \tfrac{3}{4}\pi i
\end{aligned}
$$

Voorbeeld 2:

Gegeven is de functie $f(z) = \ln(z)$. Bereken exact $f(1 + i)$

$$
\begin{aligned}
f(1+i) &= \ln(1+i) \\
&= \ln(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}) \\
&= \ln(\sqrt{2}) + \ln(e^{\frac{1}{4}\pi i}) \\
&= \ln(2^{\frac{1}{2}}) + \ln(e^{\frac{1}{4}\pi i}) \\
&= \tfrac{1}{2}\ln(2) + \tfrac{1}{4}\pi i
\end{aligned}
$$

16.2 Niet-lineaire complexe functies [3]

Algemeen:

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad en \quad \sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Bij het complexe getal z worden deze formules:

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad en \quad \sin(x)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

16.2 Niet-lineaire complexe functies [3]

Voorbeeld:

Bereken exact $\sin(\frac{1}{6}\pi + i)$

$$\sin(\tfrac{1}{6}\pi + i) = \frac{e^{i\cdot(\frac{1}{6}\pi+i)} - e^{-i\cdot(\frac{1}{6}\pi+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+\frac{1}{6}\pi i} - e^{1-\frac{1}{6}\pi i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-1}\cdot e^{\frac{1}{6}\pi i} - e\cdot e^{-\frac{1}{6}\pi i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-1}(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i) - e(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i)}{2i}$$

$$= \frac{e^{-1}(\sqrt{3}+i) - e(\sqrt{3}-i)}{4i}$$

$$= \frac{e^{-1}(\sqrt{3}+i) - e(\sqrt{3}-i)}{4i}\cdot\frac{i}{i}$$

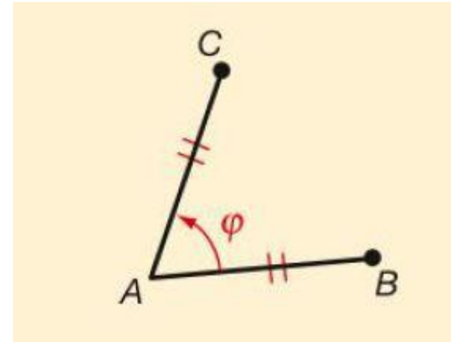
$$= \frac{e^{-1}(\sqrt{3}i-1) - e(\sqrt{3}i+1)}{-4}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}i}{4e} + \frac{1}{4e} + \frac{e\sqrt{3}}{4} + \frac{e}{4}$$

$$= \frac{1}{4e} + \frac{e}{4} + \left(\frac{-\sqrt{3}}{4e} + \frac{e\sqrt{3}}{4}\right)i$$

16.3 Meetkunde met complexe getallen [1]

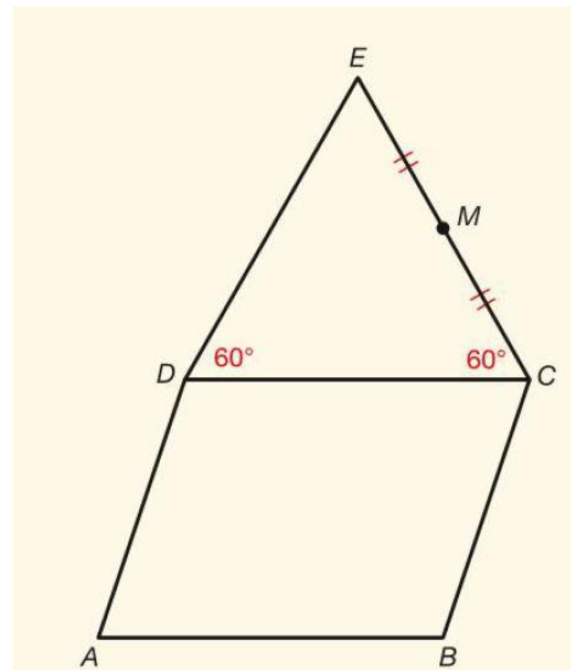
Algemeen:
Bij de rotatie van het lijnstuk AB om A over een hoek van φ geldt voor het beeld C van B dat
$c = a + (\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)(b - a)$
Hierin zijn a, b en c de complexe getallen die horen bij de punten A, B en C.



Voorbeeld:
Gegeven is het parallellogram $ABCD$ met op zijde CD de gelijkzijdige driehoek CDE. Het punt M is het midden van CE.

Druk de complexe getallen e en m uit in de complexe getallen a, b en d.

$c = b + (d - a) = b + d - a$
$e = d + (\cos(60^\circ) + \mathrm{i}\sin(60^\circ)((c - d)$
$\quad = d + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3})(b - a)$
$\quad = d + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3})b - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3})a$



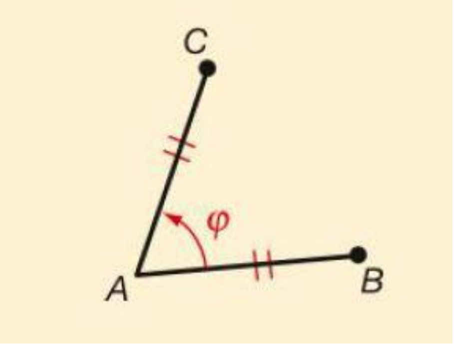
16.3 Meetkunde met complexe getallen [1]

Algemeen:

Bij de rotatie van het lijnstuk AB om A over een hoek van φ geldt voor het beeld C van B dat

$c = a + (\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)(b - a)$

Hierin zijn a, b en c de complexe getallen die horen bij de punten A, B en C.



Voorbeeld:

Gegeven is het parallellogram $ABCD$ met op zijde CD de gelijkzijdige driehoek CDE. Het punt M is het midden van CE.

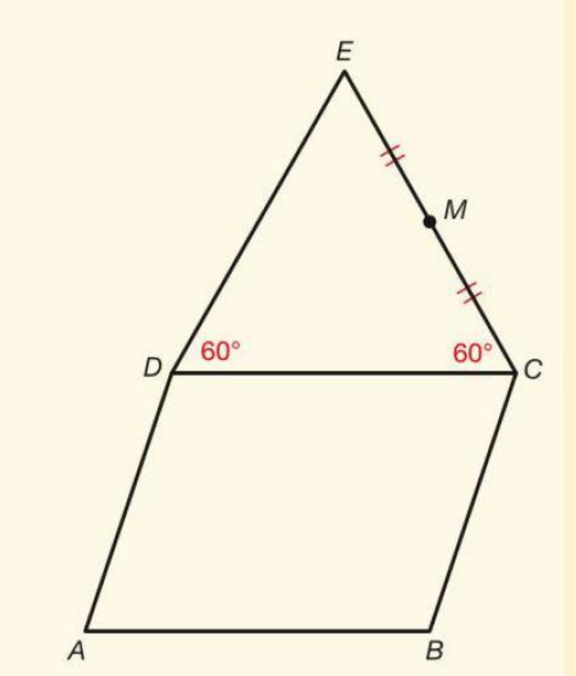
Druk de complexe getallen e en m uit in de complexe getallen a, b en d.

$m = \frac{1}{2}(c + e)$

$\quad = \frac{1}{2}(b + d - a + d + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3})b - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3})a$

$\quad = \frac{1}{2}((1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3})b + 2d - (1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3})a)$

$\quad = (\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i}\sqrt{3})b + d - (\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i}\sqrt{3})a$



16.4 Derdegraadsvergelijkingen [1]

Voorbeeld:

Los op in $\mathbb{C}$: $z^3 + z^2 + z - 3 = 0$

Stap 1:

Bereken met behulp van de GR de reële oplossing:

De optie ZERO geeft $z = 1$ als reële oplossing.

Stap 2:

Gebruik staartdelen om een functie te krijgen die je op kunt lossen:

$z - 1$ / $z^3 + z^2 + z - 3$ \ z^2

$z^3 - z^2$

---------------- -

$2z^2 + z - 3$

z^2 maal $z - 1 = z^2(z - 1) = z^3 - z^2$

Let op: Hierdoor valt de z^3 weg.

$z - 1$ / $2z^2 + z - 3$ \ $z^2 + 2z$

$2z^2 - 2z$

---------------- -

$3z - 3$

$3z - 3$ \ $z^2 + 2z + 3$

--------- -

0

$2z$ maal $z - 1 = 2z(z - 1) = 2z^2 - 2z$

Let op: Hierdoor valt de $2z^2$ weg.

16.4 Derdegraadsvergelijkingen [1]

Voorbeeld:

Los op in $\mathbb{C}$: $z^3 + z^2 + z - 3 = 0$

Stap 3:

Los de nu ontstane vergelijking op.

$z^3 + z^2 + z - 3 = 0$

$(z - 1)(z^2 + 2z + 3) = 0$

$z = 1 \vee z^2 + 2z + 3 = 0$

$z = 1 \vee z^2 + 2z = -3$

$z = 1 \vee (z + 1)^2 - 1 = -3$

$z = 1 \vee (z + 1)^2 = -2$

$z = 1 \vee (z + 1)^2 = 2i^2$

$z = 1 \vee z + 1 = i\sqrt{2} \vee z + 1 = -i\sqrt{2}$

$z = 1 \vee z = -1 + i\sqrt{2} \vee z = -1 - i\sqrt{2}$

Algemeen:

Als $x = k$ een oplossing is van de vergelijking $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ dan is $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - k)(x^2 + \ldots)$

16.4 Derdegraadsvergelijkingen [2]

Voorbeeld:

Los algebraïsch op in: $\mathbb{C}$ $z^3 + 12z = 63$

Stap 1:

Bij de vergelijking $z^3 + pz = q$ geldt:

$z = u + v$, $p = -3uv$ en $u^3 + v^3 = q$

$z = u + v$, $12 = -3uv$ en $u^3 + v^3 = 63$

Stap 2:

Bereken u^3 en v^3 en z:

Uit $12 = -3uv$ volgt $v = -\dfrac{4}{u}$

16.4 Derdegraadsvergelijkingen [2]

Voorbeeld:

Los algebraïsch op in: $\mathbb{C}$ $z^3 + 12z = 63$

Stap 2:

Bereken u^3 en v^3 en z:

$$u^3 + \left(-\frac{4}{u}\right)^3 = 63$$

$$u^3 - \frac{64}{u^3} = 63$$

$$u^6 - 63u^3 - 64 = 0$$

$$D = (-63)^2 - 4 \cdot -64 = 4225 \Rightarrow \sqrt{D} = 65$$

$$u^3 = \frac{63+65}{2} = 64$$

$$v^3 = 63 - u^3 = 63 - 64 = -1$$

$$z = \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{-1} = 4 - 1 = 3$$

De andere oplossing nemen voor u^3 geeft dezelfde uitkomst voor z.

16.4 Derdegraadsvergelijkingen [2]

Voorbeeld:
Los algebraïsch op in: $\mathbb{C}$ $z^3 + 12z = 63$

Stap 3:
Je hebt nu de reële oplossing. Gebruik staartdelen om een functie te krijgen die je op kunt lossen:

$z - 3$ / $z^3 \quad + 12z - 63$ \ z^2

$z^3 - 3z^2$

---------------- -

$3z^2 + 12z - 63$

z^2 maal $z - 3 = z^2(z - 3) = z^3 - 3z^2$
Let op: Hierdoor valt de z^3 weg.

$z - 3$ / $3z^2 + 12z - 63$ \ $z^2 + 3z$

$3z^2 - 9z$

---------------- -

$21z - 63$

$21z - 63$ \ $z^2 + 3z + 21$

--------- -

0

$3z$ maal $z - 3 = 3z(z - 3) = 3z^2 - 9z$
Let op: Hierdoor valt de $3z^2$ weg.

16.4 Derdegraadsvergelijkingen [2]

Voorbeeld:

Los algebraïsch op in: $\mathbb{C}$ $z^3 + 12z = 63$

Stap 4:

Los de nu ontstane vergelijking op:

$z^3 + 12z - 63 = 0$

$(z - 3)(z^2 + 3z + 21) = 0$

$z = 3 \vee z^2 + 3z + 21 = 0$

$z = 3 \vee z^2 + 3z = -21$

$z = 3 \vee (z + 1\tfrac{1}{2})^2 - 2\tfrac{1}{4} = -21$

$z = 3 \vee (z + 1\tfrac{1}{2})^2 = -18\tfrac{3}{4}$

$z = 3 \vee (z + 1\tfrac{1}{2})^2 = 18\tfrac{3}{4}i^2$

$z = 3 \vee z + 1\tfrac{1}{2} = 2\tfrac{1}{2}i\sqrt{3} \vee z + 1\tfrac{1}{2} = -2\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$

$z = 3 \vee z = -1\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}i\sqrt{3} \vee z = -1\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$

16.4 Derdegraadsvergelijkingen [3]

Voorbeeld:

Los algebraïsch op in: $\mathbb{C}$ $z^3 + 2z^2 - 14z - 40 = 0$

Stap 1:

Gebruik de subsitutie $z = y - \frac{1}{3}a$ om de vergelijking te herleiden tot de vorm $y^3 + py = q$. Hierbij is a het getal voor de z^2.

$z = y - \frac{1}{3} \cdot 2$

$z = y - \frac{2}{3}$

$$(y - \tfrac{2}{3})^3 + 2(y - \tfrac{2}{3})^2 - 14(y - \tfrac{2}{3}) - 40 = 0$$

$$y^3 - 2y^2 + \tfrac{4}{3}y - \tfrac{8}{27} + 2y^2 - \tfrac{8}{3}y + \tfrac{8}{9} - 14y + \tfrac{28}{3} - 40 = 0$$

$$y^3 - 15\tfrac{1}{3}y = 30\tfrac{2}{27}$$

16.4 Derdegraadsvergelijkingen [3]

Voorbeeld:

Los algebraïsch op in: $\mathbb{C}$ $z^3 + 2z^2 - 14z - 40 = 0$

Stap 2:

Bij de vergelijking $z^3 + pz = q$ geldt:

$z = u + v$, $p = -3uv$ en $u^3 + v^3 = q$

$z = u + v$, $-15\frac{1}{3} = -3uv$ en $u^3 + v^3 = 30\frac{2}{7}$

Stap 3:

Bereken u^3 en v^3 en z:

Uit $-15\frac{1}{3} = -3uv$ volgt $v = \dfrac{46}{9u}$

16.4 Derdegraadsvergelijkingen [3]

Voorbeeld:

Los **algebraïsch** op in $\mathbb{C}$ $z^3 + 2z^2 - 14z - 40 = 0$

Stap 4:

Bereken u^3 en v^3 en z:

$$u^3 + \left(\frac{46}{9u}\right)^3 = 30\tfrac{2}{27}$$

$$u^3 + \frac{97.336}{729u^3} = 30\tfrac{2}{27}$$

$$u^6 - 30\tfrac{2}{27}u^3 + \frac{97.336}{729} = 0$$

$$D = \frac{10000}{27} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{100}{9}\sqrt{3}$$

$$u^3 = \frac{30\tfrac{2}{27} + \tfrac{100}{9}\sqrt{3}}{2} = 15\tfrac{1}{27} + \tfrac{50}{9}\sqrt{3}$$

$$v^3 = 30\tfrac{2}{27} - u^3 = 15\tfrac{1}{27} - \tfrac{50}{9}\sqrt{3}$$

$$y = \sqrt[3]{15\tfrac{1}{27} + \tfrac{50}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{15\tfrac{1}{27} - \tfrac{50}{9}\sqrt{3}} = 4\tfrac{2}{3}$$

$$z = y - \tfrac{2}{3} = 4\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3} = 4$$

De andere oplossing nemen voor u^3 geeft dezelfde uitkomst voor z.

16.4 Derdegraadsvergelijkingen [3]

Voorbeeld:

Los **algebraïsch** op in $\mathbb{C}$ $z^3 + 2z^2 - 14z - 40 = 0$

Stap 5:

Je hebt nu de reële oplossing. Gebruik staartdelen om een functie te krijgen die je op kunt lossen:

$z - 4$ / $z^3 + 2z^2 - 14z - 40$ \ z^2

$z^3 - 4z^2$

---------------- -

$6z^2 - 14z - 40$

z^2 maal $z - 4 = z^2(z - 4) = z^3 - 4z^2$

Let op: Hierdoor valt de z^3 weg.

$z - 4$ / $6z^2 - 14z - 40$ \ $z^2 + 6z$

$6z^2 - 24$

---------------- -

$10z - 40$

$10z - 40$ \ $z^2 + 6z + 10$

--------- -

0

$6z$ maal $z - 4 = 6z(z - 4) = 6z^2 - 24z$

Let op: Hierdoor valt de $6z^2$ weg.

16.4 Derdegraadsvergelijkingen [3]

Voorbeeld:

Los **algebraïsch** op in $\mathbb{C}$ $z^3 + 2z^2 - 14z - 40 = 0$

Stap 6:

Los de nu ontstane vergelijking op:

$z^3 + 2z^2 - 14z - 40 = 0$

$(z - 4)(z^2 + 6z + 10) = 0$

$z = 4 \vee z^2 + 6z + 10 = 0$

$z = 4 \vee z^2 + 6z = -10$

$z = 4 \vee (z + 3)^2 - 9 = -10$

$z = 4 \vee (z + 3)^2 = -1$

$z = 4 \vee (z + 3)^2 = \mathrm{i}^2$

$z = 4 \vee z + 3 = \mathrm{i} \vee z + 3 = -\mathrm{i}$

$z = 4 \vee z = -3 + \mathrm{i} \vee z = -3 - \mathrm{i}$